

Федеральное государственное бюджетное учреждение наук
Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева
Сибирского отделения Российской академии наук

На правах рукописи



Спиряев Вадим Александрович

**ИНТЕГРАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ И ИХ
ПРИЛОЖЕНИЯ В ТЕПЛОЭНЕРГЕТИКЕ**

Специальность 1.2.2. Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата технических наук

Научный руководитель:
доктор технических наук, доцент
Солодуша Светлана Витальевна

Иркутск — 2023

Оглавление

Введение	5
Глава 1. Проблема идентификации в задачах моделирования	
динамических процессов типа "вход-выход"	16
1.1. Задачи идентификации динамики технических объектов	16
1.1.1. Описание предметной области	16
1.1.2. Идентификация нелинейных динамических систем с помощью полиномов Вольтерра	18
1.1.3. Слабо неустойчивые задачи прикладной математики	28
1.2. Задача анализа временных рядов. Преобразование Гильберта–Хуанга	33
Глава 2. Методы и модели диагностики характеристик	
теплотехнического оборудования	37
2.1. Задача моделирования динамики давления и температуры для теплотехнического оборудования энергоблока Назаровской ГРЭС мощностью 135 МВт	37
2.2. Задача моделирования динамики элемента теплообменного аппарата	40
2.3. Экспериментальное исследование динамики давления в теплофизических процессах	43
2.4. Постановка цели и задач исследования	44
Глава 3. Математические подходы для решения задач	
идентификации переходных характеристик и сигналов	52
3.1. Методика построения интегральных моделей на основе идентификации полиномов Вольтерра	52
3.1.1. Постановка задачи и метод интегрирования произведения	52
3.1.2. Идентификация квадратичного полинома Вольтерра	55
3.1.3. Идентификация кубического полинома Вольтерра	57
3.1.4. Оптимизация амплитуд тестовых сигналов	61

3.2. Идентификация и анализ сигналов динамических систем	69
3.2.1. Задача идентификации сигналов в интегральной модели	69
3.2.2. Интегральные неравенства и тестовые уравнения для анализа области существования	79
3.2.3. Тестовые уравнения для идентификации входных сигналов	87
3.2.4. Численные методы решения квадратичного уравнения Вольтерра I рода	88
3.2.5. Интегральное преобразование для анализа частотных характеристик	90
3.3. Выводы	105
Глава 4. Программные комплексы и численные эксперименты	107
4.1. Программный комплекс для моделирования нелинейных динамических систем различной природы с помощью квадратичного и кубичного полиномов Вольтерра	107
4.1.1. Краткая характеристика программного обеспечения	108
4.1.2. Построение квадратичного и кубичного полиномов для математической эталонной модели	110
4.1.3. Моделирование динамики давления и температуры для объектов Назаровской ГРЭС с помощью квадратичного и кубичного полиномов Вольтерра	119
4.1.4. Программа построения кубичного полинома Вольтерра для моделирования динамики элемента теплообменного аппарата	126
4.1.5. Программа для численного решения квадратичного уравнения Вольтерра I рода. Примеры тестирования алгоритма	128
4.1.6. Применение тестовых уравнений	131
4.2. Анализ динамики давления с помощью модифицированного ПГХ	134
4.3. Выводы	138
Заключение	140

Перечень сокращений и обозначений	143
Литература	145
Приложение	168
Приложение А.	168
Приложение Б.	169
Приложение В.	171
Приложение Г.	180

Введение

Актуальность исследования. Актуальность диссертационной работы определяется следующими факторами:

1. Концепция цифровой трансформации энергетики стимулирует создание математического инструментария для анализа и моделирования нелинейных динамических систем. Современные и классические исследования в этой области не дают полного математического аппарата, учитывающего ограничения на динамические характеристики систем.
2. Многие обратные задачи в энергетике приводят к необходимости использования быстродействующих моделей на основе интегральных уравнений. Задачи управления и идентификации, эффективные при изучении динамики функционирования технических объектов и систем, являются, как правило, некорректно поставленными, требующими применения трудоемких методов и алгоритмов регуляризации.
3. К настоящему времени теория многомерных интегральных уравнений, возникающих при использовании универсального аппарата интегро-степенных рядов Вольтерра (имеющего большое прикладное значение при моделировании нелинейной динамики) недостаточно развита. Получены частные результаты о их разрешимости, а алгоритмы для численного решения основаны на базовых квадратурных формулах правых и средних прямоугольников.
4. Программная реализация алгоритмов математического моделирования на основе интегральных уравнений вольтерровского типа отсутствует в библиотеках современных универсальных систем. Известна программа Voltaire XL (Microwave Office 2000), использующая ряды Вольтерра для анализа переходных режимов электронных схем в частотной области. Однако их применение во временной области ограничено, что объясняется сложностью идентификации ядер Вольтерра.

Эффективные решения перечисленных проблем имеют важное самостоятельное значение, а их взаимосвязанная реализация напрямую относится к формированию научных и технологических заделов, обеспечивающих переход к цифровизации энергетики. Таким образом, очевидна необходимость разработки эффективной методики построения математических моделей типа "вход-выход" на основе интегральных уравнений, объединяющей решения обратных задач идентификации переходных характеристик и восстановления входных сигналов динамических систем в теплоэнергетике.

Степень изученности и разработанности проблемы. На сегодняшний день проблеме идентификации параметров математической модели, адекватно описывающей реальный объект или процесс, посвящено довольно много научно-технической литературы. Среди современных работ обширные исследования по идентификации параметров математических моделей и оцениванию состояния применительно к теплотехническому оборудованию принадлежат сотрудникам ИСЭМ СО РАН А.М. Клеру, В.Э. Алексеюку, А.С. Максимова, Е.Л. Степановой, П.В. Жаркову [2; 55–57]. Проблеме идентификации переходных характеристик исследуемой динамической системы с помощью полиномов Вольтерра посвящены работы А.С. Апарцина, С.В. Солодуша, Э.А. Таирова [29; 88]. В силу универсальности аппарата полиномов Вольтерра методам идентификации ядер Вольтерра посвящено много работ. Так, например, применение полиномов Вольтерра при описании технических систем, мониторинге технологических процессов, помимо авторов, указанных выше, рассматривалось В.А. Вениковым, О.А. Сухановым, А.М. Дейчем, Л.В. Даниловым, Ю.С. Попковым, К.А. Пупковым, В.Д. Павленко, Д.Н. Сидоровым, S.A. Velbas, S. Silva, H.L. Van-Trees, T. Ogunfunmi и другими [36; 37; 46; 47; 73; 74; 77–79; 81; 82; 121; 124; 133; 167; 176]. Отдельно выделим, что уже в начале 90-х прошлого века А.С. Апарциным в работах [17; 128] был предложен оригинальный подход, развитый его учениками, позволяющий свести задачу идентификации ядер Вольтерра к решению линейных многомерных уравнений Вольтерра I рода, допускающих явные формулы обращения, а следовательно, построение эффективных саморегуляризирующих численных методов. Эти работы послужили началом большой серии исследований, посвященных проблеме идентификации полиномов Вольтерра, проведенных А.С. Апарци-

ным и его коллегами [8; 15; 30; 31; 82; 93; 98; 180]. Теоретические аспекты применения полиномов Вольтерра для задачи моделирования динамических систем основываются на классических результатах И. Бэслера, И.К. Даугавета, М. Фреше [35; 150]. Среди работ, посвященных изучению интегральных уравнений вольтерровского типа, необходимо отметить серию работ А.С. Апарцина [10; 12; 16; 18; 25–27; 130], а обширный и современный обзор, касающийся интегральных уравнений, приведен в монографии Н. Brunner [139].

При этом обратные задачи идентификации переходных характеристик и сигналов динамических систем являются, как правило, некорректно поставленными. Это означает, что даже если решение обратной задачи в нужном классе существует и единственно, оно заведомо неустойчиво к погрешностям реальных исходных данных и даже к погрешностям вычислений. Для устойчивого приближенного решения подобных задач приходится использовать весь набор методов регуляризации некорректных задач, включая построение регуляризованного семейства приближенных решений, минимизирующего сглаживающий функционал А.Н. Тихонова [118]. Вместе с тем, существует класс слабо некорректных задач [8], для которых имеется принципиальная возможность построения особо эффективных вычислительных процедур за счет использования в качестве "естественных" параметров регуляризации, например шага сетки в конечно-разностных методах, числа слагаемых в проекционных методах, числа итераций в итерационных процедурах и т.д. В частности, в этот класс входят интегральные уравнения Вольтерра I рода, играющие первостепенную роль при построении (идентификации) математической модели нелинейной динамической системы типа "вход-выход" на основе откликов системы на специальные семейства кусочно-постоянных тестовых входных сигналов [8].

Другой класс слабо некорректных задач, возникает при обработке и анализе (зачастую в режиме реального времени) временных рядов различной природы. Традиционно при обработке временных рядов используется представление эмпирической функции в виде линейной комбинации тех или иных базисных функций, например, в виде ряда Фурье по системе тригонометрических функций. В работах Нордена Хуанга [158; 164] была предложена иная идеология, когда базисные функции не задаются априори, а вычисляются в

процессе обработки массива значений эмпирической функции. Число таких табличных функций является "естественным" параметром регуляризации, выбор которого в каждом конкретном случае представляет самостоятельную проблему. Одним из этапов реализации метода Хуанга является построение аналитической функции, мнимая компонента которой связана с вещественной базисной функцией – аппроксимацией исходного временного ряда интегральным преобразованием Гильберта, поэтому в целом данная методика получила название ПГХ (преобразование Гильберта-Хуанга). Несмотря на все увеличивающийся поток публикаций на эту тему, для успешного применения ПГХ при обработке реальных информационных массивов, в частности для выбора числа базисных функций, желателен максимальный учет специфики объекта или процесса, порождающего данный временной ряд.

Цель работы. Данная работа ориентирована на решение спектра задач численного моделирования динамики теплотехнических объектов и анализа реальных данных для переходных процессов. Основной целью работы является разработка единой методики построения интегральных моделей теплоэнергетических установок. В основе данной методики лежит решение задачи непараметрической идентификации переходных характеристик и реализация алгоритмов в виде программного комплекса для численного моделирования динамики исследуемого объекта.

Основные задачи диссертационной работы. Для достижения цели выполнено последовательное решение следующих задач:

1. Сравнительный анализ основных подходов к построению математических моделей при решении задач непараметрической идентификации переходных характеристик и сигналов динамических систем теплоэнергетики в условиях неполной априорной информации.
2. Разработка методики построения математических моделей на основе полиномов Вольтерра второй и третьей степени в случае скалярных входных сигналов с помощью многомерного метода интегрирования произведения (ИП).
3. Исследование вопросов существования и единственности решения систем

линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) при идентификации интегралов от ядер Вольтерра.

4. Развитие методов численного решения полиномиальных уравнений Вольтерра I рода, возникающих в задаче восстановления входных сигналов. Построение интегральных моделей на базе специальных тестовых уравнений вольтерровского типа, предназначенных для оценки правой границы исследуемого временного интервала.
5. Построение и анализ аппроксимаций Гильберта-Хуанга по результатам физических экспериментов на Центре коллективного пользования "Высокотемпературный контур" (ЦКП ВТК ИСЭМ СО РАН). Разработка методики, позволяющей получать качественные декомпозиции исследуемого сигнала для решения задачи идентификации механизмов пульсаций давления.
6. Разработка программного комплекса, предназначенного для численного моделирования на основе последовательного решения обратных задач идентификации переходных характеристик и скалярных входных сигналов динамических объектов.
7. Апробация разработанных методик и программного комплекса применительно к элементу теплообменного аппарата и теплотехнического оборудования энергоблока Назаровской ГРЭС мощностью 135 МВт.

Объектом исследования являются процессы непараметрической идентификации математических моделей и механизмов для ряда теплоэнергетических установок на примере цифрового двойника энергоблока Назаровской ГРЭС и имитационной модели теплообменной установки.

Предмет исследования: численные методы, алгоритмы и программные средства для построения математических моделей элементов теплоэнергетических установок, направленные на поэтапное решение прямых и обратных задач в рамках единой вычислительной технологии.

Методология и методы исследования. В работе использованы методы математического анализа, линейной алгебры, комбинаторики, теории

некорректных задач, машинного обучения и аппарата вычислительной математики.

Научная новизна. В работе получены следующие новые научные результаты:

1. Предложена эффективная методика непараметрической идентификации математических моделей типа "вход-выход" в виде квадратичных и кубических полиномов Вольтерра. Ключевое отличие состоит в обобщении численного метода интегрирования произведения для восстановления многомерных интегралов от симметричных ядер.
2. Рассмотрены и исследованы специальные СЛАУ, на базе которых введены новые формулы сеточной аппроксимации переходных характеристик нелинейных динамических систем в случае кусочно-постоянных сеточных сигналов.
3. Выполнено развитие методов численного решения полиномиальных уравнений Вольтерра I рода, а также оценка предельных возможностей существующих вычислительных алгоритмов, основанных на идентификации ядер Вольтерра, за счет введения специальных мажорантных уравнений и серии тестовых примеров.
4. Исследована целесообразность и даны практические рекомендации применения аппроксимаций Гильберта-Хуанга для анализа результатов физических экспериментов на ЦКП ВТК ИСЭМ СО РАН.
5. Разработана архитектура и выполнена реализация программного комплекса (ПК), реализующего авторские алгоритмы и методы.

Положения, выносимые на защиту:

1. Подход к построению квадратичной и кубической математических моделей для цифровых двойников теплотехнического оборудования, основанный на идентификации интегралов от ядер Вольтерра с помощью многомерного метода ИП.

2. Техника обоснования применения многомерного ИП-метода для идентификации математической интегральной модели нелинейной динамической системы типа "вход-выход".
3. Применение численного ИП-метода для решения квадратичного уравнения Вольтерра I рода в случае, когда известны не сами ядра, а интегралы от них. Развитие подхода для получения неулучшаемых оценок решений полиномиальных уравнений Вольтерра I рода.
4. Реализация разработанных алгоритмов в виде ПК для построения квадратичной и кубической моделей для исследования динамики давления и температуры в энергоблоке Назаровской ГРЭС. Реализация модуля идентификации полиномов Вольтерра второй и третьей степени, входящего в ПК "Динамика", для исследования динамики элемента теплообменной установки.
5. Подход, позволяющий выбирать между классической версией ПГХ и его модификацией, учитывая параметры этой модификации. Применение модифицированного ПГХ для идентификации несущих частот автоколебательных пульсаций давления.

Соответствие паспорту специальности. Выносимые положения соответствуют следующим пунктам паспорта научной специальности 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ:

1. Положение 1, 2 соответствует пункту 2 паспорта специальности.
2. Положения 3, 4 соответствуют пункту 3 паспорта специальности.
3. Положения 1, 4, и 5 соответствуют пункту 8 паспорта специальности.

В диссертации присутствуют оригинальные результаты из трех областей:

1. Математическое моделирование. Разработана методология построения математических моделей в виде полиномов Вольтерра на основе обобщения ИП-метода; предложена новая модель, ядра Вольтерра в которой удовлетворяют заранее заданным условиям (соответствует пунктам 1, 4 положений, выносимых на защиту).

2. Численные методы. Предложен численный метод на основе обобщения ИП-метода для задачи идентификации и моделирования нелинейных динамических систем типа «вход-выход»; предложен и реализован подход для выбора между классической версией ПГХ и его модификацией (соответствует пунктам 2, 3, 5 положений, выносимых на защиту).
3. Комплексы программ. Разработан и реализован ПК для решения задач идентификации и моделирования динамики цифрового двойника энергоблока Назаровской ГРЭС и имитационной модели элемента теплообменной установки (соответствует пункту 4 положений, выносимых на защиту).

Обоснованность и достоверность результатов диссертации. Достоверность полученных в диссертации результатов подтверждается соответствующими математическими выкладками, которые сформулированы в виде теорем. Корректное применение разработанного математического аппарата продемонстрировано при решении модельных (тестовых) задач и при расчетах с реальными экспериментальными данными, которые допускают естественную физическую интерпретацию.

Теоретическая значимость. Развитая в диссертации техника обоснования ИП-метода идентификации математической модели нелинейной динамической системы типа "черного ящика", допускающей применение кусочно-постоянных тестовых входных сигналов (доказательство невырожденности СЛАУ, оптимизация амплитуд сигналов и т.д.) носит универсальный характер и может быть перенесена на более общий случай нестационарных систем с векторным входом. Применение ПГХ в задаче автоколебательных пульсаций давления позволяет провести идентификацию частот, которые характеризуют определенные механизмы автоколебательных пульсаций давления. Предложенная методика может быть адаптирована для анализа других сигналов, как такой же, так и иной природы.

Практическая ценность:

1. Разработана универсальная методика построения математических моделей типа «вход-выход» в виде полиномов Вольтерра второй и третьей степени для случая скалярных входных сигналов. Показано, что кубич-

ная модель точнее квадратичной моделирует заданный объект и позволяет более полно учитывать нелинейные свойства объекта.

2. Применение кубичной модели расширяет класс допустимых входных сигналов по сравнению с квадратичной моделью.
3. Построена численная схема решения квадратичного интегрального уравнения, позволяющая согласовать решение задач автоматического управления и идентификации модели. Показано преимущество ИП-метода для сильно осциллирующих функций по сравнению с классическими численными методами.
4. Разработан подход, позволяющий выбирать между классической версией ПГХ и его модификацией, для более точной идентификации несущих частот автоколебательных пульсаций давления.
5. Разработано программное обеспечение, предназначенное для численного моделирования динамических систем на основе решения задачи идентификации переходных характеристик.
6. Проведена апробация разработанных методик и программного комплекса применительно к элементу теплообменного аппарата и теплотехнического оборудования энергоблока Назаровской ГРЭС.

Разработанные программные комплексы могут найти применение в организациях научно-технического профиля.

Апробация работы. Результаты, излагаемые в диссертации, были представлены на следующих конференциях и семинарах: на XXI Международной конференции "Проблемы управления и моделирования в сложных системах" (г. Самара, 3-6 сентября 2019 г.), на Всероссийской молодежной конференции с международным участием "Системные исследования в энергетике – 2019" (г. Иркутск, 27-31 мая 2019 г.), на VII Международном симпозиуме "Обобщенные постановки и решения задач управления" (г. Геленджик – с. Дивноморское, Краснодарский край, 26-30 сентября 2014 г.), на Молодежной международной научной школе-конференции "Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач" (г. Новосибирск, 10-20 ав-

густа 2009 г.), на Всероссийской конференции "Математическое моделирование, вычислительно-информационные технологии в междисциплинарных научных исследованиях" (г. Иркутск, 6-7 июня 2009 г.), на Международной конференции "Аналитическая механика, устойчивость и управление движением", посвященной 105-летию академика Н.Г. Четаева (г. Иркутск, 12-16 июня 2007 г.), на IV Всероссийской конференции "Математика, информатика, управление" (г. Иркутск, 1-5 ноября 2005 г.), на VII Всероссийской конференции молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям (с участием иностранных ученых) (г. Красноярск, 1-3 ноября 2006 г.), а также на конференциях молодых ученых ИСЭМ СО РАН, на совместных семинарах лабораторий отдела "Прикладной математики" № 90 ИСЭМ СО РАН и на семинаре лаборатории "Идентификация систем управления" ИПУ РАН (Москва, 2021 г.).

Исследования, представленные в диссертационной работе, были поддержаны Лаврентьевским грантом СО РАН для поддержки молодых ученых (постановление Президиума СО РАН № 404 от 06.12.2002), грантами РФФИ № 02-01-00173, 05-01-00336, 09-01-00377, 12-01-00722, 15-01-01425.

По теме диссертации опубликовано 29 научно-исследовательских работ, в том числе 2 статьи в журналах, рекомендованных ВАК при Минобрнауки России по научной специальности 1.2.2. (технические науки) для опубликования основных результатов диссертационных исследований на соискание степеней кандидата и доктора наук, 2 статьи в изданиях, рекомендованных ВАК по прочим специальностям, 2 статьи, индексируемые в международной базе данных Scopus, и 1 статья в международной базе данных Web of Science.

Получены свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ [111; 112].

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка использованной литературы и приложений. Основной текст диссертационной работы содержит 182 страницы, 74 рисунка и 5 таблиц. Список литературы содержит 187 источников. В приложениях приведены формулировки и доказательства теорем, иллюстративные материалы, сведения об апробации и применении результатов исследования.

Личный вклад автора. Текст диссертации не содержит заимствований без ссылки на соответствующий первоисточник. В работах, опубликованных в соавторстве, соискателю принадлежит разработка математических интегральных моделей на основе метода ИП, применение численных методов для решения полиномиальных уравнений, реализация программных комплексов, анализ временных рядов с помощью модифицированного ПГХ. Теоретические результаты, связанные с полиномиальными интегральными уравнениями, получены совместно с А.С. Апарциным. Формулировки и доказательства теорем, приведенные в диссертации, принадлежат соискателю. Конфликт интересов с соавторами отсутствует.

Глава 1. Проблема идентификации в задачах моделирования динамических процессов типа "вход-выход"

1.1. Задачи идентификации динамики технических объектов

1.1.1. Описание предметной области

С развитием отраслей, затрагивающих сложные системы в производстве и естествознании, возникают задачи идентификации и анализа процессов, протекающих в различных динамических объектах.

В этом контексте задача математического моделирования является одной из самых распространенных и важных для научного анализа различных природных и технических систем. При этом построение любой математической модели, адекватно описывающей исследуемую динамическую систему, может проводиться разными способами. Так как оценивать близость операторов модели и объекта сложно или вообще невозможно, под адекватностью построенной модели будем понимать такое определение параметров и структуры модели, которые обеспечивают наилучшее совпадение выходных величин модели и исходного процесса (объекта) при одинаковых входных воздействиях [49]. Например, на основе физических законов и экспериментальных данных выдвигаются гипотезы о связях между параметрами моделируемого объекта, которые описываются системами обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) или системами дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП). Другим способом построения математической модели является подход, основанный на исследовании причинно-следственных связей, отражающихся в наблюдаемых входных и выходных сигналах. Такой подход сводится к задаче идентификации переходных характеристик динамической системы, которая, в свою очередь, ставит задачу построения математической модели, адекватно соответствующей исходной системе. Оба эти подхода имеют свои плюсы и минусы. Модель, построенная на основе физических законов, как правило, максимально возможно и всесторонне описывает структуру

системы и ее физический смысл. В то же время на практике часто возможны ситуации, когда структура системы либо совершенно неизвестна, либо крайне сложна для того, чтобы можно было по свойствам составных частей и связям между ними сделать выводы о поведении системы в целом. В этом случае второй подход, сводящийся к задаче идентификации системы только по входным и выходным сигналам, позволяет строить адекватные модели. Недостатком таких моделей является то, что внутренняя структура моделируемой системы и процессы, происходящие в ней, остаются неизвестными, а адекватность модели сильно зависит от параметров и переменных системы, которые можно варьировать. Несмотря на то, что решение задачи идентификации в значительной степени неоднозначно [47] и, как правило, требует значительных вычислительных возможностей, построить адекватную модель все же возможно.

Простейшей моделью для моделирования динамических систем различной природы является модель типа «вход-выход». Такая модель не учитывает физическую природу системы или объекта. Относительно свойств моделируемых динамических систем предполагается, что они не являются развивающимися, то есть их внутренняя структура остается неизменной в определенный промежуток времени и они находятся в стационарном режиме на начальный момент времени. Дополнительно к этому связь между входом и выходом системы не является однонаправленной, то есть выход системы не влияет на вход. При этом система обладает свойством инерционности. Важно, что на этапе построения модели проводятся активные эксперименты, которые, во-первых, не изменяют внутреннюю структуру объекта, во-вторых, сохраняют перечень входных и выходных сигналов, соответствующих этому объекту. При этом входные сигналы могут быть выбраны из заранее определенного диапазона, а их величина не влияет на устойчивость динамической системы на исследуемом временном интервале. Кроме того, значения сигналов на входе и выходе могут быть измерены в фиксированные моменты времени и обладают достаточной гладкостью.

Эффективным воплощением данной модели на практике является отрезок ряда (полинома) Вольтерра, с помощью которого можно моделировать практически любую динамическую систему со слабой нелинейностью.

В [117] отмечено, что аналитическое исследование нелинейных систем с помощью конечных отрезков функциональных степенных рядов (полиномов) типа Вольтерра эквивалентно анализу нелинейных систем по экспериментальным данным, когда математическое описание объекта неизвестно. Применение полиномов Вольтерра позволяет успешно решать задачи анализа и моделирования нелинейных динамических систем даже в тех случаях, когда полные динамические характеристики объекта моделирования неизвестны.

1.1.2. Идентификация нелинейных динамических систем с помощью полиномов Вольтерра

Обратимся к проблеме идентификации нелинейной динамики полиномами Вольтерра.

В начале прошлого столетия итальянским математиком Вито Вольтерра было введено [41] понятие интегро-степенного ряда

$$F[x(t)] = K_0 + \int_a^b K_1(t, s)x(s)ds + \int_a^b \int_a^b K_2(t, s_1, s_2)x(s_1)x(s_2)ds_1ds_2 + \quad (1.1)$$

$$+ \int_a^b \int_a^b \int_a^b K_3(t, s_1, s_2, s_3)x(s_1)x(s_2)x(s_3)ds_1ds_2ds_3 + \dots, \quad t \in [a, b],$$

и показано, что если $F[x(t)]$ имеет производную по Фреше любого порядка, то (1.1) есть обобщение формулы Тейлора для функции n независимых переменных. В (1.1) функции $K_n(t, s_1, \dots, s_n)$ непрерывны по всем своим аргументам и симметричны по s_1, \dots, s_n .

Теперь предположим, что независимая переменная $t \in [a, b]$ имеет физический смысл времени, $x(t)$ – скалярный входной сигнал некоторой динамической системы, а $F[x(t)] = y(t)$ – реакция этой системы на входной сигнал. Тогда $F[x(t)]$ есть оператор (отображение), для которого (1.1) примет вид

$$y(t) = F[x^{(0)}(t)] + \int_a^t K_1(t, s)x(s)ds +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_a^t \int_a^t K_2(t, s_1, s_2) x(s_1) x(s_2) ds_1 ds_2 + \\
& + \int_a^t \int_a^t \int_a^t K_3(t, s_1, s_2, s_3) x(s_1) x(s_2) x(s_3) ds_1 ds_2 ds_3 + \dots = \quad (1.2) \\
& = K_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^t \dots \int_a^t K_n(t, s_1, \dots, s_n) \prod_{k=1}^n x(s_k) ds_k, \quad t \in [a, b].
\end{aligned}$$

Верхний предел t в интегралах (1.2) отражает физическое свойство системы: отклик $y(t)$ в момент времени t зависит от возмущения системы в моменты времени $s \leq t$. В этом случае оператор $F(x(t))$ называется причинным (или вольтерровым) [35], а подынтегральные функции K_n – n -мерные ядра Вольтерра. В дальнейшем под $y(t)$ будем подразумевать не сам выходной сигнал, а его отклонение от начального значения $F[x^{(0)}(t)]$, то есть разность $F[x(t)] - F[x^{(0)}(t)]$. В этом случае в (1.2) будет отсутствовать внеинтегральный член. Если переходные характеристики динамической системы не изменяются со временем, то ядра Вольтерра есть функции от аргументов $t - s_k$, $k = \overline{1, n}$. Тогда слагаемые ряда (1.2) – интегралы свертки, и (1.2) можно переписать в эквивалентной форме

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^t \dots \int_a^t K_n(s_1, \dots, s_n) \prod_{k=1}^n x(t - s_k) ds_k, \quad t \in [a, b]. \quad (1.3)$$

Ядра Вольтерра, входящие в (1.3), естественно считать переходными характеристиками, учитывающими динамические нелинейности системы с одним входом и одним выходом. В этом случае (1.3) является математической моделью вида «вход-выход» для нелинейной динамической системы.

Моделирование различных нелинейных динамических объектов с помощью полиномов Вольтерра основывается на теореме Фреше [150], которая является континуальным аналогом теоремы Вейерштрасса об аппроксимации непрерывной функции многочленами.

Как следует из теоремы Фреше, в случае непрерывной зависимости выходного сигнала $y(t)$ от входного сигнала $x(t)$, модель типа «вход-выход», соответствующая конкретной физически реализуемой динамической системе,

однозначно определяется набором ядер K_i , $i = 1, 2, \dots$. Способ нахождения K_i с помощью обработки массива входных данных и откликов на них (выходных сигналов) называется идентификацией системы.

Перепишем (1.3), заменив знак ∞ на N , обозначающий количество слагаемых полинома, и положим $a = 0$, $b = T$:

$$y(t) = \sum_{n=1}^N \int_0^t \dots \int_0^t K_n(s_1, \dots, s_n) \prod_{k=1}^n x(t - s_k) ds_k, \quad t \in [0, T]. \quad (1.4)$$

Построение модели нелинейной динамики в виде полинома Вольтерра требует решения задач структурной (определения необходимого числа членов (1.4)) и непараметрической (оценивание ядер Вольтерра соответствующих порядков) идентификации. Обычно ограничиваются значениями $N = 2, 3$. Это связано с существенно возрастающей вычислительной сложностью определения каждого последующего слагаемого полинома (1.4). В то же время ограничение двумя-тремя слагаемыми с целью получить приемлемую точность моделирования возможно, как правило, лишь в случае слабой нелинейности. Как следствие, это налагает условия на величину амплитуды входных сигналов системы. Если же возмущения относительно велики, то приемлемую с практической точки зрения точность может обеспечить лишь целый ансамбль моделей, обслуживающих определенный диапазон изменения входных сигналов. Таким образом, оценка эффективности применения полиномов Вольтерра зависит от оценки возможности быстрого и надежного определения первых двух-трех слагаемых (1.4). Поэтому можно сказать, что данная работа посвящена проблеме непараметрической идентификации характеристик динамических процессов и систем.

Систематический подход к моделированию нелинейных динамических систем при помощи явного описания зависимости между входом и выходом впервые осуществил Норберт Винер [183]. Он разработал эффективные алгоритмы идентификации в случае, когда входной сигнал представим в виде гауссовского белого шума. Исследования Винера, суммированные в [40], были продолжены в работах Синглтона [178], Бозе [135], Чеслера [141] и других (см. [147]). В монографиях [32; 53] подробно рассмотрены методы построения моделей Гаммерштейна, Винера, Винера-Гаммерштейна.

В работе [151] было обобщено преобразование Фурье на многомерный случай. Это дало возможность исследователям выполнять операции над ядрами в частотной области. Автором [125; 126] была предложена дискретная форма ряда Вольтерра и введено дискретное преобразование Лапласа для ядер. Практическому применению рядов Вольтерра с последующим применением преобразования Лапласа или Фурье посвящены работы [66; 119].

Полиномы Вольтерра находят свое применение во многих областях естествознания. Можно выделить основные направления исследований, где используются полиномы Вольтерра: при моделировании технических (электро- и теплофизических) систем [29; 37; 44–46; 78; 88; 98; 180; 181], в радиотехнике [71] в гидромеханике [3], в медицине [121], при описании адаптивных систем автоматического управления [1; 120], развивающихся (биологических, экологических, экономических и т.д.) [67; 123], стохастических [77] систем, систем телекоммуникаций [160], а также задачах фильтрации и распознавания образов [152].

Отдельно отметим монографии [81; 145; 167; 173], касающиеся проблем идентификации с помощью моделей Вольтерра, в которых приведена обширная библиография. Большому списку вопросов, касающихся различных аспектов теории и практики работы с интегральными уравнениями Вольтерра I рода, с проблемой идентификации полиномиальных моделей Вольтерра, а также об интегральных моделях в анализе и прогнозировании временных рядов, посвящена работа [83].

Наиболее распространенная методика идентификации основана на входных сигналах импульсного типа [37; 46; 175]. Так, в [175] была предложена модель экспериментального определения ядер как реакции системы на совокупность δ -функций. Позже в работе [46] предлагается в качестве входных сигналов для идентификации $K_i(s_1, \dots, s_i)$ использовать семейство

$$x_{\omega_1, \dots, \omega_{i-1}}(t) = \sum_{k=0}^{i-1} \delta(t - \omega_k),$$

где $\delta(t)$ есть δ -функция Дирака. Дискретный аналог подобного подхода предложен в [37].

В то же время практическое использование таких сигналов не реалистич-

но и во многих случаях проблематично с физической точки зрения. Объяснение этому дано в монографии [65]: „Эта простая идея и составляет суть анализа импульсной реакции. Ее основной недостаток заключается в том, что многие физические процессы не допускают импульсных входов... Более того, при таком входе система может проявить нелинейные эффекты, нарушающие линеаризованное поведение, положенное в основу модели.“

Таким образом, методика идентификации полиномов Вольтерра с помощью импульсных входов имеет достаточно большие недостатки. В то же время недостатком подхода, использующего тестовые входные сигналы в виде белого шума, является его чрезвычайная трудоемкость. Поэтому в оценке перспективности данного аппарата, с самого его появления, существует определенная разнобой. Так, еще в начале 80-х годов в монографиях [46; 47] этот аппарат признается как весьма перспективный и заслуживающий внимания. В то же время в [78] на конкретном примере отстаивается точка зрения о его неконкурентоспособности в сравнении с подходом, предлагаемым авторами [78]. Дополнительно стоит отметить, что подход к моделированию динамики нелинейных систем с помощью полиномов Вольтерра объективно уступает более специализированным методам построения тех или иных физических моделей, основанных на известных физических законах.

Проблеме идентификации нелинейной динамики в виде полинома Вольтерра посвящена серия работ под руководством д.т.н. В.Д. Павленко. В работах [73] и [74] авторы предлагают метод детерминированной идентификации нелинейных динамических систем в виде рядов Вольтерра. Этот метод основан на задании специального вида тестовых входных сигналов, представимых в виде нерегулярных последовательностей импульсов с заданной длительностью и амплитудой. Разделение суммарного отклика динамической системы на составляющие, в терминологии Павленко – парциальные составляющие, производится с помощью n -кратного дифференцирования откликов системы по специальному параметру-амплитуде тестового полиимпульсного сигнала. Для повышения помехоустойчивости вычислительного алгоритма идентификации и сглаживания полученных результатов авторы применяют вейвлет-фильтрацию. Точность и помехоустойчивость предлагаемого алгоритма исследуется в [73]. В работе [121] коллектив авторов использует полином Воль-

терра для задачи моделирования глазо-двигательного аппарата человека, который обладает рядом нелинейных свойств.

Работа [43], посвященная идентификации сложной технической системы, представимой в виде набора более простых, но разнотипных подсистем, тоже использует модель типа "вход-выход", в основе которой лежит использование полинома Вольтерра первой степени. Из-за сложности подобных технических систем невозможно построить детальную модель, адекватно описывающую работу всей системы. Авторами был проделан обширный физический эксперимент с разными режимами работы, подтвердивший гипотезу о линейности и стационарности как системы в целом, так и каждой подсистемы. Поэтому в качестве модели для описания динамики такой системы было взято интегральное уравнение Вольтерра I рода. Подобная задача непараметрической идентификации является некорректной, поскольку является неустойчивой к погрешностям (ошибкам измерения) исходных данных и требует устойчивых методов решения. Авторами эта задача успешно решена с помощью кубических сплайнов.

При этом уже в начале 90-х А.С. Апарциным была предложена методика, впервые появившаяся в [17; 128], основанная на введении определенного семейства тестовых входных сигналов, которое позволяет свести исходную задачу идентификации функций n -переменных (ядер Вольтерра) к задаче решения n -мерных интегральных уравнений Вольтерра I рода, которые имеют явные формулы обращения. Она была разработана А.С. Апарциным и детально описана в [15; 30].

Для иллюстрации этой методики обратимся к линейному интегральному уравнению (в (1.4) $N = 1$), позволяющему в простейшем случае отследить основные моменты задачи идентификации:

$$\int_0^t x(t-s)K_1(s)ds = y(t), \quad t \in [0, T]. \quad (1.5)$$

При заданной паре $(x(t), y(t))$ уравнение (1.5) есть линейное интегральное уравнение типа свертки относительно искомой переходной характеристики $K_1(t)$. В свою очередь, (1.5) является частным случаем стандартного

линейного интегрального уравнения Вольтерра I рода:

$$V\psi \equiv \int_0^t K(t,s)\psi(s)ds = y(t), \quad t \in [0, T]. \quad (1.6)$$

Для (1.6) известно [58], что если

$$K'_t(t,s) \in C_\Delta, \Delta = \{t, s/0 \leq s \leq t \leq T\}, \quad K(t,t) \neq 0 \quad \forall t \in [0, T] \quad (1.7)$$

и

$$y'(t) \in C_{[0,T]}, \quad y(0) = 0, \quad (1.8)$$

то оператор V , рассматриваемый действующим из $C_{[0,T]}$ в $\overset{\circ}{C}_{[0,T]}^{(1)} = \{y(t)/y(t) \in C_{[0,T]}^{(1)}, y(0) = 0\}$, имеет ограниченный обратный и, следовательно, (1.6) корректно поставлена по Адамару на паре $(C, \overset{\circ}{C}_{[0,T]}^{(1)})$. А это, в свою очередь, гарантирует существование, единственность и устойчивость решения (1.6) в пространстве непрерывных функций $C_{[0,T]}$. Определение корректности по Адамару приведено в методическом параграфе 1.1.3.

Следовательно, в линейном случае для однозначного восстановления $K_1(t)$ достаточно знать реакцию системы на произвольное возмущающее воздействие, то есть знать пару $(x(t), y(t))$, удовлетворяющую условиям корректности (1.7), (1.8). Однако, если система допускает активный эксперимент, то, задавая специальную форму входного сигнала, можно получить решение (1.5) в явном виде. Например, для этого можно использовать δ -функцию Дирака в качестве входного сигнала (см. [46]). Другой способ заключается в использовании функции Хевисайда

$$e(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0, \end{cases} \quad (1.9)$$

связанной с δ -функцией соотношением $e'(t) = \delta(t)$.

Пусть теперь входной сигнал $x(t) = e(t)$, а $y(t)$ есть отклик системы на входной сигнал $x(t)$. Дифференцируя (1.5) с заменой $x(t)$ на $e(t)$, имеем

$$y'(t) = e(0)K_1(t) + \int_0^t e'_t(t-s)K_1(s)ds = \int_0^t \delta(t-s)K_1(s)ds = K_1(t),$$

$$K_1(t) = y'(t), \quad t \in [0, T]. \quad (1.10)$$

Очевидно, что (1.10) является формулой обращения для интегрального уравнения

$$\int_0^t K_1(s)ds = y(t), \quad t \in [0, T], \quad (1.11)$$

в которое переходит (1.5), если учесть (1.9).

Теперь кратко остановимся на проблеме идентификации нелинейных динамических систем функциональными рядами Вольтерра (1.4). В этом случае задача идентификации состоит в нахождении многомерных ядер Вольтерра. Пусть известна функция $f_n(t)$:

$$f_n(t) = \int_0^t \cdots \int_0^t K_n(s_1, \dots, s_n) \prod_{k=1}^n x(t - s_k) ds_k, \quad t \in [0, T], \quad (1.12)$$

такая, что

$$y(t) = \sum_{n=1}^N f_n(t), \quad t \in [0, T]. \quad (1.13)$$

Формула (1.12) отражает вклад n -го слагаемого в отклик $y(t)$ для заданного тестового входного возмущения $x(t)$. Требуется определить n -мерную подынтегральную функцию $K_n(s_1, \dots, s_n)$.

Очевидно, что в случае $N = 1$ и $y(t) = f_1(t)$ мы получаем линейную модель (1.5), идентификация которой может проводиться по вышеуказанному алгоритму.

Рассмотрим случаи $N = 2, 3$. В отличие от линейного случая, когда для нахождения ядра $K_1(s)$ достаточно было задать единственную пару $(x(t), y(t))$, в нелинейном случае, даже если ограничиться квадратичной моделью ($N = 2$ в (1.13)), то для однозначной идентификации двумерного континуума значений $K_2(s_1, s_2)$ необходимо задание двумерного же континуума числовых равенств. А в случае идентификации n -мерного континуума неизвестных необходим n -мерный же континуум числовых уравнений. Поэтому для однозначного восстановления ядер (1.12) требуются отклики на $(n - 1)$ -параметрическое семейство входных тестовых возмущений $x_{\omega_1, \dots, \omega_{n-1}}(t)$, в которых $\omega_1, \dots, \omega_{n-1} \in [0, T]$. По аналогии с линейным случаем воспользуемся функцией Хевисайда и зададим семейство тестовых возмущений в следую-

щем виде:

$$x_{\omega_1, \dots, \omega_{n-1}}(t) = e(t) + 2 \sum_{k=1}^{n-2} (-1)^k e \left(t - \sum_{i=1}^k \omega_i \right) + (-1)^{n-1} e \left(t - \sum_{i=1}^{n-1} \omega_i \right), \quad (1.14)$$

где $t, \omega_i \in [0, T]$, $i = \overline{1, n-1}$, $n \geq 2$.

Для случаев $n = 2, 3$ графики сигнала (1.14) представлены на Рисунке П.1.1, которые приведены в приложении А.

В препринте [30] показано, что в случае скалярного входного возмущения задача идентификации n -мерных ядер K_n , симметричных по всем переменным, с помощью $(n-1)$ -параметрического семейства тестовых сигналов (1.14) сводится к решению линейных n -мерных интегральных уравнений Вольтерра I рода с двумя переменными пределами интегрирования

$$V^{(n)} K_n \equiv \sum_{i_1 + \dots + i_{n-1} = n} (-1)^{\sum_{k=1}^{[n/2]} i_{2k}} \frac{n!}{i_1! \dots i_{n-1}!} V_{i_1, \dots, i_{n-1}} K_n = f_n, \quad n \geq 2. \quad (1.15)$$

Многомерные линейные уравнения (1.15) имеют явные формулы обращения (см. [30]). Символ [...] (антье) в верхнем пределе суммы из (1.15) обозначает целую часть $\frac{n-1}{2}$.

$$f_n \equiv f_{i_1, \dots, i_n}(t, \omega_1, \dots, \omega_n),$$

$$\begin{aligned} & V_{i_1, \dots, i_{n-1}} K_n = \\ & = \underbrace{\int_{t-\omega_1}^t \dots \int_{t-\omega_1}^t}_{i_1} \dots \underbrace{\int_{t-\omega_1-\dots-\omega_{n-1}}^{t-\omega_1-\dots-\omega_{n-2}} \dots \int_{t-\omega_1-\dots-\omega_{n-1}}^{t-\omega_1-\dots-\omega_{n-2}}}_{i_{n-1}} K_n(s_1, \dots, s_n) ds_1, \dots, ds_n, \end{aligned}$$

$$t, \omega_1, \dots, \omega_{n-1} \in \Delta_n = \{t, \omega_1, \dots, \omega_{n-1} / 0 \leq t \leq T; \omega_k \geq 0\}.$$

Приведем некоторые формулы обращения. Наиболее распространены на практике значения $n = 2, 3$. Для $n = 2$

$$V^{(2)} K_2 \equiv \int_{t-\omega_1}^t \int_{t-\omega_1}^t K_2(s_1, s_2) ds_1 ds_2 = f_2(t, \omega_1), \quad (1.16)$$

$$t, \omega \in \Delta_2 = \{t, \omega_1 / 0 \leq \omega_1 \leq t \leq T\},$$

а формула обращения имеет вид

$$K_2(t, t - \omega_1) = \frac{f''_{2t\omega_1} + f''_{2\omega_1^2}}{2} \quad \forall t, \omega_1 \in \Delta_2. \quad (1.17)$$

Так как ядро K_2 в (1.16) есть симметричная функция всех своих аргументов, то (1.17) определяет $K_2(s_1, s_2)$ при любых $s_1, s_2 \in [0, T]$.

При $n = 3$ (1.15) дает

$$V^{(3)}K_3 \equiv (V_{30} - 3V_{21} + 3V_{12} - V_{03})K_3 = f_3(t, \omega_1, \omega_2), \quad (1.18)$$

где

$$\begin{aligned} V_{30}K_3 &= \int_{t-\omega_1}^t \int_{t-\omega_1}^t \int_{t-\omega_1}^t K_3(s_1, s_2, s_3) ds_1 ds_2 ds_3; \\ V_{21}K_3 &= \int_{t-\omega_1}^t \int_{t-\omega_1}^t \int_{t-\omega_1-\omega_2}^{t-\omega_1} K_3(s_1, s_2, s_3) ds_1 ds_2 ds_3; \\ V_{12}K_3 &= \int_{t-\omega_1}^t \int_{t-\omega_1-\omega_2}^{t-\omega_1} \int_{t-\omega_1-\omega_2}^{t-\omega_1} K_3(s_1, s_2, s_3) ds_1 ds_2 ds_3; \\ V_{03}K_3 &= \int_{t-\omega_1-\omega_2}^{t-\omega_1} \int_{t-\omega_1-\omega_2}^{t-\omega_1} \int_{t-\omega_1-\omega_2}^{t-\omega_1} K_3(s_1, s_2, s_3) ds_1 ds_2 ds_3; \\ &t, \omega_1, \omega_2 \in \Delta_3 = \{t, \omega_1, \omega_2 / 0 \leq \omega_1 + \omega_2 \leq t \leq T\}. \end{aligned}$$

В свою очередь решение (1.18) определяется формулой

$$\begin{aligned} K_3(t, t - \omega_1, t - \omega_1 - \omega_2) &= \frac{f'''_{3t\omega_1^2} - f'''_{3t\omega_1\omega_2} + f'''_{3\omega_1\omega_2^2} - f'''_{3\omega_1^2\omega_2}}{2}, \\ &\forall t, \omega_1, \omega_2 \in \Delta_3, \end{aligned} \quad (1.19)$$

причем в силу симметрии K_3 (1.19) определяет $K_3(s_1, s_2, s_3)$ всюду в трехмерном кубе $0 \leq s_1, s_2, s_3 \leq T$.

Справедливость формул (1.17) и (1.19) проиллюстрирована на примерах, приведенных в [30]. Существование и единственность решения для (1.16) и (1.18) обеспечивают теоремы А.С. Апарцина, которые можно найти в приложении Б.

Результаты, представленные в этом параграфе, опирались на первостепенное свойство симметрии ядер Вольтерра по всем аргументам. Этот факт является следствием скалярности входного сигнала.

Приведенные формулы обращения для квадратичного случая были успешно применены к моделированию переходного процесса теплообменного аппарата и ветроэнергетической установки в работах [86; 87; 93; 180; 181]. Вопрос применимости формулы обращения в кубичном случае рассматривался в работе [82].

Отметим, что, вообще говоря, задача идентификации, описанная выше, относится к типичным обратным задачам и является, как правило, некорректно поставленной, требующей применения трудоемких методов и алгоритмов регуляризации для получения устойчивых приближенных решений. Однако спецификой рассмотренных в диссертации интегральных уравнений Вольтерра I рода является их слабая некорректность, позволяющая получать устойчивое численное решение за счет согласования шага дискретизации (параметра саморегуляризации) с уровнем погрешности исходных данных в равномерной метрике.

Для лучшего понимания специфики слабо неустойчивых задач перейдем к следующему параграфу.

1.1.3. Слабо неустойчивые задачи прикладной математики

В начале прошлого века Адамаром введено понятие корректности задачи математической физики. Следуя [118], назовем задачу прикладной математики корректно поставленной на паре метрических пространств (X, Y) , если

- 1) ее решение x из пространства X существует для всякого элемента y из пространства исходных данных Y ;
- 2) это решение единственно;
- 3) задача устойчива на паре (X, Y) .

Условие 3) означает, что бесконечно малым (в метрике Y) погрешностям исходных данных соответствуют бесконечно малые (в метрике X) погрешности

решения.

Если хотя бы одно из этих трех условий не выполняется, задача математической физики (прикладной математики) является некорректной на паре (X, Y) . Важно подчеркнуть, что задача, неустойчивая на данной паре, может оказаться устойчивой на другой.

Оказалось, что широкий класс обратных задач (задач, связанных с обращением причинно-следственной связи, когда по известным симптомам, следствиям нужно найти причину) являются некорректными. Упомянутые во введении обратные задачи также укладываются в эту трактовку, так как решение задачи является следствием задания всех элементов, входящих в ее постановку, поэтому поиск неизвестных элементов модели по некоторой дополнительной информации об искомом решении – типичная обратная задача.

Отсутствие устойчивости данной задачи делает невозможным нахождение ее приближенного решения по исходным данным, на практике неизбежно отягощенным погрешностями. В этом случае приходится применять специальные методы (методы регуляризации некорректных задач), разработанные отечественными математиками А.Н. Тихоновым, В.К. Ивановым, М.М. Лаврентьевым и их школами, в основе которых – переход от данной задачи к семейству корректных задач, зависящих от вспомогательного параметра регуляризации.

Вместе с тем, степень неустойчивости может быть различной – сильной или слабой, катастрофичной и не очень. Математически строгое определение степени неустойчивости некорректной задачи, основанное на ее сопоставлении с задачей дифференцирования, дано в [8]. Если задача вычисления производной от функции, непрерывно дифференцируемой на отрезке $[0, T]$, рассматривается на паре $(C, C^{(1)})$, то норма (линейного) оператора дифференцирования D равна единице, а из ограниченности линейного оператора следует его непрерывность, а значит, и устойчивость решения к погрешностям задания функции, измеряемым в норме $C^{(1)}$. Однако норма оператора D на паре (C, C) равна бесконечности, и на этой паре задача дифференцирования неустойчива.

Задача однократного дифференцирования эквивалентна задаче решения интегрального уравнения Вольтерра I рода с единичным ядром, поскольку в

силу формулы Лейбница–Ньютона вычисления определенного интеграла

$$\int_0^t y'(s)ds = y(t) - y(0), \quad t \in [0, T],$$

поэтому интегральное уравнение

$$\int_0^t x(s)ds = y(t) - y(0), \quad t \in [0, T], \quad (1.20)$$

также корректно на паре $(C, C^{(1)})$ и некорректно на паре (C, C) .

Так как по определению

$$y'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t},$$

то, вводя на отрезке $[0, T]$ равномерные сетки узлов с шагом $h = \frac{T}{n}$, $t_i = ih$, $i = \overline{0, n}$ и $t_{i-1/2} = (i - 1/2)h$, $i = \overline{1, n}$, имеем три формулы численного дифференцирования:

$$y'(t_i) \approx \frac{\Delta y_i}{h} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{y(t_{i+1}) - y(t_i)}{h}, \quad i = \overline{0, n-1}; \quad (1.21)$$

$$y'(t_{i+1}) \approx \frac{\Delta y_i}{h}, \quad i = \overline{0, n-1}; \quad (1.22)$$

$$y'(t_{i+1/2}) \approx \frac{\Delta y_i}{h}, \quad i = \overline{0, n-1}. \quad (1.23)$$

Если для численного решения (1.20) применить квадратурные формулы правых, левых и средних прямоугольников, то соответствующие треугольные СЛАУ имеют вид

$$h \sum_{j=1}^i x_j = y_i - y_0, \quad i = \overline{1, n}; \quad (1.24)$$

$$h \sum_{j=0}^{i-1} x_j = y_i - y_0, \quad i = \overline{1, n}; \quad (1.25)$$

$$h \sum_{j=1}^i x_{j-1/2} = y_i - y_0, \quad i = \overline{1, n}; \quad (1.26)$$

а вычитание соседних строк СЛАУ (1.24)–(1.26) показывает, что методы квадратур (1.24), (1.25), (1.26) эквивалентны методу разделенных разностей «вперед» ((1.21)), «назад» ((1.22)) и «центральных» ((1.23)) соответственно.

Пусть C_h – пространство сеточных функций $y_h = y(t_i)$, $i = \overline{0, n}$, с нормой

$$\|y_h\|_{C_h} = \max_{0 \leq i \leq n} |y(t_i)|. \quad (1.27)$$

Введем оператор «сеточного» дифференцирования

$$D_h y_h = \left\{ \frac{\Delta y_i}{h} \right\}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Тогда в силу (1.21)

$$\|D_h\|_{C_h \rightarrow C_h} = \max_{\|y_h\|_{C_h} \leq 1} \|D_h y_h\|_{C_h} = \frac{2}{h} = \frac{2}{T} n, \quad (1.28)$$

а значит, при $n \rightarrow \infty$ ($h \rightarrow 0$) $\|D_h\|_{C_h \rightarrow C_h} \rightarrow \infty$ со скоростью $O(n)$. Если вместо функции $y(t)$ задана функция $\tilde{y}(t)$ такая, что

$$\|y(t) - \tilde{y}(t)\|_{C_{[0, T]}} = \max_{0 \leq t \leq T} |y(t) - \tilde{y}(t)| \leq \delta,$$

то в силу линейности оператора D_h оценка разности между их сеточными производными имеет вид

$$\|D_h y_h - D_h \tilde{y}_h\|_{C_h} = \|D_h(y_h - \tilde{y})\|_{C_h} \leq \frac{2}{T} n \delta, \quad (1.29)$$

а правая часть (1.29) показывает, что норма в C_h этой разности (или, что то же, оценка устойчивости сеточного решения) может при $h \rightarrow 0$ стремиться к ∞ как первая степень n , сколь бы ни было мало δ .

Если рассмотреть задачу вычисления производной k -го порядка, корректную на паре $(C, C^{(k)})$ и некорректную на паре $(C, C^{(l)})$, $l \leq k$, то аналогично предыдущему нетрудно установить, что

$$\|D_h^{(k)}\|_{C_h \rightarrow C_h} = \left(\frac{2}{T}\right)^k n^k,$$

где

$$D_h^{(k)} = \left\{ \frac{\Delta^{(k)} y_i}{h^k}, i = \overline{0, n-k} \right\}; \quad \Delta^{(k)} = \Delta(\Delta^{(k-1)} y_i).$$

Задача k -кратного дифференцирования эквивалентна интегральному уравнению Вольтерра I рода

$$\int_0^t \frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!} x(s) ds = y(t), \quad y^{(l)}(0) = 0, \quad l = \overline{0, k-1}, \quad t \in [0, T], \quad (1.30)$$

поэтому устойчивость численного решения (1.30), полученного квадратурами правых, левых и средних прямоугольников, также характеризуется оценкой $O(n^k)$.

В соответствии с [8] отнесем к слабо неустойчивым такие некорректные задачи, для которых погрешность исходных данных приводит к не более чем степенному росту погрешности конечномерной аппроксимации решения, при этом показатель степени k дает естественное упорядочение слабо некорректных задач – неустойчивость тем сильнее, чем больше величина k .

Согласование шага сетки с величиной δ дает устойчивый численный метод (метод регуляризации слабо некорректных задач), в котором шаг сетки является параметром регуляризации.

В уравнении (1.30) ядро $K(t - s)$ обращается в ноль вместе со своими производными до порядка $k - 1$ включительно при $s = t$, а $K^{(k)}(0) = 1 \neq 0$. Если же в уравнении (1.5) $K^{(p)}(0) = 0$, $p = 0, 1, 2, \dots$, то неустойчивость (1.5) имеет характер неустойчивости задачи дифференцирования сколь угодно высокого порядка, а рост погрешности численного решения является экспоненциальным – порядка $O(n^n)$. К таким задачам, которые естественно назвать сильно некорректными (сильно неустойчивыми), относится обратная задача теплопроводности (ОЗТ), когда по известному (измеряемому) распределению температуры в некоторый момент времени T требуется определить начальное распределение в момент $t_0 < T$ или граничная ОЗТ (по измеряемой температуре в некоторой точке стержня требуется определить температуру на нагреваемой границе стержня) [50; 122].

Еще раз отметим, что рассматриваемая в диссертации задача относится, согласно приведенной классификации, к слабо некорректным. Так, задача идентификации ядер Вольтерра K_1 , K_2 , K_3 по откликам моделируемой нелинейной динамической системы на специальные семейства тестовых входных сигналов сводится к решению одно-, двух- и трехмерных интегральных уравнений Вольтерра I рода, неустойчивость которых аналогична неустойчивости одно-, двух- или трехкратного дифференцирования. Предлагаемая в диссертации замена идентификации ядер (см. главу 3) на идентификацию интегралов от них, достаточную для целей моделирования откликов системы, позволяет вообще обойти проблему (слабой) неустойчивости, хотя проблема

адекватности модели, связанная с согласованием степени полинома Вольтерра с амплитудами входных сигналов, остается.

Второй блок задач, рассматриваемых в диссертации, связан с применением преобразования Гильберта–Хуанга для анализа временных рядов, описывающих реальные процессы и объекты в энергетике. Как и в случае любого другого метода, выбор «разумного» числа n базисных функций, являющегося параметром регуляризации, является центральным и может быть сделан с максимальным использованием специфики реального процесса.

Следующий параграф посвящен базовым определениям, касающимся задачи анализа временных рядов, и обзору применения преобразования Гильберта–Хуанга для таких задач.

1.2. Задача анализа временных рядов. Преобразование Гильберта–Хуанга

В настоящее время для изучения свойств сложных систем, в том числе и при экспериментальных исследованиях, широко используется подход, основанный на анализе сигналов, произведенных системой. Такой подход приобретает особую актуальность, когда математически описать исследуемый объект практически невозможно, но при этом имеется некоторая характерная величина. Такая величина как правило представлена в виде некоторого временного ряда, значения которого зарегистрированы непрерывно или через некоторые одинаковые промежутки времени.

Согласно [64] временным рядом x_i , $i = \overline{1, n}$ называется массив из n чисел, представляющих собой значения некоторой измеренной динамической переменной $x(t)$ с постоянным шагом θ по времени, $t_i = t_0 + (i - 1)\theta$, $x_i = x(t_i)$, $i = \overline{1, n}$.

В анализе временных рядов выделяются основные задачи: задача идентификации и задача прогноза. Задача идентификации при анализе временного ряда предполагает ответ на вопрос, каковы параметры системы, породившие данный временной ряд. Задача прогноза имеет целью по данным наблюдений предсказать будущие значения измеряемых параметров и характеристик изу-

чаемого объекта. В диссертационной работе будет рассмотрена только задача идентификации параметров системы, а основным инструментом при исследовании того или иного временного ряда будет предложенный в конце прошлого столетия Норбертом Хуангом метод для анализа нестационарных и нелинейных временных рядов.

В пионерских работах [158; 164] Хуангом был предложен принципиально иной подход к разложению $x(t)$, основанный не на априорном выборе базисных функций, а на их адаптивном построении в процессе обработки входной информации. При этом, в отличие от классических методов, для которых признаком останова является погрешность аппроксимации в виде белого шума, построение базисных функций в методе Хуанга, напротив, начинается с самой высокочастотной составляющей, а признаком останова является получение в качестве остатка монотонной функции. На втором этапе осуществляется построение аналитической функции, мнимая компонента которой связана с полученной аппроксимацией исходного вещественного временного ряда интегральным преобразованием Гильберта. Этим объясняется закрепившееся в литературе название ПГХ (преобразование Гильберта–Хуанга). Отметим, что вычисление сингулярного интеграла Гильберта от эмпирической функции является слабо некорректной задачей, а число слагаемых при замене интеграла Коши интегральной суммой является параметром саморегуляризации [70].

Простая и эффективная идея ПГХ позволила найти ему применение в огромном числе различных по своей природе задач. Так, например, в ставшей уже классической статье [158] авторами рассматривается применение ПГХ для анализа волн, производимых ветром в океане. Другим применением ПГХ является использование его для идентификации различных режимов двухфазного перехода газа в твердое состояние [153]. В работе [187] ПГХ используется в качестве метода предобработки данных для опознавания источников беспроводных излучений. Работы [59; 60] посвящены прогнозу временных рядов, описывающих реальные электроэнергетические параметры (цены на электроэнергию или перетоки активной мощности), где в качестве важной предобработки данных тоже используется ПГХ. Интересными представляются возможности ПГХ в задачах выделения тренда и фильтрации шума для нестационарных сигналов. Например, в [162] исследуются измеренные

с помощью РМУ колебания большой объединенной энергетической системы для выявления и устранения шумовых составляющих и трендов. В работах [132; 138; 146] ПГХ применяется в задачах геофизики, медико-биологических исследованиях, в энергетике, обработке изображений и речевых сигналов [4]. Анализ нестационарных сигналов сложной внутренней структуры с помощью ПГХ предложен в [54]. Эффективность ПГХ показана на примере анализа смоделированных и вибрационных сигналов подшипников качения и редуктора вертолета. Необходимо отметить работы французского коллектива авторов [148; 149; 170; 171], посвященные исследованию теории и практическим возможностям ПГХ.

В качестве основного метода идентификации параметров какой-либо системы подход ПГХ используется редко. Несмотря на то, что количество статей, посвященных задаче идентификации с помощью ПГХ, довольно большое, все они, как правило, используют ПГХ в качестве метода для предварительной обработки данных, а не в качестве прямого метода идентификации тех или иных характеристик системы. Причина этого объясняется в обзорной работе Хуанга и Ву [154], где рассматривается вопрос применения ПГХ к задачам нелинейной системной идентификации. Авторами отмечается, что в отличие от традиционного подхода применение методик, подобных ПГХ, к реальным нелинейным динамическим системам практически невозможно из-за серьезной нехватки данных об объекте. Все, что нам может быть доступно, пишут авторы, это только набор данных, описывающих исследуемый феномен. И как правило, невозможно определить, что предшествовало этим данным (что подавалось на вход системе) и даже определяют ли эти данные саму систему. В итоге основной вопрос звучит так: можно ли идентифицировать нелинейные характеристики системы только из имеющихся наблюдаемых данных. А эта задача уже относится к типично некорректным задачам [154]. При этом стоит отметить, что ПГХ на сегодняшний день является практически единственным методом, позволяющим работать с нестационарными и нелинейными сигналами.

Несмотря на то, что обсуждаемый вопрос до сих пор является открытым, некоторые работы, где ПГХ применяется для идентификации нелинейных характеристик некоторого объекта (системы), можно указать [131; 155]. Основ-

ная идея этих работ заключается в исследовании мгновенных частот, полученных из разложения временного ряда, описывающего исследуемый физический процесс. Именно на этой идее, изучении и определении основных частот механизмов, составляющих процесс изменения давления в тепло-физическом эксперименте, основана методика идентификации, предлагаемая в диссертации.

Глава 2. Методы и модели диагностики характеристик теплотехнического оборудования

Предлагаемая в диссертации методика построения полиномов Вольтерра для некоторой динамической системы носит универсальный характер, поэтому предлагается в качестве проверки и тестирования методики рассмотреть три нелинейные динамические системы и соответствующие им три задачи идентификации. Одна из предлагаемых динамических систем представляет собой сугубо математическую модель, а две другие – это реально существующие энергетические объекты, представленные в виде своих достаточно сложных математических моделей. Рассмотрим постановки задач, связанные с энергетическими объектами, более подробно. Задача идентификации для математической "эталонной" динамической системы будет достаточно детально рассмотрена в параграфе 4.1.2 главы 4. Математическое обоснование алгоритмов решения предлагаемых задач будет рассмотрено в главе 3, а численные эксперименты и программные комплексы – в главе 4. В дополнение к задачам, связанным с идентификацией полиномов Вольтерра, в последнем параграфе данной главы рассмотрим задачу идентификации несущих частот автоколебательных пульсаций давления в объеме вскипающей жидкости с помощью ПГХ.

2.1. Задача моделирования динамики давления и температуры для теплотехнического оборудования энергоблока Назаровской ГРЭС мощностью 135 МВт

Задача идентификации параметров математических моделей теплотехнического оборудования широко представлена работами сотрудников ИСЭМ СО РАН. Так, в работах А.М. Клера, А.С. Максимова, Е.Л. Степановой и П.В. Жаркова рассматриваются различные подходы для идентификации параметров математических моделей простых паровых котлов и турбоустановок [56; 57]. Проведены исследования, сосредоточенные на разработке «высо-

коскоростных» математических моделей основного оборудования ТЭС. Приведенная в [56; 57] методика идентификации параметров математических моделей позволяет оценивать реальное состояние теплотехнического оборудования, а также выполнять сложные оптимизационные расчеты режимов работы агрегатов ТЭЦ.

В работах [2; 55] приведена методика идентификации параметров математических моделей существующего теплоэнергетического оборудования в зависимости от его фактического состояния. Основная идея предлагаемой методики заключается в разбивке основной оптимизационной задачи на две более простые задачи, которые будут решаться поэтапно. После прохождения двух этапов идентификации значения настраиваемых коэффициентов фиксируются, а математическая модель считается настроенной на фактическое состояние оборудования, а это, в свою очередь, обеспечивает обоснованность предлагаемых оптимизационных решений. В качестве примера теплоэнергетического оборудования для математической модели был выбран современный энергоблок мощностью 225 МВт, установленный на Харанорской ГРЭС.

Задача идентификации, предлагаемая в диссертационной работе, немного отличается от задачи из [2; 55]. В отличие от идентификации параметров математической модели она посвящена идентификации самой математической модели, представленной в виде полинома Вольтерра. Этот подход детально описан в главе 3. Ниже мы рассмотрим теплотехническое устройство, для которого будем применять описанную в третьей главе методику.

Рассматривается задача моделирования динамики теплотехнических устройств, входящих в энергоблок Назаровской ГРЭС, находящейся в городе Назарово Красноярского края. Техническое оборудование Назаровской ГРЭС состоит из семи энергоблоков, мощность одного из которых составляет 498 МВт, а оставшихся шести – 135 МВт каждый.

Упрощенная схема энергоблока с мощностью, равной 135 МВт, включает в себя следующие объекты (Рисунок 2.1): Д – термический деаэратор, ПЭН – система питательных электронасосов, ППК-1, ППК-2 – прямоточные паровые котлы, ЦВД/ЦСД/ЦНД – цилиндр высокого/среднего/низкого давления, БС – бойлерная система, К – конденсатор, КЭН – система конденсатных электронасосов, группа ПНД/ПВД – подогреватели низкого/высокого давления.

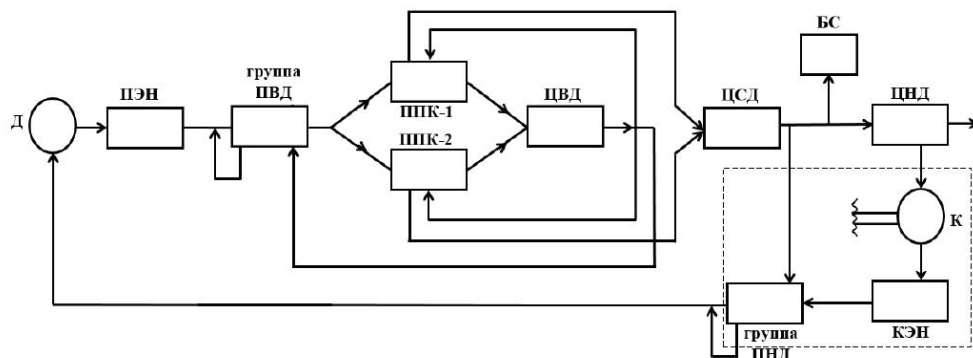


Рисунок 2.1 – Структурная схема теплотехнического оборудования энергоблока

Имитационная модель данного энергоблока была реализована в виде программно-вычислительного комплекса (ПВК) "P150", представляющем развитие модели энергоблока Иркутской ТЭЦ-10 [115]. Математическая модель включает в себя около ста алгебро-дифференциальных и пятисот алгебраических уравнений и замыкающих соотношений.

На Рисунке 2.1 отмечен пунктиром участок, выбранный для исследования нелинейной динамики давления и температуры на выходе из объемных теплообменников, включающий конденсатор К типа 80-КЦС-1 и подогреватель низкого давления ПНД-1 из группы ПНД.

Далее предполагаем, что значения D_{1v} и D_{2v} (расходы пара, поступающие от ЦНД и ЦСД соответственно на конденсатор и ПНД-1) – постоянны. Входным сигналом для данной модели служит расход воды $\Delta D_w(t)$, подающейся на вход конденсатора с начальной температурой $t_0 = 14,5^\circ\text{C}$. При этом $D_{1v} = 51,46$ кг/с и $D_{2v} = 2,03$ кг/с. В качестве выходных сигналов рассматриваются отклонения давления $\Delta p(t)$ и температуры $\Delta t_1(t)$ в конденсаторе, а также отклонение температуры $\Delta t_2(t)$ в ПНД-1 при начальных значениях $p_0 = 4359$ Па, $t_{1_0} = 15,2^\circ\text{C}$, $t_{2_0} = 59,19^\circ\text{C}$, $D_{w_0} = 11562,2$ кг/с.

На Рисунке 2.2 изображена структурная схема рассматриваемого участка. Амплитуды входного сигнала были приняты следующие: $\alpha = 3468,66$ кг/с и $\beta = 2890,55$ кг/с, то есть $\alpha = 30\%D_{w_0}$ и $\beta = 25\%D_{w_0}$ соответственно.

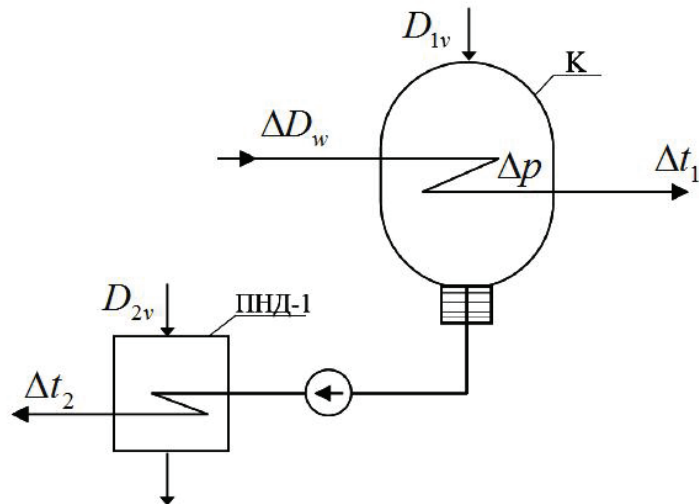


Рисунок 2.2 – Структурная схема участка

2.2. Задача моделирования динамики элемента теплообменного аппарата

Обычно для описания динамических процессов в теплотехническом оборудовании используются дифференциальные уравнения в частных производных с большим числом замыкающих соотношений. Преимуществом такого описания является возможность создавать математические модели, обладающие разной степенью детализации изучаемых процессов. Однако, как уже говорилось в параграфе 1.1, такие модели, как правило, очень сложны и их исследование требует высоких временных и вычислительных возможностей. Вместе с тем, существуют и другие подходы для описания динамических процессов, основанные на интегральной форме представления взаимодействий в теплотехнических участках. Использование интегрального представления в математических моделях упрощает процесс моделирования, позволяет применять эффективные численные алгоритмы, обеспечивающие работу модели в режиме реального времени.

В качестве имитационной динамической системы рассмотрим математи-

ческую модель переходного процесса в элементе теплообменного аппарата с независимым подводом тепла (теплообменнике), предложенную в [116]. Она описывается системой алгебро-дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \Delta D(t) (i_0 - i_{BX}) + D(t) (\Delta i(t) - \Delta i_{BX}(t)) + G_B \frac{d\Delta i(t)}{dt} = \\ = \Delta \alpha(t) H (\theta_0 - t_{1_0}) + \alpha(t) H (\Delta \theta(t) - \Delta t_1(t)), \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\Delta Q(t) - G_{McM} \frac{d\Delta \theta(t)}{dt} = \Delta \alpha(t) H (\theta_0 - t_{1_0}) + \alpha(t) H (\Delta \theta(t) - \Delta t_1(t)), \quad (2.2)$$

$$\Delta i(t) = c_B \Delta t_1(t) + \left(\frac{\partial i(t)}{\partial p} \right)_t \Delta p(t). \quad (2.3)$$

Здесь t – время, с; $D(t)$ – расход вещества, кг/с; $Q(t) = q \cdot l$ – полная тепловая нагрузка (теплоподвод), кВт; $G = g \cdot l$ – полная масса, кг; $H = h \cdot l$ – полная поверхность теплообмена, м²; l – длина рассматриваемого участка, м; i – энтальпия, кДж/кг (термодинамическая функция, зависящая от давления и температуры); $t_1(t)$ и $\theta(t)$ – температура потока вещества, °С, и стенки, К; c – удельная теплоемкость, кДж·К/кг; p – давление, Па; $\alpha(t) = \text{const} \cdot D(t)$ – коэффициент теплоотдачи, кВт·К/м²; Δ – приращение, например, $D(t) = D_0 + \Delta D(t)$, $\alpha(t) = \alpha_0 + \Delta \alpha(t)$; индексами '0' обозначены параметры начального стационарного режима, например, $i_0 = i(\Delta p, \Delta t_1)|_{t=0}$, 'BX' – значение на входе, 'В' – вещество потока, 'М' – материал стенки.

Начальные условия:

$$\Delta i(t)|_{t=0} = 0, \quad \Delta t_1(t)|_{t=0} = 0, \quad \Delta \theta(t)|_{t=0} = 0.$$

Пусть $\Delta i_{BX}(t) = 0$ и $\Delta p(t) = 0$, тогда отклонение энтальпии на выходе $\Delta i(t)$ при произвольных законах возмущений расхода жидкости $\Delta D(t)$ и теплоподвода $\Delta Q(t)$ описывается зависимостью

$$\begin{aligned} y_{et}(t) \equiv \Delta i(t) = \\ = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_2 - \lambda_1)} \int_0^t \left(\Delta Q(\eta) - \frac{Q_0}{D_0} \Delta D(\eta) \right) \left(e^{-\lambda_1 \int_\eta^t (D_0 + \Delta D(\varepsilon)) d\varepsilon} - e^{-\lambda_2 \int_\eta^t (D_0 + \Delta D(\varepsilon)) d\varepsilon} \right) d\eta, \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$t \in [0, T].$$

В (2.4) постоянные λ_1 и λ_2 являются корнями характеристического уравнения для системы (2.1), (2.2).

По условию задачи модель (2.4) имеет два входных сигнала – расход жидкости и теплоподвод – и один выходной – энтальпию. В диссертационной работе построение полинома Вольтерра в векторном случае не рассматривалось, поэтому ограничимся только ссылками на работы, посвященные идентификации полиномов Вольтерра для моделирования нелинейных динамических систем (в том числе и системы (2.4)) с векторным входом [89; 90; 104; 107; 108; 129]. В рамках настоящей диссертационной работы рассмотрим только частный случай (2.4).

Пусть исследуемая эталонная нелинейная динамическая система имеет скалярный входной (в (2.4) $\Delta Q(t) = 0$) и выходной сигналы. Тогда (2.4) переписывается в следующем виде:

$$\Delta i(t) = \frac{Q_0 \lambda_1 \lambda_2}{D_0 (\lambda_2 - \lambda_1)} \int_0^t \Delta D(\eta) \begin{pmatrix} e^{-\lambda_1 \int_{\eta}^t (D_0 + \Delta D(\varepsilon)) d\varepsilon} & - e^{-\lambda_2 \int_{\eta}^t (D_0 + \Delta D(\varepsilon)) d\varepsilon} \end{pmatrix} d\eta, \quad (2.5)$$

$$t \in [0, T].$$

В (2.5) входным сигналом является $\Delta D(t)$, а выходным – $\Delta i(t)$. Начальные значения для проведения расчетов были предоставлены Э.А. Таировым и составили $D_0 = 0,16$ кг/с, $Q_0 = 100$ кВт, $i_0 = 1059$ кДж/кг, что соответствует данным для реального элемента теплообменной установки на ЦКП ВТК ИСЭМ СО РАН.

В качестве входных сигналов будем использовать сигналы ступенчатого скачкообразного вида. На практике такие сигналы достаточно распространены при идентификации объектов теплоэнергетического оборудования [72]. При этом принято считать, что входное возмущение имеет скачкообразный вид, когда нарастание или угасание сигнала по длительности не превосходит 10% от величины T (правой границы исследуемого временного диапазона).

В заключение отметим, что имитационная модель (2.5) важна с методической точки зрения, потому что позволяет оценивать точность численных методов и проводить верификацию численных алгоритмов. В работе [140] выполнено сравнение отклика теплообменного устройства, прямооточного котла

и экономайзера котельного агрегата при нормированном времени (см. Рисунок 2.3). Опираясь на выполненный анализ, можно выделить критерий оценивания точности модели (2.5) в конце переходного периода. То есть результаты, полученные на базе модели (2.5), могут быть использованы при моделировании отклика других технических объектов.

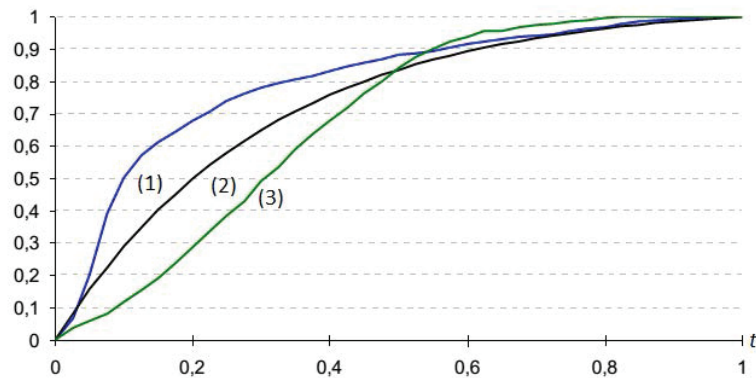


Рисунок 2.3 – Сравнение графиков откликов от различных теплотехнических устройств при нормированном времени. (1) – отклика прямоточного котла, (2) – отклик работы модели (2.5), при $\Delta D(t) = 0,25D_0$, (3) – отклик экономайзера котельного агрегата

2.3. Экспериментальное исследование динамики давления в теплофизических процессах

В настоящее время существует необходимость обеспечения устойчивой и безопасной работы теплообменных устройств различного назначения, которые характеризуются высокими удельными тепловыми нагрузками. Актуальность экспериментальных методов исследования протекающих сложных тепловых и гидродинамических процессов в условиях возникновения кризиса теплоотдачи определяется многообразием возможных сочетаний теплофизических параметров и геометрических факторов. Естественным ограничителем для жидкостных теплоносителей является наступление кризиса теплоотдачи, сопровождаемого, как правило, резко нестационарным нарастанием температуры теплоотдающей поверхности. Одним из важных аспектов изучения развития нестационарных кризисных состояний является определение

динамики давления в объеме вскипающей жидкости. Межфазные превращения, протекающие при условиях охлаждения поверхности, перегретой выше температуры насыщения жидкости, зачастую сопровождаются возникновением импульсов давления различной интенсивности. В случае реализации термоакустического эффекта, возможна генерация автоколебательных пульсаций давления.

Особенности генерации автоколебаний при кипении недогретых жидкостей в трубах рассматриваются в [51]. В работе отмечается малая изученность автоколебательных процессов. Большое внимание уделено автоколебательным процессам в двухфазных потоках в обзоре [174].

В работе [61] изучается автоколебательный режим пульсаций давления и перестройки структуры двухфазного потока при захолаживании вертикального трубчатого нагревателя в кольцевом канале с недогретой жидкостью (этанолом). В результате проведения экспериментов были зафиксированы возникающие автоколебательные пульсации давления. Настройка параметров экспериментального оборудования и само проведение опытов осуществлялось А. А. Левиным и детально описано в [61].

2.4. Постановка цели и задач исследования

Основываясь на специфике технических объектов, описанных в параграфах 2.1 и 2.2, поставим задачу описания их откликов по заданным тестовым сигналам. Так как оба объекта (энергоблок Назаровской ГРЭС и элемент теплообменного аппарата) являются нелинейными и имеют непрерывную зависимость входного возмущения от выходного, применим подход, основанный на использовании полиномов Вольтерра.

Для начала остановимся на задаче моделирования динамики давления и температуры энергоблока Назаровской ГРЭС.

Блок-схема моделируемых динамических систем энергоблока Назаровской ГРЭС (параграф 2.1) со скалярным входом и векторным выходом представлена на Рисунке 2.4. При этом динамические системы с векторным выходом удобнее рассматривать не как одну систему с одним входом и тремя

выходами, а как три независимых системы, где одинаковый входной сигнал и разные выходные сигналы.

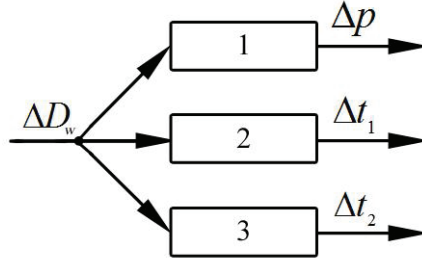


Рисунок 2.4 – Блок-схема модели со скалярным входом и векторным выходом

Согласно блок-схеме (см. Рисунок 2.4), выпишем квадратичный и кубичный полиномы Вольтерра:

$$y_m^{sq}(t) = \int_0^t K_1^{(m)}(s) \Delta x(t-s) ds + \int_0^t \int_0^t K_2^{(m)}(s_1, s_2) \prod_{l=1}^2 \Delta x(t-s_l) ds_l, \quad (2.6)$$

$$y_m^{cub}(t) = \int_0^t K_1^{(m)}(s) \Delta x(t-s) ds + \int_0^t \int_0^t K_2^{(m)}(s_1, s_2) \prod_{l=1}^2 \Delta x(t-s_l) ds_l + \\ + \int_0^t \int_0^t \int_0^t K_3^{(m)}(s_1, s_2, s_3) \prod_{l=1}^3 \Delta x(t-s_l) ds_l, \quad t \in [0, T]. \quad (2.7)$$

В (2.6) и (2.7) входной сигнал $x(t) \equiv D_w(t)$, а различные выходные сигналы $y_I^{mod} \equiv \Delta p(t)$, $y_{II}^{mod} \equiv \Delta t_1(t)$ и $y_{III}^{mod} \equiv \Delta t_2(t)$, $m = I, II, III$, $mod = sq, cub$, порождают три квадратичных и три кубичных модели.

Таким образом, формулы (2.6) и (2.7) определяют квадратичную и кубичную модели энергоблока Назаровской ГРЭС, указанного на Рисунке 2.2, включающего конденсатор и подогреватель низкого давления.

Временной диапазон был определен согласно результатам оценочного тестирования динамических систем с помощью программы "P150" и составил $T = 120$ с. На Рисунках 2.5 и 2.6 видно, что за 120 секунд происходит стабилизация отклика на заданные входные сигналы.

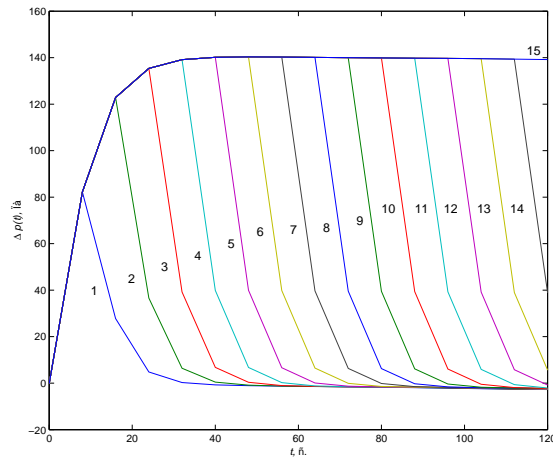


Рисунок 2.5 – Отклики на тестовые возмущения $\Delta D_w(t)$ с амплитудами $30\%D_{w_0}(t)$

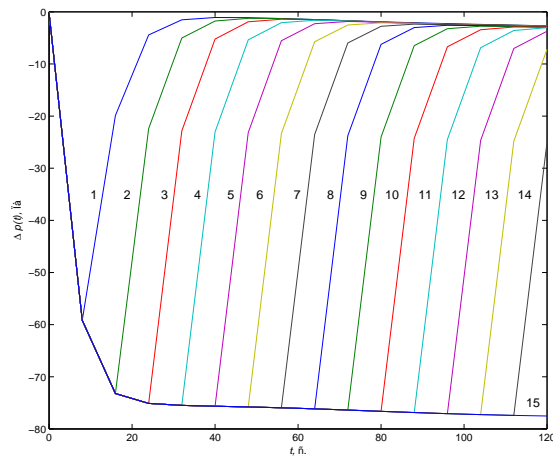


Рисунок 2.6 – Отклики на тестовые возмущения $\Delta D_w(t)$ с амплитудами $-30\%D_{w_0}(t)$

Дополнительно приведем некоторые тестовые воздействия, характерные только для кубичной модели (см. Рисунок 2.7).

На Рисунках приведены графики только для $y_I^{mod} \equiv \Delta p(t)$. Графики для двух других откликов $y_{II}^{mod} \equiv \Delta t_1(t)$ и $y_{III}^{mod} \equiv \Delta t_2(t)$, $mod = sq, cub$ аналогичны приведенным, поэтому опущены.

Шаг для вычисления переходных характеристик был выбран 8 с. Выбор шага обусловлен анализом откликов приведенных на следующих двух Рисунках 2.8 и 2.9.

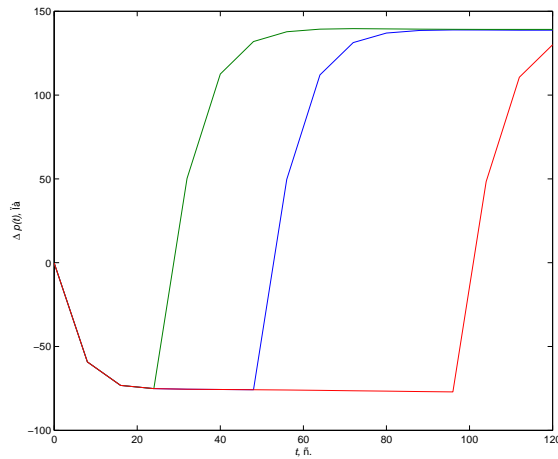


Рисунок 2.7 – Отклики на тестовые возмущения $\Delta D_w(t)$ с меняющейся амплитудой с $-30\%D_{w_0}(t)$ до $30\%D_{w_0}(t)$

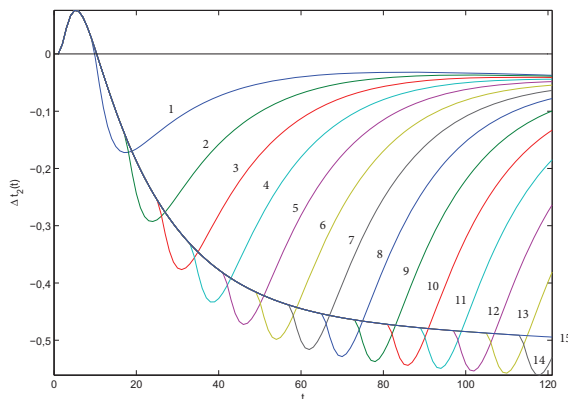


Рисунок 2.8 – Отклики $y_{III}^{sq} \equiv \Delta t_2(t)$ на тестовые возмущения $\Delta D_w(t)$ с амплитудами $30\%D_{w_0}(t)$ с шагом 1 с.

На представленных Рисунках 2.8 и 2.9 изображены отклики $\Delta t_2(t)$ квадратичной модели (2.6) с шагом 1 и 8 с соответственно. Видно, что на Рисунке 2.8 при $h = 1$ на всех откликах, кроме отклика на сигнал с $\omega = t_{15}$, появляются всплески, длящиеся 8 с. Выбор $h = 8$ позволяет этот всплеск практически убрать. Для других откликов выбор шага не требует каких-либо специальных исследований.

На Рисунках 2.5, 2.6, 2.8 и 2.9 иллюстрируются основные отклики при $y_I^{mod} \equiv \Delta p(t)$ и при $y_{III}^{mod} \equiv \Delta t_2(t)$ на тестовые воздействия $\Delta D_w(t)$ с амплитудами $30\%D_{w_0}(t)$ и $-30\%D_{w_0}(t)$, полученные с помощью ПВК "150". Гра-

фики на Рисунках пронумерованы в соответствии с длительностью $\omega = t_i$, $i = \overline{1, 15}$.

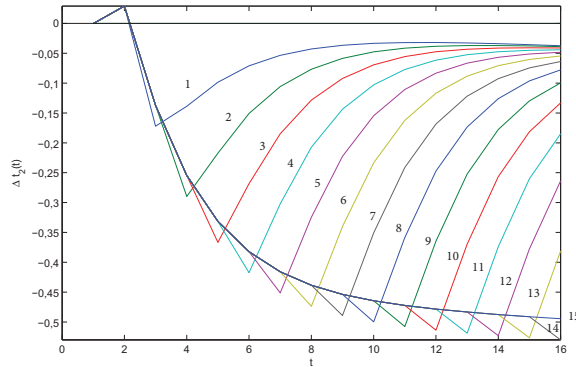


Рисунок 2.9 – Отклики $y_{III}^{sq} \equiv \Delta t_2(t)$ на тестовые возмущения $\Delta D_w(t)$ с амплитудами $30\%D_{w_0}(t)$ с шагом 8 с.

Теперь обратимся к задаче моделирования динамики элемента теплообменного аппарата. Блок-схема для теплообменного аппарата представлена на Рисунке 2.10.

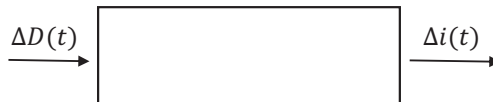


Рисунок 2.10 – Блок-схема модели со скалярным входом и выходом

Для определения длительности интервала $[0, T]$ необходимо провести оценочные эксперименты, подобные экспериментам на модели энергоблока ГРЭС. Обоснование выбора длительности временного интервала $[0, T]$ состоит в исследовании стабилизации $\Delta i(t)$ для фиксированных амплитуд тестовых сигналов. В результате проведенных экспериментов расчеты показали, что ступенчатые изменения расхода воды до 90% от начального значения переводят динамику $\Delta i(t)$ в стабильный режим на заданном конечном интервале.

Проиллюстрируем это для входных возмущений $\Delta D(t) = \varphi D_0$ (кг/с),

где $\varphi = 0,04; 0,08; 0,12$, что соответствует 25%; 50% и 75% от начального значения D_0 . Графики значений $\Delta i(t)$ приведены на Рисунке 2.11 для $t \in [0, T]$.

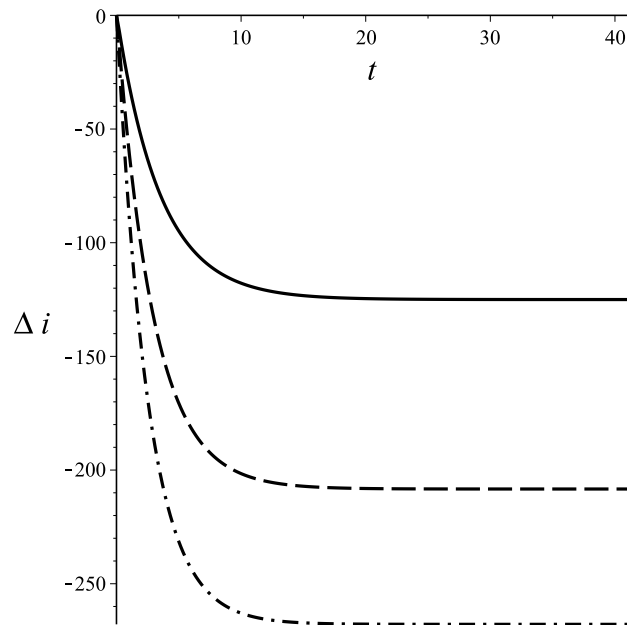


Рисунок 2.11 – Графики изменения энthalпии для фиксированных значений расхода воды

На Рисунке 2.11 сплошная линия соответствует случаю $\Delta D(t) = 0,04D_0$, пунктирная линия – случаю $\Delta D(t) = 0,08D_0$ и пунктирная линия через точку тире – случаю $\Delta D(t) = 0,12D_0$. Расчеты показали, что во всех трех случаях $\Delta i(t)$ стабилизируется с точностью до $\delta = 10^{-1}$ при различных $T_{0,04} = 22, T_{0,08} = 20, T_{0,12} = 18$. В этом случае необходимо выбирать максимальное значение, с которого начинается стабилизация отклика во всех трех случаях, $T \geq 22$ с. При повышении точности до $\delta = 10^{-2}$ стабилизация отклонения энthalпии $\Delta i(t)$ происходит при значении $T \geq 30$ с. Следовательно, длительность переходных процессов охватывает временной диапазон $t \in [0, T]$, где $T \approx 30$ с. Шаг для случая моделирования динамики теплообменного аппарата составляет 1 с.

Пример построения квадратичного и кубического полиномов Вольтерра, где в качестве имитационной модели взята (2.5), приведен в главе 4. Дополнительно, когда переходные характеристики найдены, можно рассмотреть задачу восстановления входного сигнала для имитационной модели (2.5). Такая

задача рассмотрена в параграфе 4.1.6.

И наконец, обратимся к задаче анализа динамики давления в теплофизических экспериментах.

На практике изучение автоколебательных пульсаций давления заключается в изучении временных рядов, полученных в ходе физического эксперимента в ЦКП ВТК ИСЭМ СО РАН. Один из полученных временных рядов представлен на Рисунке 2.12. Такие временные ряды представляют собой нестационарные сигналы, амплитудные и частотные характеристики которых очень быстро меняются. Поэтому для повышения качества анализа таких сигналов необходимо использовать подход, который обладает свойством адаптивности к каждому конкретному сигналу. Применение здесь ПГХ представляется целесообразным.

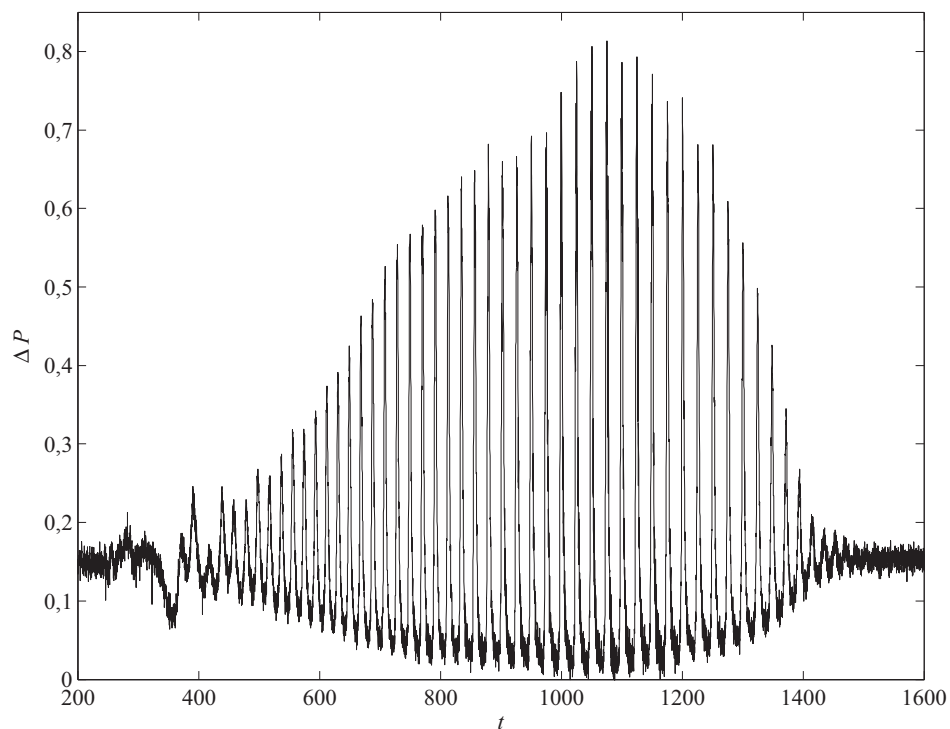


Рисунок 2.12 – Динамика давления в этаноле в условиях импульсного тепловыделения

Однако классическое ПГХ, представленное в [158], не позволяет получить физически обоснованные результаты. В основном это заключается в известной проблеме ПГХ, описанной в [184] и имеющей название "смешивания"

вание мод". Возникновение этой проблемы при анализе исследуемого ряда не позволяет сделать качественную декомпозицию этого ряда, из которой с помощью преобразования Гильберта можно выделить важные несущие частоты, характеризующие автоколебания давления. Поэтому для получения достоверных результатов необходимо привлечение более тонкой техники, которая достаточно детально рассмотрена в главе 3.

Таким образом, в диссертационной работе решаются три задачи идентификации: первые две задачи идентификации связаны с моделями типа "вход-выход", а третья задача требует применения аппарата анализа временных рядов. С помощью полиномов Вольтерра и методики, приведенной в главе 3, для двух теплотехнических устройств строятся математические модели, позволяющие решать задачу моделирования, то есть нахождения отклика моделируемой системы на заданный входной сигнал, и задачу идентификации входного сигнала, когда по заданным переходным характеристикам и откликам восстанавливается входной сигнал. Полученные в ходе решения этих задач математические модели позволяют решать достаточно широкий класс задач, связанных с нахождением откликов или входного сигнала сложных технических устройств. То есть методика является универсальной.

Дополнительно рассмотрена задача идентификации быстропротекающих процессов парообразования с помощью методики, использующей модифицированный ПГХ и приведенной в главе 3. Методика идентификации несущих частот также обладает универсальными качествами в силу того, что основана она на методике ПГХ и может быть использована для решения других задач, представленных временным рядом.

Глава 3. Математические подходы для решения задач идентификации переходных характеристик и сигналов

3.1. Методика построения интегральных моделей на основе идентификации полиномов Вольтерра

3.1.1. Постановка задачи и метод интегрирования произведения

В главе 1 рассмотрен один из получивших признание в научной литературе методов идентификации полиномов Вольтерра, основанный на задании тестового семейства входных сигналов в терминах функции Хевисайда с отклоняющимся аргументом. Использование таких сигналов сводило задачу идентификации к задаче решения линейных многомерных интегральных уравнений Вольтерра I рода с двумя переменными пределами интегрирования относительно искомым ядер. Для существования решения подобных уравнений в классе непрерывных на квадрате симметрических функций необходимо и достаточно выполнение условий теорем 7 и 8 (см. приложение Б). Однако в работе [28] для достаточно простой эталонной математической модели показано, что если условия разрешимости теоремы 8, заданные в терминах амплитуд тестовых сигналов, не выполняются, то модель имеет неудовлетворительные прогностические свойства. А при усложнении эталонной модели оказывается, что выполнение условий теоремы 8 вообще невозможно. В этом случае, чтобы построить кубичную модель, приходится отказываться от разрешимости (1.18) в классе симметричных функций, что может привести к потере физического смысла для ядра K_3 и неадекватности полученных результатов моделирования.

Важно заметить, что для нахождения ядер Вольтерра требуется вычислять различные частные производные от правой части уравнений (1.17) или (1.19), а это уже само по себе является некорректной задачей в случае реальных данных. При этом сама задача моделирования отклика нелинейной динамической системы на произвольное входное возмущение полиномами Воль-

терра, вообще говоря, не требует знания самих ядер $K_i(s_1, \dots, s_i)$, $i = \overline{1, n}$, достаточно вычислить интегралы от них. Таким образом, если исходную задачу идентификации ядер Вольтерра переформулировать в задачу поиска интегралов от этих ядер, то неустойчивых операций численного дифференцирования можно избежать. Особенно это актуально на практике, когда исходные данные зашумлены погрешностями измерений. В этом случае задача идентификации полинома Вольтерра сводится к задаче нахождения интегралов от ядер, при этом вместо решения многомерных интегральных уравнений достаточно решить определенный набор систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

Один из удобных способов реализовать вышеизложенную идею – это применение метода "интегрирования произведения" (ИП). Метод ИП впервые появился в статье А. Янга 1954 года [186]. В своей работе Янг привел численный метод вычисления определенного интеграла, согласно которому при выбранном шаге сетки h в одномерном случае имеем

$$\int_0^{ih} K(s)x(s)ds \approx \sum_{j=1}^i x_{j-\frac{1}{2}} \int_{(j-1)h}^{jh} K(s)ds, \quad (3.1)$$

где $x_{j-\frac{1}{2}} = (j - \frac{1}{2})h$, $t_i = ih$, $i = \overline{1, n}$, $nh = T$.

Особенностью этого метода по сравнению с классическими квадратурными методами (см. [33]) является следующее: когда под знаком интеграла стоит произведение двух функций и одна из них (в случае (3.1) $K(s)$) сильно осциллирующая, метод ИП более эффективен, чем классические квадратурные методы того же порядка. Порядок сходимости ИП-метода, в свою очередь, зависит от того, в какой точке мы вычисляем $x(s)$: в точке i или $i - \frac{1}{2}$, и соответственно равен $O(h)$ и $O(h^2)$ [163].

Применить метод в чистом виде к задаче моделирования удастся, только если в (1.13) симметричное многомерное ядро K_m представимо в виде $K_m(s_1, \dots, s_m) = \phi(s_1) \cdot \dots \cdot \phi(s_m)$, $\phi \in C_{[0, T]}$. С учетом этого факта перепишем (1.13) в следующем виде:

$$y(t) = \sum_{m=1}^N \left(\int_0^t \phi(s)x(t-s)ds \right)^m, \quad t \in [0, T], \quad (3.2)$$

и его сеточный аналог, построенный на базе квадратуры (3.1):

$$y^h(t_i) = \sum_{m=1}^N \left(\sum_{j=1}^i l_j x_{i-j+\frac{1}{2}} \right)^m, \quad i = \overline{1, n}, \quad nh = T, \quad (3.3)$$

где

$$l_j = \int_{(j-1)h}^{jh} \phi(s) ds, \quad j = \overline{1, n}, \quad nh = T. \quad (3.4)$$

Для идентификации всех неизвестных в (3.3) достаточно использовать отклики некоторой эталонной модели на следующие тестовые сигналы:

$$x^{\alpha_k}(t) = \alpha_k e(t), \quad k = 1, 2, 3, \dots, N, \quad \alpha_k = \text{const}. \quad (3.5)$$

Подобного вида тестовые сигналы ранее уже использовались в параграфе 1.1.2 для идентификации линейного полинома Вольтерра (в (1.13) $N = 1$) при $\alpha_k = 1$.

Решение задачи идентификации для полинома (3.3) в случае $N = 2$ и $N = 3$ приведено в [20]. Там же проведены численные эксперименты по моделированию некоторой эталонной модели, которые показали более высокую точность моделирования в сравнении с методикой, изложенной в параграфе 1.1.2. В то же время в замечании [20] указано: „Изложенный подход основан на достаточно обременительном предположении о принадлежности симметричных ядер Вольтерра K_2, K_3 к специальным классам, допускающим применение ИП-аппроксимаций одномерных сверток. Дальнейшее развитие данной методики связано с построением ИП-аппроксимаций многомерных сверток и использованием многопараметрических семейств тестовых сигналов“.

Обобщим метод ИП для случая многомерных сверток:

$$\begin{aligned} & \int_0^{ih} \dots \int_0^{ih} K_m(s_1, \dots, s_m) \prod_{k=1}^m x(ih - s_k) ds_m \approx \\ & \approx \sum_{i_1=1}^i \dots \sum_{i_m=1}^i \left(\prod_{k=1}^m x\left(\left(i - i_k + \frac{1}{2}\right)h\right) \int_{(i_1-1)h}^{i_1h} \dots \int_{(i_m-1)h}^{i_mh} K_m(s_1, \dots, s_m) ds_1 \dots ds_m \right), \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$i_m = \overline{1, n}, m = \overline{1, N}.$$

Тогда (1.13) для случая произвольных симметричных K_m с применением (3.6) будет иметь следующий вид:

$$y^h(t_i) = \sum_{m=1}^N \left[\sum_{i_1=1}^i \cdots \sum_{i_m=1}^i \left(\prod_{k=1}^m x_{i-i_k+\frac{1}{2}} \int_{(i_1-1)h}^{i_1h} \cdots \int_{(i_m-1)h}^{i_mh} K_m(s_1, \dots, s_m) ds_{i_1} \dots ds_{i_m} \right) \right], \quad (3.7)$$

$$i = \overline{1, n}, nh = T.$$

Соответственно, при $N = 2$, $N = 3$ из (3.7) можно получить квадратичный и кубичный полиномы Вольтерра, которые будут рассмотрены ниже.

3.1.2. Идентификация квадратичного полинома Вольтерра

Рассмотрим сеточный полином Вольтерра (в дальнейшем просто полином Вольтерра), полученный после применения многомерного ИП-метода (3.7) при $N = 2$:

$$y_{sq}(t_i) = \sum_{\mu=1}^i m_{\mu} x_{i-\mu+1/2} + \sum_{\mu=1}^i \sum_{\nu=1}^i p_{\mu, \nu} x_{i-\mu+1/2} x_{i-\nu+1/2}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (3.8)$$

$$m_{\mu} = \int_{(\mu-1)h}^{\mu h} K_1(s) ds, \quad p_{\mu, \nu} = \int_{(\mu-1)h}^{\mu h} \int_{(\nu-1)h}^{\nu h} K_2(s_1, s_2) ds_1 ds_2. \quad (3.9)$$

Задача идентификации для (3.8) состоит в нахождении массивов (3.9).

Как уже было сказано в параграфе 1.1.2, для идентификации квадратичного слагаемого полинома (3.8) необходимо использование однопараметрического семейства тестовых (обучающих) сигналов. Для этого введем сетку с шагом h , так что $\omega_{1_j} = jh$, $j = \overline{1, n}$, $nh = T$, и перепишем сигнал (1.14) при $n = 2$ в следующей форме:

$$x_{\omega_{1_j}}^{\alpha}(t) = \alpha(e(t) - e(t - \omega_{1_j})), \quad 1 \leq j \leq n, \quad t, \omega_{1_j} \in [0, T]. \quad (3.10)$$

В отличие от непрерывного случая, в дискретном для однозначного нахождения переходных характеристик требуется дополнительно еще один, вообще говоря, произвольный тестовый сигнал. Например, нам будет удобно и

далее в качестве дополнительного использовать следующий сигнал:

$$x_{\omega_1}^\beta(t) = \beta(e(t) - e(t - \omega_1)), t, \omega_1 \in [0, T]. \quad (3.11)$$

При этом в (3.10) и (3.11) $\alpha \neq \beta \neq 0$ и $\alpha, \beta \leq B$. В дальнейшем будем называть параметры α и β амплитудами соответствующего тестового сигнала. На Рисунках 3.1 изображены сигналы (3.10) и (3.11).

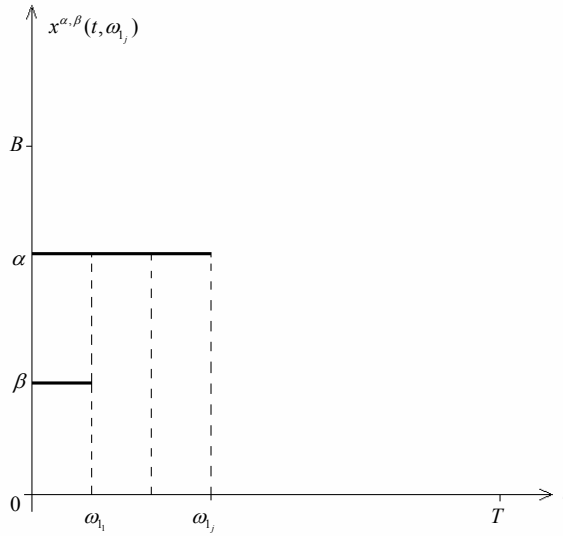


Рисунок 3.1 – Сигналы для идентификации квадратичной модели

Другие варианты дополнительных тестовых сигналов, влияющих на точность моделирования, будут рассмотрены в параграфе 3.1.4.

Подстановка сигналов (3.10) и (3.11) в (3.8) приводит к следующей СЛАУ относительно m и p :

$$y_{i,j}^\alpha = \alpha \sum_{\mu=i-j+1}^i m_\mu + \alpha^2 \sum_{\mu=i-j+1}^i \sum_{\nu=i-j+1}^i p_{\mu,\nu}, \quad 1 \leq j \leq i \leq n, \quad (3.12)$$

$$y_{i,1}^\beta = \beta m_i + \beta^2 p_{i,i}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad (3.13)$$

для которой справедлива следующая

ТЕОРЕМА 1. Система линейных алгебраических уравнений (3.12), (3.13) является замкнутой и невырожденной.

Доказательство теоремы 1 приведено в приложении В. Обращение блочно-треугольной матрицы \mathbf{A}^{sq} , полученной из коэффициентов рассматриваемой

СЛАУ, приводит к решению этой СЛАУ:

$$m_i = \frac{\alpha^2 y_{i,1}^\beta - \beta^2 y_{i,1}^\alpha}{\alpha^2 \beta - \beta^2 \alpha}; \quad p_{i,i} = \frac{-\alpha y_{i,1}^\beta + \beta y_{i,1}^\alpha}{\alpha^2 \beta - \beta^2 \alpha}; \quad i = \overline{1, n}; \quad (3.14)$$

$$p_{i,j} = \frac{y_{i,i-j+1}^\alpha - y_{i-1,i-j}^\alpha - y_{i,i-j}^\alpha + y_{i-1,i-j-1}^\alpha}{2\alpha^2}, \quad p_{i,j} = p_{j,i}, \quad 1 \leq j \leq i \leq n. \quad (3.15)$$

Если в качестве дополнительного сигнала вместо (3.11) использовать сигнал вида

$$x^\beta(t) = \beta e(t), \quad t \in [0, T], \quad (3.16)$$

то формулы обращения для квадратичной модели (3.8) будут выглядеть следующим образом:

$$m_i = \frac{\alpha^2 y_{i,i}^\beta - \beta^2 y_{i,i}^\alpha - \alpha^2 y_{i-1,i-1}^\beta + \beta^2 y_{i-1,i-1}^\alpha}{\alpha^2 \beta - \beta^2 \alpha}, \quad (3.17)$$

и с учетом того, что формула для подсчета внедиагональных элементов совпадает с (3.15) (так как дополнительный сигнал (3.16) не использовался при их идентификации), имеем

$$p_{i,i} = \frac{\beta^2 y_{i,i}^\alpha - \alpha^2 y_{i,i}^\beta + \beta^2 y_{i-1,i-1}^\alpha + \alpha^2 y_{i-1,i-1}^\beta - (\beta^2 - \alpha\beta) y_{i,1}^\alpha}{\alpha^2 \beta (\beta - \alpha)}. \quad (3.18)$$

3.1.3. Идентификация кубичного полинома Вольтерра

Обратимся теперь к более сложному случаю – идентификации кубичного полинома Вольтерра. Подставляя в (3.7) $N = 3$, имеем:

$$\begin{aligned} y_{cub}(t_i) = & \sum_{\mu=1}^i m_\mu x_{i-\mu+1/2} + \sum_{\mu=1}^i \sum_{\nu=1}^i p_{\mu,\nu} x_{i-\mu+1/2} x_{i-\nu+1/2} + \\ & + \sum_{\mu=1}^i \sum_{\nu=1}^i \sum_{\lambda=1}^i q_{\mu,\nu,\lambda} x_{i-\mu+1/2} x_{i-\nu+1/2} x_{i-\lambda+1/2}, \quad i = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

где

$$m_\mu = \int_{(\mu-1)h}^{\mu h} K_1(s) ds, \quad p_{\mu,\nu} = \int_{(\mu-1)h}^{\mu h} \int_{(\nu-1)h}^{\nu h} K_2(s_1, s_2) ds_1 ds_2 \quad (3.20)$$

и

$$q_{\mu,\nu,\lambda} = \int_{(\mu-1)h}^{\mu h} \int_{(\nu-1)h}^{\nu h} \int_{(\lambda-1)h}^{\lambda h} K_3(s_1, s_2, s_3) ds_1 ds_2 ds_3 \quad (3.21)$$

есть искомые интегралы от ядер.

Для идентификации (3.19) будем использовать уже двухпараметрическое семейство тестовых возмущений

$$x_{\omega_{1_j}, \omega_{2_k}}^\alpha(t) = \alpha(e(t) - 2e(t - \omega_{1_j}) + e(t - \omega_{1_j} - \omega_{2_k})), \quad (3.22)$$

где $1 \leq j+k \leq n$, $t, \omega_{1_j}, \omega_{2_k} \in [0, T]$ и в качестве дополнительного сигнала возьмем, как и в квадратичном случае, сигнал (3.11). Сигналы (3.22) и (3.11) представлены на Рисунке 3.2.

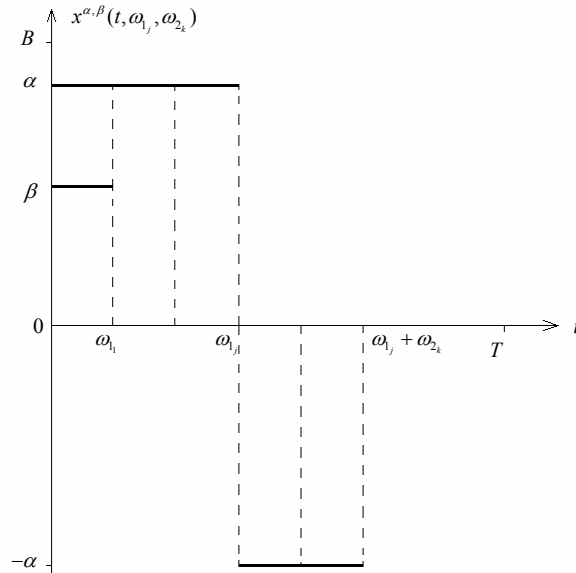


Рисунок 3.2 – Сигналы для идентификации кубичной модели

В (3.22), как и ранее, $e(t)$ – функция Хевисайда, $\omega_{1_j} = jh$, $\omega_{2_k} = kh$, $nh = T$ и $\alpha \neq \beta \neq 0$.

Ясно, что семейство (3.22) включает в себя (3.10), так что при $\omega_2 = 0$ $x_{\omega_{1_j}, 0}^\alpha(t_i) \equiv x_{\omega_{1_j}}^\alpha(t_i)$.

Подставляя (3.22) и (3.11) в (3.19), получим СЛАУ

$$y_{i,j,k}^\alpha = \alpha \left[\sum_{\mu=i-j+1}^i m_\mu - \sum_{\mu=i-j-k+1}^{i-j} m_\mu \right] +$$

$$+\alpha^2 \left[(\mathbf{V}_{i,j} - \mathbf{V}_{i-j})^2 K_2 \right] + \alpha^3 \left[(\mathbf{V}_{i,j} - \mathbf{V}_{i-j,k})^3 K_3 \right], \quad (3.23)$$

$$y_{i,1,0}^\beta = \beta m_i + \beta^2 p_{i,i} + \beta^3 q_{i,i,i},$$

$$1 \leq j + k \leq i \leq n.$$

B (3.23)

$$\mathbf{V}_{i,j} K_2 = \int_{(i-j+1)h}^{ih} K_2(s_1, s_2) ds_1 = \sum_{\mu=i-j+1}^i V_\mu K_2, \quad (3.24)$$

$$\mathbf{V}_{i,j}^2 K_2 = \int_{(i-j+1)h}^{ih} \int_{(i-j+1)h}^{ih} K_2(s_1, s_2) ds_1 ds_2, \quad (3.25)$$

$$\mathbf{V}_{i,j} \cdot \mathbf{V}_{i-j,k} K_2 = \int_{(i-j+1)h}^{ih} \int_{(i-j-k+1)h}^{(i-j)h} K_2(s_1, s_2) ds_1 ds_2, \quad (3.26)$$

$$\mathbf{V}_{i,j} K_3 = \int_{(i-j+1)h}^{ih} K_3(s_1, s_2, s_3) ds_1 = \sum_{\mu=i-j+1}^i V_\mu K_3, \quad (3.27)$$

$$\mathbf{V}_{i,j}^3 K_3 = \int_{(i-j+1)h}^{ih} \int_{(i-j+1)h}^{ih} \int_{(i-j+1)h}^{ih} K_3(s_1, s_2, s_3) ds_1 ds_2 ds_3, \quad (3.28)$$

$$\mathbf{V}_{i,j}^2 \mathbf{V}_{i-j,k} K_3 = \int_{(i-j+1)h}^{ih} \int_{(i-j+1)h}^{ih} \int_{(i-j-k+1)h}^{(i-j)h} K_3(s_1, s_2, s_3) ds_1 ds_2 ds_3, \quad (3.29)$$

$$\mathbf{V}_{i,j} \mathbf{V}_{i-j,k}^2 K_3 = \int_{(i-j+1)h}^{ih} \int_{(i-j-k+1)h}^{ih} \int_{(i-j-k+1)h}^{(i-j)h} K_3(s_1, s_2, s_3) ds_1 ds_2 ds_3. \quad (3.30)$$

В (3.24)–(3.30) оператор V_μ определяется согласно формулам (П.1.17)–(П.1.19) и дополнительно

$$V_\mu^3 K_3 = \int_{(\mu-1)h}^{\mu h} \int_{(\mu-1)h}^{\mu h} \int_{(\mu-1)h}^{\mu h} K_3(s_1, s_2, s_3) ds_1 ds_2 ds_3 = q_{\mu,\mu,\mu}, \quad (3.31)$$

$$V_\mu^2 V_\nu K_3 = \int_{(\mu-1)h}^{\mu h} \int_{(\mu-1)h}^{\mu h} \int_{(\nu-1)h}^{\nu h} K_3(s_1, s_2, s_3) ds_1 ds_2 ds_3 = q_{\mu,\mu,\nu}, \quad (3.32)$$

$$V_\mu V_\nu^2 K_3 = \int_{(\mu-1)h}^{\mu h} \int_{(\nu-1)h}^{\nu h} \int_{(\nu-1)h}^{\nu h} K_3(s_1, s_2, s_3) ds_1 ds_2 ds_3 = q_{\mu, \nu, \nu}, \quad (3.33)$$

$$V_\mu V_\nu V_\lambda K_3 = \int_{(\mu-1)h}^{\mu h} \int_{(\nu-1)h}^{\nu h} \int_{(\lambda-1)h}^{\lambda h} K_3(s_1, s_2, s_3) ds_1 ds_2 ds_3 = q_{\mu, \nu, \lambda}. \quad (3.34)$$

Для (3.23) справедлива

ТЕОРЕМА 2. Система линейных алгебраических уравнений (3.23) является замкнутой и невырожденной.

Доказательство теоремы 2 приведено в приложении В.

При решении СЛАУ соответствующей кубической модели использовался математический пакет Maple 10 [165]:

$$m_i = -\frac{2\alpha^3 y_{i,1,0}^\beta - \beta^2 (\alpha + \beta) y_{i,1,0}^\alpha + \beta^2 (\beta - \alpha) y_{i,0,1}^\alpha}{2\alpha\beta (\beta^2 - \alpha^2)}, \quad (3.35)$$

$$p_{i,i} = \frac{y_{i,1,0}^\alpha + y_{i,0,1}^\alpha}{2\alpha^2}, \quad (3.36)$$

$$p_{i,j} = \frac{P_{i,j}}{4\alpha^2}, \quad (3.37)$$

$$q_{i,i,i} = -\frac{-2\alpha^2 y_{i,1,0}^\beta + \beta (\alpha + \beta) y_{i,1,0}^\alpha + \beta (\beta - \alpha) y_{i,0,1}^\alpha}{2\alpha^2 \beta (\beta^2 - \alpha^2)}, \quad (3.38)$$

$$q_{i,j,k} = \frac{Q1_{i,j,k}}{6\alpha^3}, \quad (3.39)$$

$$q_{i,j,k} = \frac{Q2_{i,j,k}}{6\alpha^3}, \quad (3.40)$$

$$q_{i,j,k} = \frac{Q3_{i,j,k}}{12\alpha^3}, \quad (3.41)$$

где

$$\begin{aligned} P_{i,j} &= y_{i,i-j+1,0}^\alpha + y_{i,0,i-j+1}^\alpha - y_{i-1,i-j,0}^\alpha - y_{i-1,0,i-j}^\alpha - \\ &- y_{i,i-j,0}^\alpha - y_{i,0,i-j}^\alpha + y_{i-1,i-j-1,0}^\alpha + y_{i-1,0,i-j-1}^\alpha, \end{aligned}$$

$$Q1_{i,j,k} = y_{i,i-j+1,j-k-1}^\alpha - y_{i,i-j+1,j-k}^\alpha - y_{i,i-j,j-k+1}^\alpha + \\ + y_{i,i-j,j-k}^\alpha + 2y_{i-1,i-j,j-k}^\alpha - 2y_{i-1,i-j,j-k-1}^\alpha,$$

$$Q2_{i,j,k} = y_{i,i-j+1,j-k}^\alpha - 2y_{i,i-j,j-k}^\alpha + y_{i,i-j,j-k+1}^\alpha + \\ + 2y_{i-1,i-j-1,j-k}^\alpha - y_{i-1,i-j-1,j-k+1}^\alpha - y_{i-1,i-j,j-k}^\alpha,$$

$$Q3_{i,j,k} = y_{i,i-j+1,j-k-1}^\alpha - y_{i,i-j+1,j-k}^\alpha - y_{i,i-j,j-k}^\alpha + y_{i,i-j,j-k+1}^\alpha + \\ + y_{i-1,i-j,j-k}^\alpha - y_{i-1,i-j,j-k-1}^\alpha - y_{i-1,i-j-1,j-k+1}^\alpha + y_{i-1,i-j-1,j-k}^\alpha.$$

В (3.37) $i > j$, в (3.39) $i = j$, $j > k$, в (3.40) $j = k$, $i > j$ и в (3.41) $i > j > k$. Также для этих формул выполняется свойство симметрии, согласно которому $p_{i,j} = p_{j,i}$, $q_{i,j,k} = q_{i,k,j} = q_{j,i,k} = q_{j,k,i} = q_{k,i,j} = q_{k,j,i}$.

3.1.4. Оптимизация амплитуд тестовых сигналов

Прежде чем перейти к построению квадратичной и кубической моделей, проведению и анализу численных экспериментов, необходимо рассмотреть проблему выбора амплитуд тестовых сигналов, применяемых при идентификации этих двух моделей. При моделировании исследуемого динамического процесса выбор амплитуд на этапе идентификации достаточно сильно влияет на точность моделирования.

Введем тестовую (эталонную) модель нелинейной динамической системы вида

$$y_{et}(t) = \sum_{m=1}^N \frac{1}{m!} \left(\int_0^t x(s) ds \right)^m, \quad t \in [0, T]. \quad (3.42)$$

Применительно к "эталонной" динамической системе (3.42) проблема оптимизации амплитуд тестовых сигналов для методики, описанной в параграфе 1.1.2, рассматривалась в [23; 28]. Например, в статье [23] показано, что необходимые условия (см. теоремы 7, 8 и [30]) для существования ядер Вольтерра $K_2(s_1, s_2)$ и $K_3(s_1, s_2, s_3)$ как решений многомерных интегральных уравнений в классе непрерывных на $0 \leq s_1, s_2, s_3 \leq T$ симметричных

функций приводят в равенству $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$ в случае квадратичной модели и $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$ в случае кубической. В этой же работе показано, что если эти условия не выполняются, то точность построения моделей может существенно упасть.

Применение метода интегрирования произведения для идентификации полинома Вольтерра, описанного в параграфах 3.1, 3.1.2, позволяет снять не только условия теорем 7 и 8, но и ограничения на амплитуды тестовых сигналов, что дает большую свободу в их выборе.

Итак, пусть входные сигналы $x^\gamma(t)$ принадлежат следующему множеству:

$$X = \{\gamma e(t), \gamma \in [-B, B]\}. \quad (3.43)$$

Будем моделировать (3.42) с помощью квадратичного (3.8) и кубического (3.19) полиномов. При этом естественно считать, что степень N полинома (3.42) должна быть выше степени аппроксимирующего полинома (3.8) или (3.19). Так, для (3.8) $N \geq 3$ и соответственно для (3.19) $N \geq 4$. При увеличении числа слагаемых N эталонная модель дает все более точную аппроксимацию функции $e \left[\int_0^t x(s) ds \right] - 1$.

Специфика задачи о выборе амплитуд позволяет практически опустить процесс идентификации и моделирования, поэтому, оставив численные расчеты для следующей главы, будем рассматривать невязку между эталонной моделью $y_{et}^\gamma(t_i) \equiv y_{et}(x^\gamma(t_i))$ и квадратичной моделью (3.8), которая является функцией четырех переменных α , β , γ и t_i .

Обозначим разность

$$y_{et}^\gamma(t_i) - y_{sq}^\gamma(t_i) \equiv N_{sq}(t_i, \alpha, \beta, \gamma). \quad (3.44)$$

Для наглядности положим в (3.42) $N = 3$. Сначала рассмотрим невязку, соответствующую дополнительному сигналу (3.16).

Так как после подстановки сигнала (3.43) в (3.8) имеем

$$y_{sq}^\gamma(t_i) = \gamma \sum_{\mu=1}^i m_\mu + \gamma^2 \sum_{\mu=1}^i \sum_{\nu=1}^i p_{\mu,\nu}, \quad (3.45)$$

то для определения разности (3.44) достаточно вычислить суммы

$$\sum_{\mu=1}^i m_{\mu} = M_i, \quad (3.46)$$

$$\sum_{\mu=1}^i \sum_{\nu=1}^i p_{\mu,\nu} = P_i. \quad (3.47)$$

Подставив сигналы (3.5) ($\alpha_k = \alpha$) и (3.16) в модель (3.8), получим систему уравнений, откуда согласно (3.46) и (3.47) имеем:

$$M_i = \frac{\alpha^2 y_i^{\beta} - \beta^2 y_i^{\alpha}}{\alpha\beta(\alpha - \beta)}; P_i = \frac{\beta y_i^{\alpha} - \alpha y_i^{\beta}}{\alpha\beta(\alpha - \beta)}. \quad (3.48)$$

С учетом (3.42), при $N = 3$ имеем

$$y_{et}^{\alpha}(t) = \alpha t + \frac{\alpha^2 t^2}{2} + \frac{\alpha^3 t^3}{6} \quad (3.49)$$

и

$$y_{et}^{\beta}(t) = \beta t + \frac{\beta^2 t^2}{2} + \frac{\beta^3 t^3}{6}. \quad (3.50)$$

Тогда на сетке $t_i = ih, nh = T$, нетрудно подсчитать $y_i^{\alpha} = y_{et}^{\alpha}(t_i)$ и $y_i^{\beta} = y_{et}^{\beta}(t_i)$.

После несложных подсчетов выпишем невязку

$$N_{sq}(\alpha, \beta, \gamma, h, t_i) = \frac{t_i^3 \gamma (\alpha - \gamma) (\beta - \gamma)}{6}. \quad (3.51)$$

В практических исследованиях важную роль играет значение отклика при $t = T$ (то есть, в конце переходного процесса), поэтому, положив $i = n, t_n = T$, естественно сформулировать следующую экстремальную задачу по выбору параметров α и β из допустимого множества $[-B, B]$: найти

$$(\alpha^*, \beta^*) = \arg \min_{\alpha, \beta \in [-B, B]} \max_{\gamma \in [-B, B]} \left| N_{sq}(\alpha, \beta, \gamma, T) \right|. \quad (3.52)$$

Вообще говоря, (3.52) – негладкая многоэкстремальная задача. Однако ее специфика позволяет с нужной точностью найти все локальные экстремумы. Получим точное решение минимаксной задачи (3.52).

Графическое представление функции $|N_{sq}|$ для разных значений параметров α и β позволяет определить специфику ее дальнейшего исследования.

На Рисунке 3.3 приведен график модуля невязки для различных произвольных α и β из области $[-B, B]$.

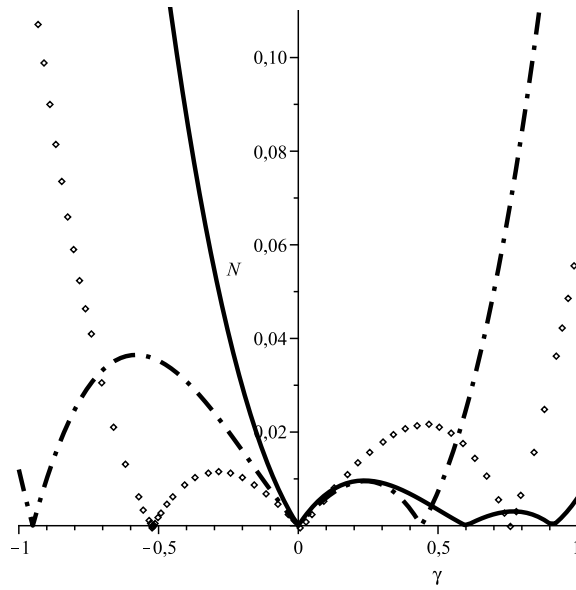


Рисунок 3.3 – График модуля невязки $|N_{sq}|$

Поскольку максимум невязки по γ достигается либо внутри, либо на концах отрезка, то оптимальное значение α и β следует выбирать из условия равенства значения невязки во внутренних точках экстремума и ее значений на концах отрезка. Следовательно, логично выписать следующую СЛАУ относительно α и β :

$$N_{sq}(T, \gamma_1, \alpha, \beta) = -N_{sq}(T, \gamma_2, \alpha, \beta), \quad (3.53)$$

$$N_{sq}(T, \gamma_1, \alpha, \beta) = N_{sq}(T, B, \alpha, \beta). \quad (3.54)$$

Так как

$$N'_{sq\gamma} = \frac{T^3(3\gamma^2 - 2\alpha\gamma - 2\gamma\beta + \beta\alpha)}{6},$$

приравнивая $N'_{sq\gamma}$ к нулю, имеем две точки $\gamma_{1,2}$ внутренних экстремумов, зависящих от α и β :

$$\gamma_{1,2} = \frac{\alpha + \beta \mp \sqrt{\alpha^2 - \beta\alpha + \beta^2}}{3}. \quad (3.55)$$

Тогда из (3.53) с учетом (3.55) имеем

$$\frac{T^3(\beta - 2\alpha)(2\beta - \alpha)(\beta + \alpha)}{81} = 0. \quad (3.56)$$

Уравнение (3.56) имеет три действительных корня: $\beta_1 = 2\alpha$, $\beta_2 = \frac{\alpha}{2}$ и $\beta_3 = -\alpha$. Первые два корня симметричны относительно α и β . Поэтому имеет смысл сравнивать третий корень только с одним из них. Чтобы выбрать один из них, обратимся к графику невязки. Видно, что на отрезке $[-B, 0]$ максимум невязки в случае выбора β_2 намного превышает максимум в случае выбора β_3 , однако при $\gamma \in [0, B]$ ситуация обратная. Поэтому выбор корня уравнения (3.56) напрямую зависит от того, какова область определения γ . Из условия на класс входных сигналов (3.43) выбираем корень $\beta_3 = -\alpha$, так что $\gamma = -\frac{\sqrt{3}}{3}\alpha$. И наконец, из (3.54) получаем нелинейное уравнение

$$-\frac{2\alpha^3}{3\sqrt{3}} + \alpha^2 B - B^3 = 0, \quad (3.57)$$

единственный корень которого, принадлежащий $[-B, B]$:

$$\alpha^* = \frac{\sqrt{3}B}{2} \approx 0,866B, \quad (3.58)$$

и следовательно,

$$\beta^* = -\frac{\sqrt{3}B}{2} \approx -0,866B. \quad (3.59)$$

Пара (3.58), (3.59) и является решением задачи (3.52), при этом

$$|N_{sq}(T, \alpha^*, \beta^*, \gamma_{1,2})| \approx 0,0416(TB)^3. \quad (3.60)$$

Стоит отметить, что пара α и β , связанная соотношением $\beta = \frac{\alpha}{2}$, не являясь оптимальной при $\gamma \in [-B, B]$, в случае $\gamma \in [0, B]$ оптимальна. Действительно, пусть теперь входные сигналы принадлежат множеству

$$X = \{\gamma e(t), \gamma \in [0, B]\}, \quad (3.61)$$

тогда задача (3.52) для той же самой функции невязки (3.51) примет следующий вид: найти

$$(\alpha^*, \beta^*) = \arg \min_{\alpha, \beta \in (0, B]} \max_{\gamma \in [0, B]} |N_{sq}(T, \gamma, \alpha, \beta)|. \quad (3.62)$$

Алгоритм исследования задачи (3.62) полностью совпадает с описанным выше, только в силу (3.61) необходимо выбрать $\beta_2 = \frac{\alpha}{2}$. Опуская подробности вычислений, сразу выпишем значения оптимальных α и β :

$$\alpha^* = (4\sqrt{3} - 6)B \approx 0,9282B \quad (3.63)$$

и следовательно,

$$\beta^* = (2\sqrt{3} - 3)B \approx 0,4641B, \quad (3.64)$$

при этом

$$|N_{sq}(T, \alpha^*, \beta^*, \gamma_{1,2})| \approx 0,0064(TB)^3. \quad (3.65)$$

Сравнение (3.60) и (3.65) показывает, что, как и следовало ожидать, расширение области изменения амплитуды γ приводит к снижению точности построенной модели.

Для более полной картины рассмотрим задачу о нахождении оптимальных амплитуд для квадратичной модели (3.8), построенной с другим дополнительным сигналом (3.11). Для определенности будем считать, что сигнал $x^\gamma(t) \in X$, где X определено по (3.61).

Прямой подсчет невязки в этом случае показывает, что

$$N_{sq}(\alpha, \beta, \gamma, h, t_i) = \frac{t_i \gamma (\alpha - \gamma) (\beta h^2 - \gamma t_i^2)}{6} \quad (3.66)$$

и при $i = n$, $t_n = T$ имеем

$$(\alpha^*, \beta^*) = \arg \min_{\alpha, \beta \in (0, B]} \max_{\gamma \in (0, B]} \left| N_{sq}(\alpha, \beta, \gamma, h, T) \right|. \quad (3.67)$$

Решение (3.67) определяется следующей парой:

$$\alpha^* = (4\sqrt{3} - 6)B \approx 0,9282B, \quad (3.68)$$

$$\beta^* = \frac{T^2}{h^2} (2\sqrt{3} - 3)B \approx \frac{T^2}{h^2} 0,4641B. \quad (3.69)$$

Множитель $\frac{T^2}{h^2}$ в (3.69) появляется из-за специфики дополнительного сигнала (3.11) и является принципиальным отличием (3.69) от (3.64). Отношение $\frac{T^2}{h^2} \rightarrow \infty$ при $h \rightarrow 0$, что в пределе превращает сигнал (3.11) в дельта-функцию Дирака.

На Рисунке 3.4 представлены графики модуля невязки при оптимальном значении амплитуд тестовых сигналов как в случае $\gamma \in [-B, B]$, так и для $\gamma \in [0, B]$. Стоит отметить, что результат для полосы $[-B, B]$ совпадает с результатом, полученным ранее в [23]. Однако, если априори известно, что $\gamma \in [0, B]$, тогда использование новой методики (параграф 3.1) позволяет существенно повысить точность моделирования, так как не требуется выполнения условия $\alpha + \beta = 0$.

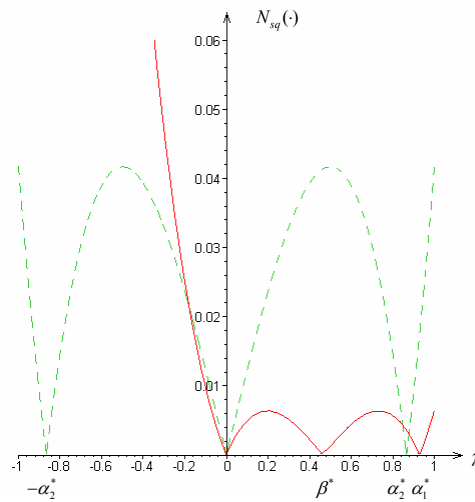


Рисунок 3.4 – Графики модуля невязки при оптимальных значениях амплитуд тестовых сигналов

Дальнейшим шагом в изучении проблемы выбора амплитуд тестовых сигналов может являться увеличение степени нелинейности эталонной модели (3.42). Однако так как возникающие минимаксные задачи типа (3.52) уже невозможно решить аналитически, ограничимся только иллюстрацией 3.5, показывающей, что решения минимаксных задач быстро стабилизируются и несильно отличаются от оптимальных амплитуд, найденных при $N = 3$.

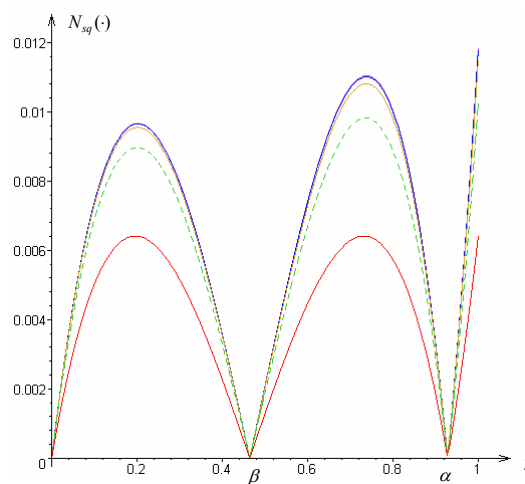


Рисунок 3.5 – Графики модуля невязки при различных степенях эталона до 7-й включительно

Далее рассмотрим задачу поиска оптимальных амплитуд для кубической модели (3.19). В силу возрастающей сложности исследования данной задачи для высоких степеней эталона ниже ограничимся только случаем $N = 4$.

Как и в случае квадратичной модели, будем рассматривать невязку между эталонной моделью (3.42) и кубической моделью (3.19):

$$N_{cub}(\alpha, \beta, \gamma, t_i) = y_{et}^\gamma(t_i) - y_{cub}^\gamma(t_i). \quad (3.70)$$

Множество сигналов $x^\gamma(t)$ оставим прежним, согласно (3.43). Схема получения невязки N_{cub} остается такой же, как и для квадратичного случая. Поэтому, опуская промежуточные выкладки, сразу выпишем невязку при $i = n, t_n = T$:

$$N_{cub}(\alpha, \beta, \gamma, h, T) = \frac{T\gamma(\gamma - \alpha)(\gamma + \alpha)(\gamma T^3 - \beta h^3)}{24} \quad (3.71)$$

и поставим для нее экстремальную задачу: найти

$$(\alpha^*, \beta^*) \in \text{Arg} \min_{\alpha, \beta \in [-B, B]} \max_{\gamma \in [-B, B]} \left| N_{cub}(\alpha, \beta, \gamma, h, T) \right|. \quad (3.72)$$

Решение задачи оптимизации в кубическом случае проводится исходя из тех же соображений, что и решение задачи в квадратичном случае. Однако в кубическом случае, в силу специфики входного сигнала (3.22), невозможно получить равенство значений невязки N_{cub} в точках внутренних экстремумов и значений на концах отрезка $[-B, B]$. При этом решение задачи (3.72) не единственно.

Решение задачи (3.72) проводилось численно и представлено на Рисунке 3.6. Для удобства графики, приведенные на Рисунке 3.6, изображены при $T = 1$ и $h = 1$.

При этом квазиоптимальные амплитуды принимают следующие значения:

$$\alpha^* \approx 0,943B, \quad \beta^* \approx \frac{T^3}{h^3} 0,521B \quad (3.73)$$

или

$$\alpha^* \approx 0,943B, \quad \beta^* \approx -\frac{T^3}{h^3} 0,521B, \quad (3.74)$$

а значение невязки кубической модели при $h = 1$

$$N_{cub}(\alpha^*, \beta^*, \gamma_3, h, T) = 0,0148(TB)^4. \quad (3.75)$$

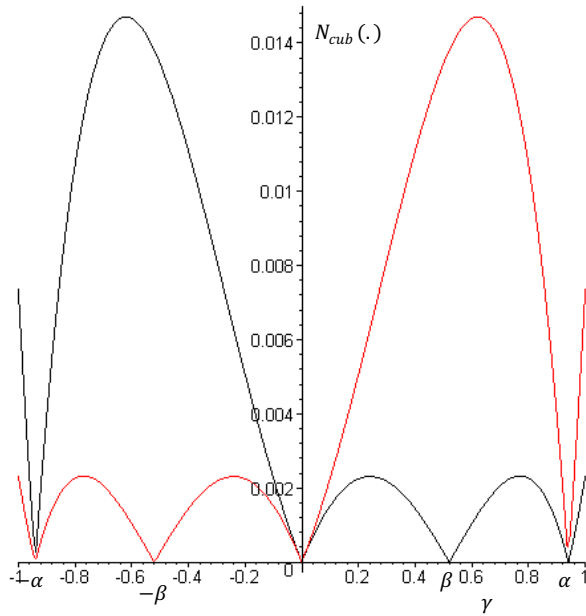


Рисунок 3.6 – Графики модуля невязки при оптимальных амплитудах в кубичном случае

Замечание. Несмотря на то, что все результаты и выводы данного параграфа были сделаны для математической эталонной системы вида (3.42), они обладают свойством универсальности. Это значит, что для произвольной нелинейной динамической системы можно пользоваться значениями оптимальных амплитуд, полученных для "эталона".

3.2. Идентификация и анализ сигналов динамических систем

3.2.1. Задача идентификации сигналов в интегральной модели

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Обратимся к отрезку интегро-степенного ряда Вольтерра – полиному Вольтерра

$$y(t) = \sum_{n=1}^N \int_0^t \dots \int_0^t K_n(t, s_1, \dots, s_n) \prod_{k=1}^n x(s_k) ds_k, \quad t \in [0, T]. \quad (3.76)$$

Предположим, ядра Вольтерра K_n , $n = \overline{1, N}$, идентифицированы каким-либо способом (один из таких способов применительно к важным для приложений случаям $N = 2, 3$ исследован в параграфе 3.1). При известных K_n появляется возможность не только находить отклик $y(t)$ нелинейной динамической системы на произвольный непрерывный входной сигнал $x(t)$, но и перейти к качественно иному этапу математического моделирования, тесно связанному с проблемой автоматического управления техническим объектом – нахождению такого $x(t)$, которому соответствует заданный (желаемый) отклик $y(t)$.

Если K_n , $n = \overline{1, N}$ и $y(t)$ заданы, то (3.76) является интегральным уравнением относительно $x(t)$. Будем называть его, следуя [27], полиномиальным уравнением N -степени, а при $N = 1, 2, 3$ – соответственно линейным, квадратичным и кубичным интегральным уравнением Вольтерра I рода, хотя эта терминология не является устоявшейся.

Представляется удивительным, что при обилии работ по идентификации полиномов Вольтерра до недавнего времени интегральные уравнения вида (3.76) не рассматривались вовсе. Специфика (3.76) заключается в том, что, несмотря на наличие многомерных интегралов, (3.76) является (нелинейным) одномерным интегральным уравнением, поскольку искомая функция зависит лишь от одной переменной – времени t . Цикл исследований (3.76) был начат А.С. Апарциным в работе [11], где рассматривался случай стационарной динамической системы и $N = 2$. С начала 2000-х А.С. Апарциным и его учениками в публикациях [9; 10; 12; 13; 16; 18; 19; 22; 24–27; 90; 99; 101; 102; 104; 113; 114; 130] изучались различные аспекты теории и численных методов решения уравнений типа (3.76).

Выше в параграфе 1.1.2 уже было рассмотрено линейное интегральное уравнение Вольтерра I рода (1.6), которое является частным случаем (3.76) при $N = 1$. Там же говорится, что (1.6) корректно поставлено на паре $\left(C_{[0, T]}, \overset{\circ}{C}_{[0, T]}^{(1)} \right)$, а это означает, что для любого $T < \infty$ и любой правой части, принадлежащей $\overset{\circ}{C}_{[0, T]}^{(1)}$, решение уравнения (1.6) $x_1(t)$ в $C_{[0, T]}$ существует, единственно и устойчиво. Устойчивость, как обычно, означает, что сколь угодно малым в норме $\overset{\circ}{C}_{[0, T]}^{(1)}$ возмущениям (погрешностям) правой ча-

сти (1.6) соответствуют сколь угодно малые же в норме $C_{[0,T]}$ погрешности решения (1.6).

Именно эти факты, относящиеся к линейному случаю, будут использованы при исследовании разрешимости в пространстве $C_{[0,T]}$ полиномиального уравнения (3.76). Все встречающиеся далее функциональные пространства считаются вещественными.

Введем для удобства следующие обозначения:

$$V_n x^n = \int_0^t \cdots \int_0^t K_n(t, s_1, \dots, s_n) \prod_{i=1}^n x(s_i) ds_i \quad (3.77)$$

и

$$P_N(x(t)) \equiv \sum_{n=1}^N V_n x^n, \quad (3.78)$$

тогда уравнение (3.76) в операторной форме имеет вид

$$P_N(x(t)) = y(t), \quad t \in [0, T]. \quad (3.79)$$

Считаем, что $K_1(t, s)$ удовлетворяет (1.7), а ядра K_n , $n = \overline{2, N}$, симметричные по s_1, \dots, s_n , непрерывны по совокупности переменных и непрерывно дифференцируемы по t .

ТЕОРЕМА 3. *При сделанных предположениях об исходных данных и достаточно малом $T > 0$ уравнение (3.79) однозначно разрешимо в $C_{[0,T]}$, причем для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $T(\varepsilon)$, что*

$$\|x_N^*(t) - x_1^*(t)\|_{C_{[0, T(\varepsilon)]}} \leq \varepsilon, \quad (3.80)$$

где $x_N^*(t)$ – непрерывное решение (3.79), а $x_1^*(t)$ – решение линейного уравнения (1.6).

Доказательство теоремы 3 приведено в приложении В.

Итак, теорема 3 гарантирует существование лишь локального непрерывного решения (3.79) в том смысле, что отрезок $[0, T]$, вообще говоря, должен быть достаточно малым. В этом принципиальное отличие полиномиального уравнения с $N \geq 2$ от линейного. Разумеется, это не исключает существование частных классов полиномиальных уравнений, допускающих глобальное непрерывное решение.

Так, если $y(t)$ принадлежит области значений оператора P_N , рассматриваемого действующим из $C_{[0,T]}$ в $\overset{\circ}{C}_{[0,T]}^{(1)}$, $0 < T < \infty$, то есть для некоторого $x_N^*(t) \in C_{[0,T]}$, $y(t) = P_N(x_N^*(t))$, то $x_N^*(t)$ является глобальным вещественным непрерывным решением уравнения (3.79). Проблема состоит именно в том, чтобы конструктивно описать область $R(P_N)$ значения интегрального оператора (3.79) при заданных ядрах Вольтерра K_n , $n = \overline{1, N}$. Ее решение требует применения достаточно тонкой техники. Продемонстрируем ее на простейшем примере квадратичного полинома Вольтерра ($N = 2$) и постоянных ядер $K_1(t, s) = 1$, $K_2(t, s_1, s_2) = \lambda \neq 0$.

В этом случае (3.79) переходит в уравнение

$$\int_0^t x(s)ds + \lambda \left(\int_0^t x(s)ds \right)^2 = y(t), \quad t \in [0, T]. \quad (3.81)$$

Ответ на вопрос, при каких условиях на правую часть (3.81) для любого $0 < T < \infty$ существует вещественное непрерывное на $[0, T]$ решение $x_2^*(t)$ уравнения (3.81), дает

ТЕОРЕМА 4. Пусть $y(t) \in \overset{\circ}{C}_{[0,T]}^{(1)}$. Тогда для того, чтобы уравнение (3.81) имело единственное вещественное решение $x_2^*(t) \in C_{[0,T]}$ при любом $0 < T < \infty$, необходимо и достаточно выполнения неравенства

$$\lambda y(t) \geq -\frac{1}{4} \quad \forall t \in [0, T], \quad 0 < T < \infty. \quad (3.82)$$

Доказательство теоремы 4 приведено в приложении В.

Замечание. Если $y(t)$ знакопостоянна на $[0, T]$ и $\text{sign } y(t) = \text{sign } \lambda$, то (П.1.38) заведомо выполняется. Если же знаки $y(t)$ и λ противоположны либо $y(t)$ знакопеременна на $[0, T]$, то, очевидно, достаточным условием существования при любом $0 < T < \infty$ решения $x_2^*(t) \in C_{[0,T]}$ является неравенство

$$|y(t)| < \frac{1}{4|\lambda|} \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.83)$$

Теорема 4 допускает естественное обобщение на случай, когда вместо (3.81) рассматривается квадратичное уравнение Вольтерра I рода

$$\int_0^t \frac{(t-s)^k}{k!} x(s)ds + \lambda \left(\int_0^t \frac{(t-s)^k}{k!} x(s)ds \right)^2 = y(t), \quad t \in [0, T]. \quad (3.84)$$

(при $k = 0$ (3.84) переходит в (3.81)). Более полная информация относительно (3.84) представлена в [8].

Вернемся к случаю $k = 0$. Так как $y(0) = 0$, то в окрестности точки $t = 0$

$$y(t) = ty'(\xi), \quad 0 \leq \xi \leq t. \quad (3.85)$$

Обозначим

$$F(t) = \max_{0 \leq \xi \leq t} |y'(\xi)|. \quad (3.86)$$

Очевидно, из неравенства

$$tF(t) < \frac{1}{4|\lambda|} \quad \forall t \in [0, T] \quad (3.87)$$

следует (3.83), однако (3.87) не может выполняться для любого $0 < T < \infty$, так как функция $F(t)$ непрерывна и монотонно неубывающая, функция $tF(t)$ непрерывна и строго возрастающая, равная нулю при $t = 0$, поэтому заведомо существует единственный корень $t = T^*$ уравнения

$$tF(t) = \frac{1}{4|\lambda|}. \quad (3.88)$$

Таким образом, достаточное условие (3.83) гарантированно выполняется лишь при $T < T^*$. Вообще вопрос оценок максимально возможной области определения вещественного непрерывного решения при заданных ядрах Вольтерра и правой части (3.79) оказывается в теории полиномиальных уравнений Вольтерра I рода ключевым.

Рассмотрим конкретный пример нелинейного уравнения (3.88). Пусть $y(t) = e^t - 1$. Тогда $F(t) = e^t$ и (3.88) имеет вид

$$te^t = \frac{1}{4|\lambda|}. \quad (3.89)$$

Еще до недавнего времени трансцендентное уравнение (3.89) можно было решить лишь численно, задаваясь теми или иными значениями параметра λ . Однако благодаря усилиям разработчиков системы компьютерной алгебры MAPLE [165] появилась возможность аналитического решения подобных уравнений, дающего зависимость $T^*(|\lambda|)$ в терминах специальной функции – функции Ламберта. Оказывается, именно функция Ламберта играет принципиально важную роль в теории полиномиальных уравнений Вольтерра I рода.

Прежде чем перейти к ее описанию, следует отметить, что, как показано в [27], помимо непрерывного решения $x_2^*(t)$ уравнение (3.81) имеет и другое решение, принадлежащее пространству обобщенных функций:

$$x_2^{**}(t) = -x_2^*(t) - \frac{1}{\lambda}\delta(t), \quad (3.90)$$

где $\delta(t)$ – δ -функция Дирака. Исследованию структуры решений уравнения (3.76) с интегралами типа многомерных сверток в пространстве обобщенных функций посвящена работа [84].

ФУНКЦИЯ ЛАМБЕРТА

Для более полного понимания дальнейшего материала, остановимся по-подробнее на функции Ламберта и ее свойствах.

W -функция Ламберта была введена в обращение в конце 1980-х годов математиком-программистом Дональдом Кнутом и разработчиками компьютерной системы Maple: Робом Корлессом, Гастоном Гоннетом и Дэвидом Джефффри [143]. Однако стоит отметить и математиков 18 века Иоганна Генриха Ламберта (в честь которого и названа функция) и Леонарда Эйлера, работы которых, посвященные решению трансцендентных уравнений, привели к W -функции Ламберта. Краткий обзор этих работ дан в [52].

Итак, определим вещественную W -функцию Ламберта $y = W(x)$ для вещественных x как решение функционального уравнения

$$ye^y = x. \quad (3.91)$$

Другими словами, W -функция Ламберта есть функция, обратная к функции

$$x(y) = ye^y. \quad (3.92)$$

На Рисунке 3.7 представлен график функции $W(x)$. Видно, что она определена на интервале $[-\frac{1}{e}, \infty)$, где принимает значения от $-\infty$ до $+\infty$, причем для отрицательных значений аргумента x функция двузначна. Точка с координатами $(-\frac{1}{e}, -1)$ делит график функции на две ветви, верхнюю $W_0(x)$ (сплошная линия) и нижнюю $W_{-1}(x)$ (пунктирная линия). В точке $(-\frac{1}{e}, -1)$ обе эти ветви имеют вертикальную касательную. Верхняя (главная) ветвь

$W_0(x)$ проходит через начало координат и больше не имеет особенностей. Нижняя ветвь $W_{-1}(x)$ имеет точку перегиба с координатами $(-\frac{2}{e^2}, -2)$ и вертикальную асимптоту при $x = 0$.

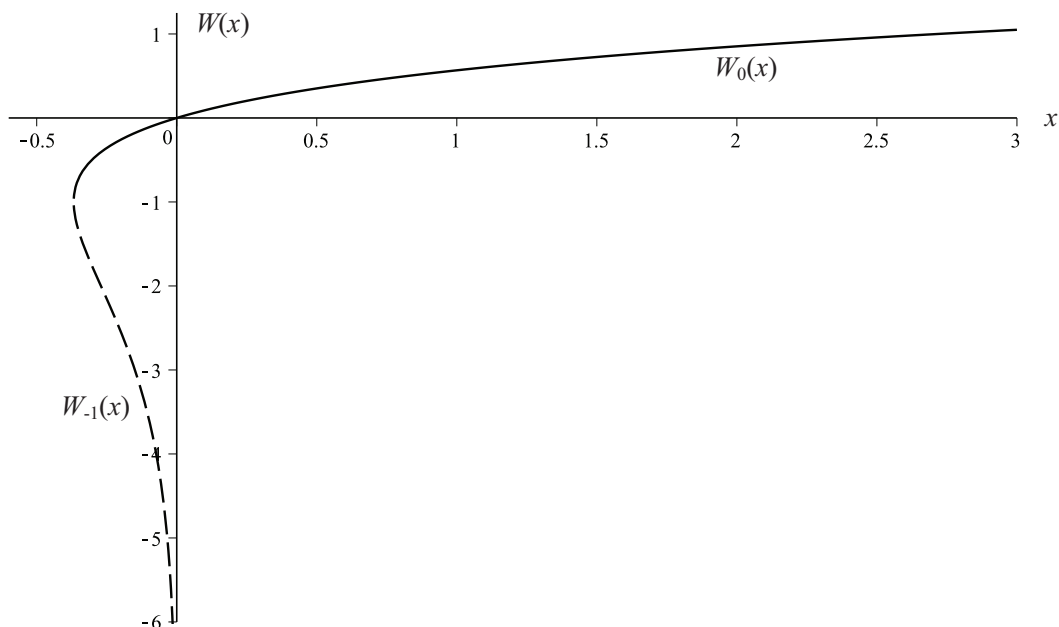


Рисунок 3.7 – График действительных ветвей W -функции Ламберта

Возможны и другие индексы, кроме $k = 0, -1$ для $W_k(x)$, однако они относятся к комплекснозначным ветвям, исчерпывающую информацию по которым можно найти в [52; 161].

Так как в дальнейшем нас будут интересовать только действительные ветви, то везде ниже главную ветвь функции $W_0(x)$ будем обозначать, если это не будет вносить путаницы, как $W(x)$.

Непосредственно из определения функции Ламберта следует, что

$$W'(x) = \frac{W(x)}{x + xW(x)}. \quad (3.93)$$

В (3.93) $x \neq 0$, однако производную в нуле можно доопределить в виде предела

$$\lim_{x \rightarrow 0} W'(x) = 1. \quad (3.94)$$

Как было отмечено в параграфе 3.1.2, с помощью функции Ламберта удастся получать аналитические решения важных классов трансцендентных

уравнений, которые до недавнего времени можно было решать лишь численно. Продемонстрируем применение функции Ламберта для аналитического решения следующего трансцендентного уравнения:

$$ax^n + b = \ln x, \quad (3.95)$$

которое будет играть существенную роль в исследовании полиномиальных уравнений, приведенном далее.

В (3.95) a , b – вещественные параметры, $n > 0$.

Следуя работам [12; 100], продемонстрируем ход решения уравнения (3.95) с помощью функции Ламберта.

Представим x^n как $e^{n \ln x}$, тогда по (3.95)

$$ae^{n \ln x} + b = \ln x. \quad (3.96)$$

Обозначим

$$y = n \ln x, \quad (3.97)$$

тогда в силу (3.96)

$$nae^y = y - nb. \quad (3.98)$$

Умножая обе части (3.98) на e^{-nb} , получим

$$nae^{y-nb} = (y - nb)e^{-nb},$$

откуда

$$-(y - nb)e^{-(y-nb)} = -nae^{nb}$$

и по определению функции Ламберта

$$-(y - nb) = W(-nae^{nb}),$$

а значит,

$$y = -W(-nae^{nb}) + nb.$$

Учитывая (3.97), окончательно получаем

$$x = e^{-\frac{1}{n}W(-nae^{nb})+b}. \quad (3.99)$$

Нас интересует вещественное положительное значение неизвестного x ($x \in R_+^1$), поэтому полученное решение (3.99) носит пока формальный характер – его область определения зависит от параметров a и b .

При одних сочетаниях a и b вещественного решения (3.95) не существует вовсе, при других оно может выражаться либо только в терминах главной ветви функции Ламберта W_0 , либо дополнительно через вторую ветвь W_{-1} . Полный анализ области определения решения (3.95) в плоскости параметров (a, b) проводится элементарно. По определению функции Ламберта, условием разрешимости (3.95) R^1 является ограничение на аргумент W в (3.99)

$$-nae^{nb} \geq -\frac{1}{e}. \quad (3.100)$$

Если $a < 0$, то при любом $b \in (-\infty, +\infty)$ (3.100) выполняется и решение (3.95) в R_+^1 существует и единственно:

$$x_0 = e^{-\frac{1}{n}W_0(-nae^{nb})+b}. \quad (3.101)$$

Геометрически этот факт иллюстрирует Рисунок 3.8 (для простоты иллюстрации $n = 1$).

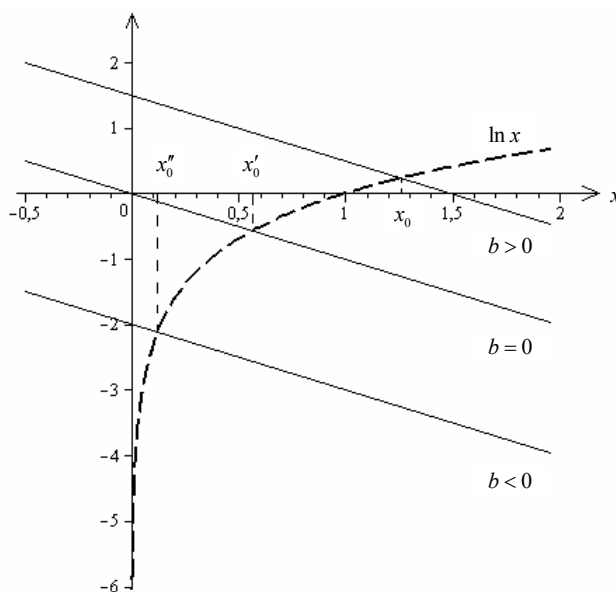


Рисунок 3.8 – Существование решения (3.95) при $a < 0$

Если $a > 0$, то (3.100) дает ограничение на b :

$$b \leq \frac{1}{n} \ln \left(\frac{1}{nae} \right). \quad (3.102)$$

При выполнении (3.102) наряду с (3.101) имеем и второй корень

$$x_{-1} = e^{-\frac{1}{n}W_{-1}(-nae^{nb})+b}. \quad (3.103)$$

Геометрическая иллюстрация этого случая приведена на Рисунке 3.9, а на Рисунке 3.10 одинарной штриховкой отмечена область определения единственного решения x_0 , а двойной штриховкой – область определения двух решений x_0 и x_{-1} .

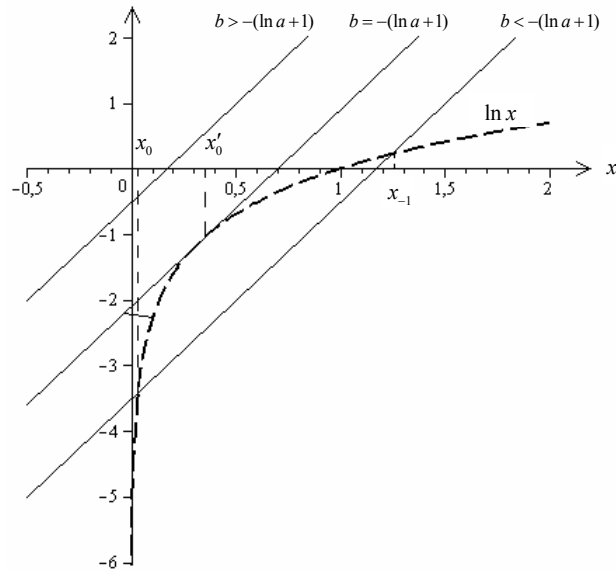


Рисунок 3.9 – Существование решения (3.95) при $a > 0$

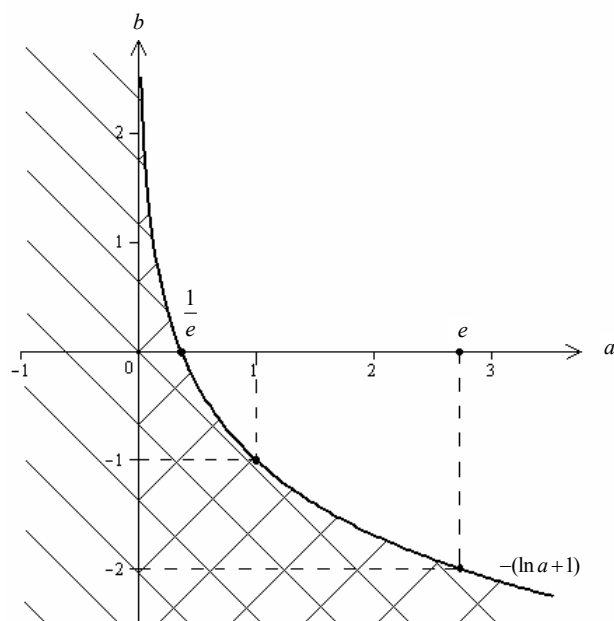


Рисунок 3.10 – Область определения одного и двух решений (3.95)

В заключении параграфа заметим, что трансцендентное уравнение (3.89) по определению функции Ламберта имеет единственное решение в терминах ее главной вещественной ветви:

$$T^* = W_0 \left(\frac{1}{4|\lambda|} \right). \quad (3.104)$$

В следующем разделе рассмотрим задачу получения неулучшаемых оценок непрерывных решений интегральных неравенств.

3.2.2. Интегральные неравенства и тестовые уравнения для анализа области существования

НЕУЛУЧШАЕМЫЕ ОЦЕНКИ НЕПРЕРЫВНЫХ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ ($N = 1$)

Для понимания сути аппарата получения неулучшаемых оценок непрерывных решений полиномиальных интегральных неравенств рассмотрим сначала линейный случай. Обратимся к линейному интегральному уравнению Вольтерра I рода (1.6). Существование и единственность для любого $0 < T < \infty$ решения $x_1^*(t) \in C_{[0,T]}$ при выполнении условий (1.7) и (1.8) вытекает из (обобщенного) принципа сжимающих отображений (см. [8]). Так как (1.6) эквивалентно интегральному уравнению Вольтерра II рода

$$x(t) + \int_0^t (K_1(t, s))'_t x(s) ds = y'(t), \quad t \in [0, T], \quad (3.105)$$

(в силу (1.7), не уменьшая общности, в (3.105) принято условие нормировки $K(t, t) \equiv 1$), то $x_1^*(t)$ обращает (3.105) в тождество:

$$x_1^*(t) + \int_0^t K'_{1_t}(t, s) x_1^*(s) ds \equiv y'(t), \quad t \in [0, T]. \quad (3.106)$$

Следовательно,

$$|x_1^*(t)| \leq |y'(t)| + \int_0^t |K'_{1_t}(t, s)| |x_1^*(s)| ds, \quad t \in [0, T]. \quad (3.107)$$

Обозначим

$$\max_{0 \leq s \leq \xi \leq t} |K'_{1\xi}(\xi, s)| = K_1(t). \quad (3.108)$$

Кроме того, по (3.86)

$$|y'(t)| \leq F(t),$$

так что решение (1.6) удовлетворяет неравенству

$$|x_1^*(t)| \leq F(t) + K_1(t) \int_0^t |x_1^*(s)| ds, \quad t \in [0, T]. \quad (3.109)$$

В силу неубывания функций $F(t)$ и $K_1(t)$

$$F(t) \leq F(T) = \hat{F},$$

$$K_1(t) \leq K_1(T) = \hat{K}_1,$$

поэтому, усиливая (3.109), имеем

$$|x_1^*(t)| \leq \hat{F} + \hat{K}_1 \int_0^t |x_1^*(s)| ds, \quad (3.110)$$

откуда, применяя простейший вариант неравенства Гронуолла-Беллмана [134], получим

$$|x_1^*(t)| \leq \hat{F} e^{\hat{K}_1 t}. \quad (3.111)$$

Следовательно,

$$\|x_1^*(t)\|_{C_{[0,T]}} \leq e^{\hat{K}_1 T} \|y(t)\|_{\overset{\circ}{C}_{[0,T]}^{(1)}},$$

откуда вытекает оценка нормы оператора P_1^{-1} , действующего из $\overset{\circ}{C}_{[0,T]}^{(1)}$ в $C_{[0,T]}$:

$$\|P_1^{-1}\|_{\overset{\circ}{C}_{[0,T]}^{(1)} \rightarrow C_{[0,T]}} \leq e^{\hat{K}_1 T}, \quad (3.112)$$

а значит, устойчивость (и корректность по Адамару) задачи (1.6) на паре $\left(\overset{\circ}{C}_{[0,T]}^{(1)}, C_{[0,T]}\right)$.

Заменяем теперь в (3.109) знаки неравенства на знаки равенства и перейдем к уравнению

$$\psi(t) = F(t) + K_1(t) \int_0^t \psi(s) ds, \quad t \in [0, T]. \quad (3.113)$$

Так как $K_1(t) \geq 0$, то оператор в (3.113) является изотонным [8] относительно конуса $\{C_{+[0,T]} = \psi(t)/\psi(t) \in C_{[0,T]}, \psi(t) \geq 0\}$, откуда следует оценка

$$|x_1^*| \leq \psi^*(t), \quad t \in [0, T], \quad (3.114)$$

где $\psi^*(t)$ – единственное решение уравнения (3.113).

Естественно называть (3.113) мажорантным интегральным уравнением Вольтерра II рода по отношению к исходному уравнению (1.6), а саму оценку (3.114) – неулучшаемой, в том смысле что она переходит в точное равенство, если в (3.109) знак \leq заменить на знак $=$ [8].

Однако само понятие неулучшаемых оценок непрерывных решений нелинейных интегральных неравенств, в отличие от линейных, требует дополнительного уточнения.

НЕУЛУЧШАЕМЫЕ ОЦЕНКИ НЕПРЕРЫВНЫХ РЕШЕНИЙ КВАДРАТИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ ($N = 2$)

Выпишем квадратичное уравнение Вольтерра I рода, положив в (3.76) $N = 2$:

$$\int_0^t K_1(t, s)x(s)ds + \int_0^t \int_0^t K_2(t, s_1, s_2)x(s_1)x(s_2)ds_1ds_2 = y(t), \quad t \in [0, T]. \quad (3.115)$$

Дополнительно к (3.108) и (3.86) введем следующие обозначения:

$$M_2(t) = \max_{0 \leq s \leq \xi \leq t} |K_2(\xi, \xi, s)| > 0, \quad (3.116)$$

$$L_2(t) = \max_{0 \leq s_1, s_2 \leq \xi \leq t} |K'_{2\xi}(\xi, s_1, s_2)| \geq 0, \quad (3.117)$$

$$k = \min |K_1(t, t)| > 0. \quad (3.118)$$

Всюду далее, не уменьшая общности, будем считать, что в (3.118) $k = 1$.

Дифференцируя (3.115) и переходя к оценке по модулю (с учетом (3.108), (3.116), (3.117) и (3.86)), имеем следующее интегральное неравенство:

$$|x(t)| \leq F(t) + K_1(t) \int_0^t |x(s)| ds + L_2(t) \left[\int_0^t |x(s)| ds \right]^2 + \\ + 2M_2(t) |x(t)| \int_0^t |x(s)| ds, t \in [0, T]. \quad (3.119)$$

В силу неубывания функций $F(t)$, $K_1(t)$, $L_2(t)$ и $M_2(t)$

$$F(t) \leq F(T) = \hat{F},$$

$$K_1(t) \leq K_1(T) = \hat{L}_1,$$

$$L_2(t) \leq L_2(T) = \hat{L}_2,$$

$$M_2(t) \leq M_2(T) = \hat{M}_2,$$

поэтому усиливая (3.119), имеем

$$|x(t)| \leq \hat{F} + \hat{L}_1 \int_0^t |x(s)| ds + \\ + \hat{L}_2 \left[\int_0^t |x(s)| ds \right]^2 + 2\hat{M}_2 |x(t)| \int_0^t |x(s)| ds, t \in [0, T]. \quad (3.120)$$

Обобщая линейный случай, будем трактовать нелинейное интегральное уравнение II рода

$$\psi(t) = F + L_1 \int_0^t \psi(s) ds + L_2 \left[\int_0^t \psi(s) ds \right]^2 + 2M_2 \psi(t) \int_0^t \psi(s) ds, t \in [0, T], \quad (3.121)$$

возникающее при замене знака \leq на $=$ и $|x(t)| = \psi(t)$, как мажорантное для (3.115). В (3.121) и всюду ниже для визуального упрощения записи опустим знак "крышка" $\hat{}$.

Введем определение.

Определение [12]. Оценку непрерывных решений неравенства (3.120)

$$|x(t)| \leq \psi^*(t), t \in [0, T], T < T^* \quad (3.122)$$

будем называть неумлучшаемой, если

- 1) мажоранта $\psi^*(t)$ является единственным решением уравнения (3.121);
- 2) T^* не может быть заменено на $T^{**} > T^*$.

Таким образом, для получения неулучшаемой оценки важно не только найти точное решение соответствующего мажорантного уравнения, но и определить максимально широкую гарантированную область его существования.

Покажем это на примере квадратичного уравнения Вольтерра I рода.

Рассмотрим случай, когда ядра Вольтерра K_1 и K_2 таковы, что $L_1 \neq 0$, а $L_2 = 0$. В этом случае (3.121) примет вид

$$\psi(t) = F + L_1 \int_0^t \psi(s) ds + 2M_2 \psi(t) \int_0^t \psi(s) ds, t \in [0, T]. \quad (3.123)$$

С помощью замены

$$\theta(t) = \int_0^t \psi(s) ds \quad (3.124)$$

сведем (3.123) к эквивалентной задаче Коши, которую будем называть мажорантной задачей Коши:

$$\dot{\theta}(t) = \frac{F + L_1 \theta(t)}{1 - 2M_2 \theta(t)}, \theta(0) = 0, t \in [0, T]. \quad (3.125)$$

Применяя для решения (3.125) метод разделения переменных и правило интегрирования дробно-рациональной функции

$$\frac{1 - 2M_2 \theta(t)}{F + L_1 \theta(t)},$$

получим трансцендентное уравнение

$$\theta(t) + \frac{F}{L_1} = \frac{F}{L_1} e^{\frac{L_1^2 t}{L_1 + 2M_2 F}} e^{\frac{2L_1 M_2}{L_1 + 2M_2 F} \theta(t)}, t \in [0, T]. \quad (3.126)$$

Точное решение (3.126) выражается в терминах функции Ламберта W . Получим это решение. Для краткости дальнейших выкладок введем следующие обозначения:

$$a = \frac{F}{L_1}; \quad b = \frac{2L_1 M_2}{L_1 + 2M_2 F}; \quad c(t) = \frac{F}{L_1} e^{\frac{L_1^2 t}{L_1 + 2M_2 F}},$$

тогда (3.126) переписется в виде:

$$\theta(t) + a = c(t) e^{b\theta(t)}, t \in [0, T]. \quad (3.127)$$

Чтобы воспользоваться определением (3.91), домножим (3.127) на $-be^{-b(\theta(t)+a)}$.

Тогда

$$-b(\theta(t) + a)e^{-b(\theta(t)+a)} = -bc(t)e^{-ba},$$

откуда

$$-b(\theta(t) + a) = W(-bc(t)e^{-ba}),$$

и по определению функции Ламберта (3.92) имеем

$$\theta(t) = -\frac{1}{b}W(-bc(t)e^{-ba}) - a.$$

С учетом принятых ранее обозначений решение задачи Коши (3.125) есть

$$\theta^*(t) = -\frac{L_1 + 2M_2F}{2L_1M_2}W\left(\frac{2M_2F}{L_1 + 2M_2F}e^{\frac{L_1^2t + 2M_2F}{L_1 + 2M_2F}}\right) - \frac{F}{L_1}. \quad (3.128)$$

Дифференцируя (3.128) с помощью (3.93), получаем искомую функцию $\psi^*(t)$:

$$\psi^*(t) = -\frac{L_1}{2M_2} \frac{W\left(-\frac{2M_2F}{L_1 + 2M_2F}e^{\frac{L_1^2t + 2M_2F}{L_1 + 2M_2F}}\right)}{1 + W\left(\frac{2M_2F}{L_1 + 2M_2F}e^{\frac{L_1^2t + 2M_2F}{L_1 + 2M_2F}}\right)}. \quad (3.129)$$

Для определения точной верхней границы T^* для $[0, T]$ достаточно воспользоваться тем фактом, что функция Ламберта определена на интервале $[-\frac{1}{e}, \infty)$, и приравнять ее аргумент в (3.128) или (3.129) к $-\frac{1}{e}$. Несложные преобразования дают

$$T^* = \frac{L_1 + 2M_2F}{L_1^2} \ln\left(1 + \frac{L_1}{2M_2F}\right) - \frac{1}{L_1}. \quad (3.130)$$

Суммируя все выше сказанное, можно сделать вывод, что в случае $L_2 = 0$ квадратичное уравнение Вольтерра I рода (3.115) имеет непрерывное решение на $[0, T]$, $T < T^*$, и справедливо неравенство (3.122), где $\psi^*(t)$ и T^* определяются по формулам (3.129) и (3.130). Обобщение для случая $L_2 > 0$ выполнено в [26].

Для иллюстрации значения T^* приведем график решения (3.129) при $L_1 = F = 1$. В этом случае $T^* = 2 \ln 2 - 1 \approx 0,3863$. Из Рисунка 3.11 хорошо видно, что при стремлении t к T^* решение $\psi^*(t)$ стремится к ∞ .

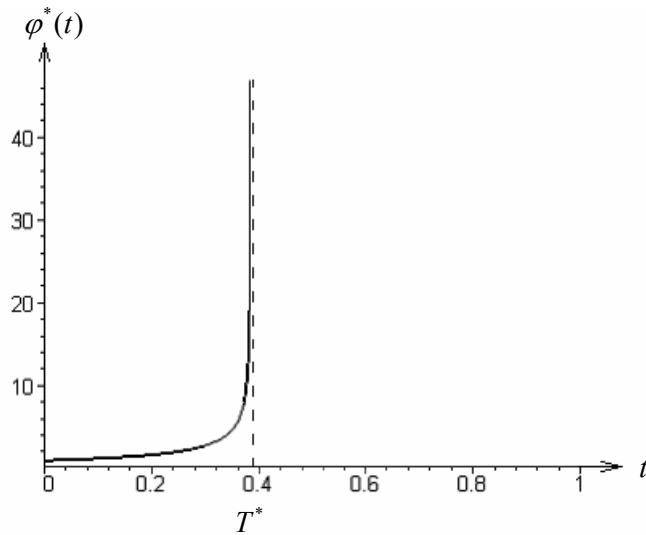


Рисунок 3.11 – График решения мажорантного уравнения

Вопрос о разрушении решения при стремлении t к T^* для различных интегральных уравнений II рода исследовался в работах [75; 85].

НЕУЛУЧШАЕМЫЕ ОЦЕНКИ НЕПРЕРЫВНЫХ РЕШЕНИЙ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ ПРИ $N > 2$

Естественным продолжением исследования полиномиальных уравнений является увеличение количества слагаемых в (3.76). Такой переход к значительно более сложным неравенствам неизбежно связан с существенным усложнением техники их исследования. Однако в некоторых случаях возможно получение неулучшаемых оценок для любого $N > 2$. Приведем результат, полученный лично автором диссертации в [13].

Для удобства и сокращения записи удобно выписать следующее интегральное неравенство, обобщающее (3.120) на случай любого N :

$$\psi(t) \leq a_0 + \sum_{i=1}^N a_i \left(\int_0^t \psi(s) ds \right)^i + \sum_{i=1}^{N-1} b_i \psi(t) \left(\int_0^t \psi(s) ds \right)^i, \quad t \in [0, T], \quad (3.131)$$

где $\psi(t) \geq 0$, $a_0 = 0$, $a_i \geq 0 \quad \forall i = \overline{1, N}$, $b_i \geq 0 \quad \forall i = \overline{1, N-2}$, $b_{N-1} > 0$, $N \geq 1$.

В свою очередь, в (3.131) $a_0 = F$, $a_i = L_i$, $b_i = iM_i$, где L_i и M_i – это обобщение на многомерный случай обозначений (3.117) и (3.116).

Выпишем их:

$$L_i(t) = \max_{0 \leq s_1, s_i \leq \xi \leq t} |K'_{i_t}(\xi, s_1, \dots, s_i)| \neq 0, \quad i = \overline{1, N},$$

$$M_i(t) = \max_{0 \leq s_2, s_i \leq \xi \leq t} |K_{i_t}(\xi, \xi, s_2, \dots, s_i)| \neq 0, \quad i = \overline{2, N}, \quad M_N(t) > 0 \quad \forall t > 0,$$

так что,

$$L_i(t) \leq L_i(T) = L_i, \quad M_i(t) \leq M_i(T) = M_i.$$

Основной результат [13] можно представить в виде следующей теоремы:

ТЕОРЕМА 5. Пусть коэффициенты a_i, b_i в (3.131) удовлетворяют условиям

$$a_{N-i} = C_N^i (-d)^i a_N, \quad i = \overline{1, N},$$

и

$$b_{n, N-\ell}^* = -\frac{C_{N-(n+1)}^{N-\ell}}{(-d)^{N-\ell}} + (C_{N-1}^{N-\ell} - C_{N-(n+1)}^{N-\ell}) (-d)^{\ell-1} b_{N-1}, \quad \ell = \overline{2, N-1},$$

соответственно. Пусть также выполнено

$$b_{N-1} \geq \frac{N-n-1}{n(-d)^{N-1}}.$$

.

Тогда наилучшая оценка непрерывных решений интегрального неравенства (3.131) такова:

$$\psi(t) \leq -\frac{a_N (-d)^n}{b_{N-1}} \frac{e^{\frac{1}{n} W(-1 - \gamma_N e^{\frac{na_N t}{b_{N-1}} - \gamma_N}) - \frac{a_N t}{b_{N-1}} + \frac{\gamma_N}{n}}}{1 + W(-1, -\gamma_N e^{\frac{na_N t}{b_{N-1}} - \gamma_N})}, \quad t \in [0, T_{n, N}^*), \quad (3.132)$$

где γ_N и $T_{n, N}^*$ определены формулами

$$\gamma_N = 1 + \frac{1}{b_{N-1} (-d)^{N-1}}$$

и

$$T_{n, N}^* = \frac{1 - b_{N-1} (-d)^{N-1} \ln \gamma_N}{na_N (-d)^{N-1}}.$$

Доказательство и разбор, подтверждающих теорему тестовых примеров, приведены в [13].

3.2.3. Тестовые уравнения для идентификации входных сигналов

Методология исследования непрерывного решения (3.76), где $(K_1(t, s))'_t \in C_\Delta$, $\Delta = \{t, s : 0 \leq s \leq t \leq T\}$, $K_1(t, t) \neq 0$, $y'(t) \in C_{[0, T]}$, $y(0) = 0$, а $K_n(t, s_1, \dots, s_n)$ для $n > 1$ непрерывны по совокупности переменных и непрерывно дифференцируемы по t , базируются на мажорантных оценках специальных нелинейных интегральных неравенств (3.131).

Реализация этапа восстановления входных сигналов, обеспечивающих отклик реальной динамической системы, существенно опирается на верхние точные оценки правой границы T области существования решения (3.76) [94]. Поэтому в [97] введены для $N = 2$ специальные тестовые интегральные уравнения Вольтерра I рода, ядра Вольтерра в которых удовлетворяют заданным условиям. Конструктивный алгоритм построения многомерных функций, мажорирующих импульсно-переходные функции динамического объекта может быть развит на случай $N > 2$.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $M_3 > 0$, $L_3 \geq 0$, тогда для того, чтобы ядро Вольтерра $K_3(t, s_1, s_2, s_3)$ имело вид

$$K_3(t, s_1, s_2, s_3) = \prod_{i=1}^3 \left(\sqrt[3]{M_3} - \frac{L_3}{3M_3^{\frac{2}{3}}}(t - s_i) \right), \quad (3.133)$$

при $0 \leq s_1, s_2, s_3 \leq t \leq T$, $T \leq \frac{3M_3}{L_3}$, необходимо и достаточно, чтобы

$$M_3 = \max_{0 \leq s_1, s_2 \leq t \leq T} |K_3(t, t, s_1, s_2)|, \quad (3.134)$$

$$L_3 = \max_{0 \leq s_1, s_2, s_3 \leq t \leq T} |(K_3(t, s_1, s_2, s_3))'_t|. \quad (3.135)$$

Доказательство теоремы 6 приведено в приложении В.

По аналогии с квадратичным [97] и кубичным случаями можно выписать вид N -мерного ядра. Пусть $M_N > 0$ и $L_N \geq 0$, тогда для того, чтобы ядро Вольтерра $K_N(t, s_1, \dots, s_N)$ имело вид

$$K_N(t, s_1, \dots, s_N) = \prod_{i=1}^N \left(M_N^{\frac{1}{N}} - \frac{L_N}{NM_N^{\frac{N-1}{N}}}(t - s_i) \right) \quad (3.136)$$

при $0 \leq s_1, \dots, s_N \leq t \leq T$, $T \leq \frac{NM_N}{L_N}$, необходимо и достаточно, чтобы

$$M_N = \max_{0 \leq s_2, \dots, s_N \leq t \leq T} |K_N(t, t, s_2, \dots, s_N)|,$$

$$L_N = \max_{0 \leq s_1, \dots, s_N \leq t \leq T} |(K_N(t, s_1, \dots, s_N))'_t|.$$

Таким образом данные тестовые уравнения могут быть применены для анализа области существования решения полиномиального интегрального уравнения и прогнозирования значения T^* верхней оценки правого конца временного отрезка.

3.2.4. Численные методы решения квадратичного уравнения Вольтерра I рода

В работе [19] для квадратичного уравнения Вольтерра I рода (3.115) рассмотрена простейшая квадратурная формула правых прямоугольников. Остановимся на ней подробнее.

Вводя сетку с шагом h , узлы которой $t_i = ih$, где $i = \overline{1, n}$, $nh = T$, и переходя в (3.115) от интегралов к суммам, в очевидных обозначениях получим СНАУ

$$h \sum_{j=1}^i K_{1,i,j} x_j^h + h^2 \sum_{j=1}^i \sum_{l=1}^i K_{2,i,j,l} x_j^h x_l^h = y_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.137)$$

Для вычисления сеточной аппроксимации $x(t)$ в i -м узле из (3.137) имеем квадратное уравнение относительно x_i^h

$$h^2 K_{2,i,i,i} (x_i^h)^2 + \left\{ h K_{1,i,i} + h^2 \left[\sum_{j=1}^{i-1} (K_{2,i,j,i} + K_{2,i,i,j}) x_j^h \right] \right\} x_i^h = y_i + \psi_i, \quad (3.138)$$

где

$$\psi_i = h \sum_{j=1}^{i-1} K_{1,i,j} x_j^h + h^2 \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{l=1}^{i-1} K_{2,i,j,l} x_j^h x_l^h, \quad i = \overline{2, n}, \quad (3.139)$$

а x_1^h удовлетворяет квадратному уравнению

$$h^2 K_{2,1,1,1} (x_1^h)^2 + h K_{1,1,1} x_1^h - y_1 = 0, \quad (3.140)$$

причем выбор нужного корня (3.140) определяется условием

$$x_1^h \xrightarrow{h \rightarrow 0} x(0) = \frac{y'(0)}{K_1(0, 0)}. \quad (3.141)$$

Согласно [19], численные примеры показывают, что квадратура правых прямоугольников дает первый порядок сходимости.

Если в качестве базового используется метод квадратур, имеющий в линейном случае алгебраический порядок точности выше первого, например, метод средних прямоугольников, то алгоритм нахождения решения сводится к решению СНАУ

$$h \sum_{j=1}^i K_{1,i,j-\frac{1}{2}} x_{j-\frac{1}{2}}^h + h^2 \sum_{j=1}^i \sum_{l=1}^i K_{2,i,j-\frac{1}{2},l-\frac{1}{2}} x_{j-\frac{1}{2}}^h x_{l-\frac{1}{2}}^h = y_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.142)$$

При этом алгоритм средних прямоугольников уже дает второй порядок сходимости. Отметим, что решение (3.137) и (3.142) ищется в предположении, что оно существует на $[0, T]$.

Тестовые расчеты для (3.137) и (3.142) приведены в [19]. Вопрос о сходимости методов правых и средних прямоугольников исследован А.С. Апарциным в [18].

Несмотря на достаточно разработанную методику численного решения (3.115) на основе кубатур правых (левых) и средних прямоугольников, остается открытым вопрос, связанный с тем, каким методом проводилась идентификация квадратичного ($N = 2$) полинома Вольтерра (1.13). Очевидно, что методы, предложенные в [19], возможно применять только в случае, если известны сами ядра Вольтерра. В то же время, если для идентификации полинома Вольтерра используется методика, изложенная в параграфе 3.1, то необходима модификация численных методов решения (3.115).

В статье [163] П. Линзом предложен и обоснован численный метод для решения линейного интегрального уравнения Вольтерра I рода. Его особенность состоит в применении метода ИП [186], уже рассмотренного в параграфах 3.1.1, 3.1.2 и 3.1.3. Напомним, что метод эффективно применяется в случае, если подынтегральная функция является произведением двух функций и одна из них (для определенности, например, ядро интегрального уравнения) сильно осциллирующая. Линзом показано, что в этом случае использование метода ИП существенно увеличивает точность численного решения.

Как и в случае с методами правых и средних прямоугольников, адаптируем метод ИП к квадратичному уравнению Вольтерра I рода.

Выпишем аппроксимацию (3.115) на основе метода интегрирования произведения:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^i x_{j-\frac{1}{2}} \int_{(j-1)h}^{jh} K_1(t_i, s) ds + \\ & + \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i x_{j-\frac{1}{2}} x_{k-\frac{1}{2}} \int_{(j-1)h}^{jh} \int_{(k-1)h}^{kh} K_2(t_i, s_1, s_2) ds_1 ds_2 = y_i, i = \overline{1, n}, nh = T. \end{aligned} \quad (3.143)$$

Согласно уже принятым в параграфе 3.1 обозначениям (3.9), перепишем (3.143) в более компактной форме:

$$\sum_{j=1}^i x_{j-\frac{1}{2}} m_{i,j} + \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i x_{j-\frac{1}{2}} x_{k-\frac{1}{2}} p_{i,j,k} = y_i, i = \overline{1, n}, nh = T. \quad (3.144)$$

Аналогично случаю правых и средних прямоугольников, (3.144) сводится к решению квадратного уравнения относительно $x_{i-\frac{1}{2}}^h$:

$$p_{i,i,i} (x_{i-\frac{1}{2}}^h)^2 + \left[m_{i,i} + \left(\sum_{j=1}^{i-1} (p_{i,i,j} + p_{i,j,i}) x_{j-\frac{1}{2}}^h \right) \right] x_{i-\frac{1}{2}}^h = y_i + \psi_i, i = \overline{2, n}, \quad (3.145)$$

где

$$\psi_i = \sum_{j=1}^{i-1} m_{i,j} x_{j-\frac{1}{2}}^h + \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{l=1}^{i-1} p_{i,j,l} x_{j-\frac{1}{2}}^h x_{l-\frac{1}{2}}^h.$$

Описание программы и иллюстрация работы ИП-метода в сравнении с методом средних прямоугольников приведены в главе 4.

3.2.5. Интегральное преобразование для анализа частотных характеристик

КЛАССИЧЕСКОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ГИЛЬБЕРТА-ХУАНГА

В диссертационной работе помимо задачи идентификации полиномов Вольтерра для моделирования нелинейных динамических систем, рассматривается задача связанная с идентификацией механизмов, которые порождают заданный временной ряд. Эта задача решается с помощью техники ПГХ,

поэтому для полноты изложения полученных результатов, рассмотрим классическое ПГХ более подробно.

ПГХ состоит из двух независимых частей: метода разложения на эмпирические моды (Empirical Mode Decomposition, EMD) и преобразования Гильберта (ПГ). Основная идея EMD состоит в разложении исследуемого сигнала $x(t)$ на эмпирические базисные функции (Intrinsic Mode Function) с последующим применением к ним ПГ. Название таких функций в русскоязычной литературе, вообще говоря, еще не устоялось. Их называют эмпирическими модами, модальными функциями, характеристическими функциями, базисными функциями и даже, основываясь на дословном переводе английского названия, внутренними модовыми функциями. Все эти названия представляются не совсем точными и корректными, поэтому в дальнейшем, для лучшей ясности изложения, будем использовать сокращение от английского названия – IMF. Процедура декомпозиции $x(t)$ представляет собой итеративный процесс, который можно представить в виде блок-схемы (Рисунок 3.12).

Как видно из Рисунка 3.12, метод EMD включает в себя два цикла: внутренний цикл "отсеивания" и внешний цикл декомпозиции. На внутреннем цикле выделяются конкретные IMF, а на внешнем определяется их количество и производится завершение работы алгоритма, если выполнен выбранный критерий останова. При этом каждая полученная IMF должна удовлетворять двум следующим свойствам:

- число экстремумов и число пересечений оси абсцисс на заданном интервале должны совпадать;
- для любого t среднее значение, определяемое верхней и нижней огибающими, должно быть близко к нулю.

В данной работе критерий останова алгоритма на внутреннем уровне обеспечивается вышеуказанными свойствами IMF, при этом существуют и другие критерии останова [156; 158; 170]. Остановка на внешнем уровне или завершение работы алгоритма осуществляется, когда количество экстремумов в последней IMF меньше двух, при этом такая IMF называется остатком разложения.

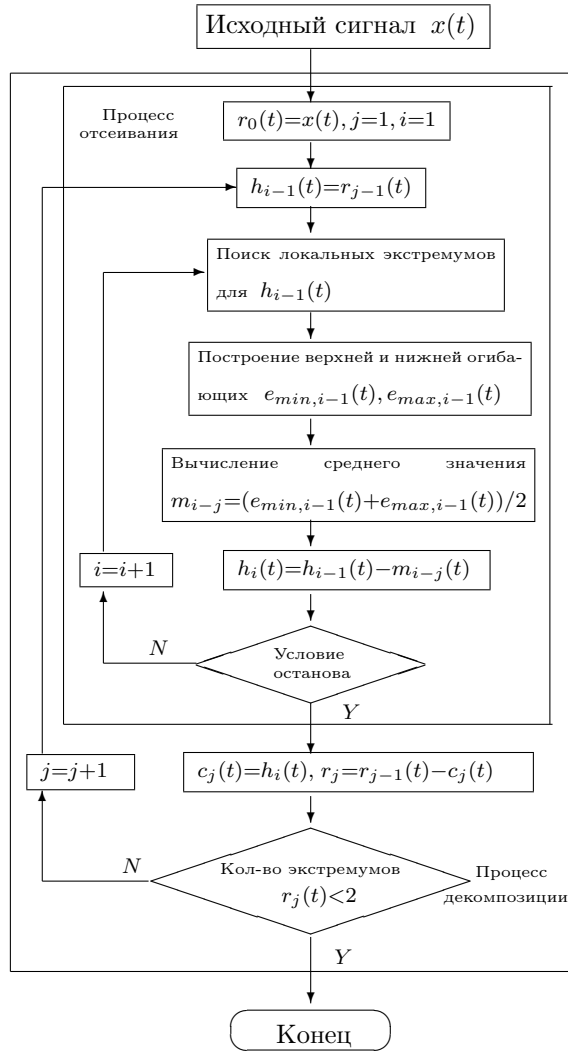


Рисунок 3.12 – Блок-схема метода разложения на IMF

После завершения работы алгоритма EMD любой сигнал $x(t)$ может быть представлен в следующем виде:

$$x(t) = \sum_{j=1}^n c_j(t) + r_n(t) = \sum_{i=1}^q c_i(t) + \sum_{j=q+1}^p c_j(t) + \sum_{k=p+1}^{n-1} c_k(t) + r_n(t), \quad (3.146)$$

где $q < p < n$, $c_1(t), \dots, c_q(t)$ – высокочастотные компоненты, $c_{q+1}(t), \dots, c_p(t)$ – компоненты, определяющие физические свойства ряда, и $c_{p+1}(t), \dots, c_{n-1}(t)$, $r_n(t)$ – трендовые и несинусоидальные компоненты, при этом $r_n(t)$ является остатком разложения. Стоит отметить, что, в отличие от стандартных методов обработки временных рядов, представленный метод получения IMF

вначале выделяет высокочастотные компоненты и заканчивает монотонной функцией или функцией с одним экстремумом. Некоторые тестовые примеры работы алгоритма EMD рассмотрены в [170].

Для демонстрации важных свойств ПГХ приведем следующий тестовый пример:

$$x(t) = \cos(2\pi 2t) + 2 \cos(2\pi 20t^2) + t \cos(2\pi 100t). \quad (3.147)$$

Особенностью предлагаемого сигнала является то, что частота во втором слагаемом и амплитуда в третьем зависят явно от t . Сигнал (3.147) графически представлен на Рисунке 3.13, а на Рисунке 3.14 показана первая итерация метода ПГХ и для наглядности приведен не весь сигнал, а только его треть. Пунктирной линией изображены верхняя и нижняя огибающие, обычной линией – средняя между огибающими, жирной линией – исходный сигнал, для наглядности изображенный только на треть.

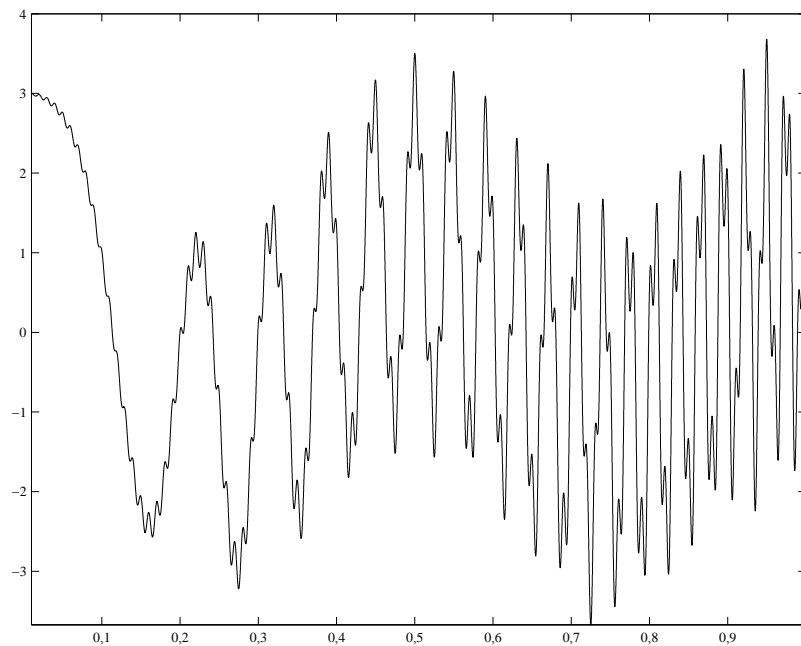


Рисунок 3.13 – Тестовый сигнал (3.147)

Итогом разложения сигнала (3.147) будут три IMF, которые практически совпадают с тремя составляющими сигнала, а в сумме в точности ему равны. Полученные IMF представлены на Рисунке 3.15.

Следующий этап в технике ПГХ состоит в применении к каждой IMF ПГ. Это позволяет выделить из данной IMF две составляющие: амплитудную и

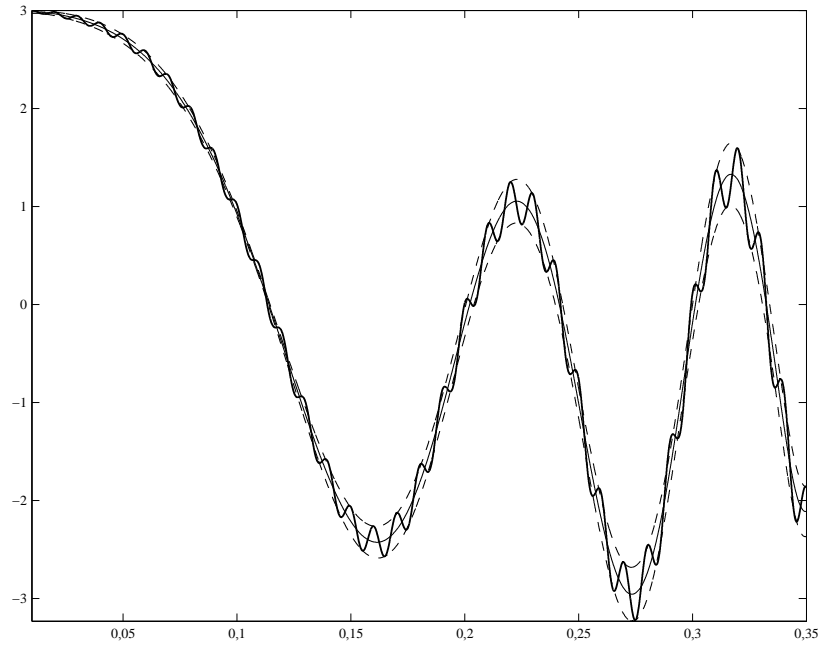


Рисунок 3.14 – Результат первой итерации для (3.147).

фазовую. Рассмотрим это более подробно для произвольного действительного сигнала $x(t)$.

Дополним сигнал $x(t)$ до аналитической функции

$$z(t) = x(t) + ix_H(t), \quad (3.148)$$

где $x_H(t)$ – преобразование Гильберта, определяемое как

$$x_H(t) = \frac{1}{\pi} P.V. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(s)}{t-s} ds. \quad (3.149)$$

Интеграл в (3.149) понимается в смысле главного (P.V. – principal value) значения Коши. Перепишем (3.148) в экспоненциальной форме

$$z(t) = A(t)e^{i\psi(t)}, \quad (3.150)$$

где

$$A(t) = \sqrt{x^2(t) + x_H^2(t)} \quad (3.151)$$

– мгновенная амплитуда, а

$$\psi(t) = \operatorname{arctg} \frac{x_H(t)}{x(t)} \quad (3.152)$$

– фаза исходного сигнала $x(t)$. Тогда, согласно определению, производная от (3.152) определяет мгновенную частоту

$$\omega(t) = \dot{\psi}(t) = \frac{d}{dt} \operatorname{arctg} \frac{x_H(t)}{x(t)}. \quad (3.153)$$

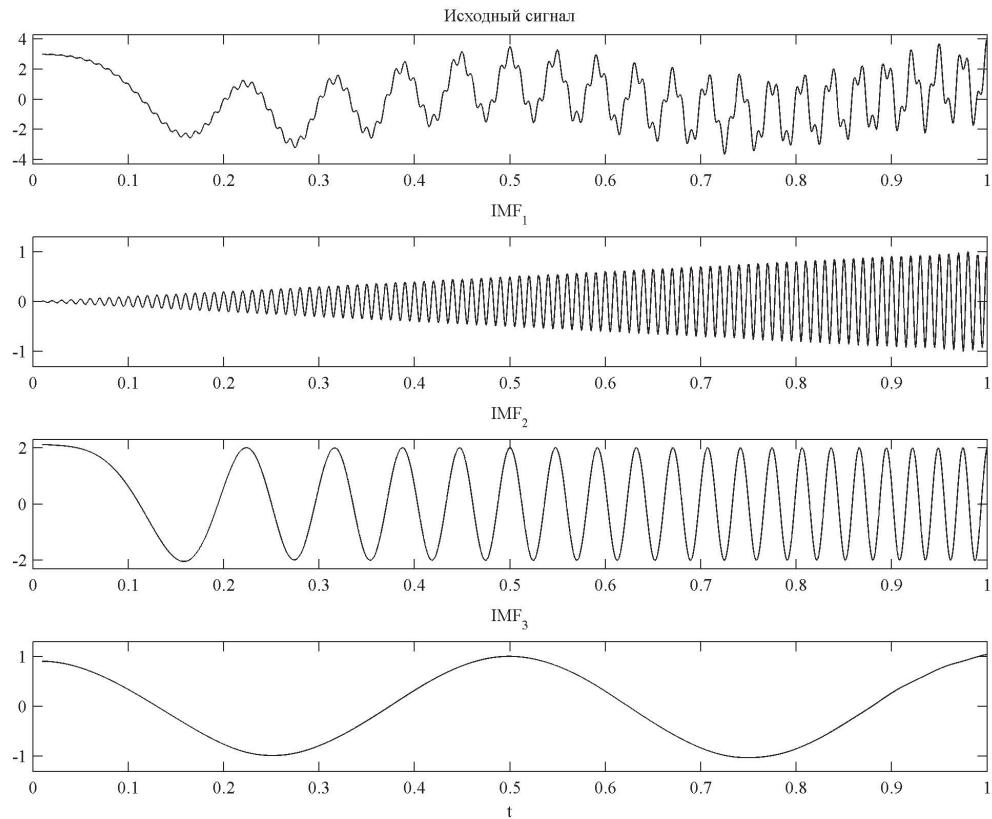


Рисунок 3.15 – Исходный сигнал (3.147) и соответствующие ему IMF

С учетом (3.151) и (3.153) исходный сигнал можно представить в следующей форме:

$$x(t) = \text{Real} \left\{ \sum_{j=1}^n A_j(t) e^{i \int_0^t \omega_j(s) ds} \right\}. \quad (3.154)$$

В (3.154) остаток r_n может быть отброшен, а может быть включен в зависимости от задачи и физических предположений. Отметим, что в представление (3.154) амплитуда и частота входят как функции времени и называются мгновенными амплитудой и частотой. В силу этого факта представление сигнала через набор IMF принципиально отличается от представления Фурье

$$x(t) = \text{Real} \left\{ \sum_{j=1}^n a_j e^{i \omega_j t} \right\},$$

где a_j и ω_j являются константами. Таким образом, ПГХ представляет собой обобщенное преобразование Фурье. Формула (3.154) позволяет представить мгновенные амплитуды и частоты как функции времени в трехмерном

пространстве. Это частотно-временное распределение амплитуд определяется как спектр Гильберта

$$H(\omega, t) = \sum_{j=1}^n A_j(t) e^{i \int \omega_j(s) ds}.$$

Дополнительно к спектру Гильберта Хуангом [158] определен маргинальный спектр

$$h(\omega) = \int_0^T H(\omega, s) ds, \quad (3.155)$$

который представляет собой общий (суммарный) вклад амплитуды (или энергии), соответствующей каждой мгновенной частоте на протяжении всей длины сигнала. Детальное исследование свойств спектра Гильберта, маргинального спектра и их сравнение со спектром Фурье приведено в работе [157].

Вернемся к иллюстративному примеру (3.147). Вычислим спектр Гильберта для каждой IMF из Рисунка 3.15. Полученные мгновенные амплитуды и частоты представлены на Рисунках. 3.16 и 3.17.

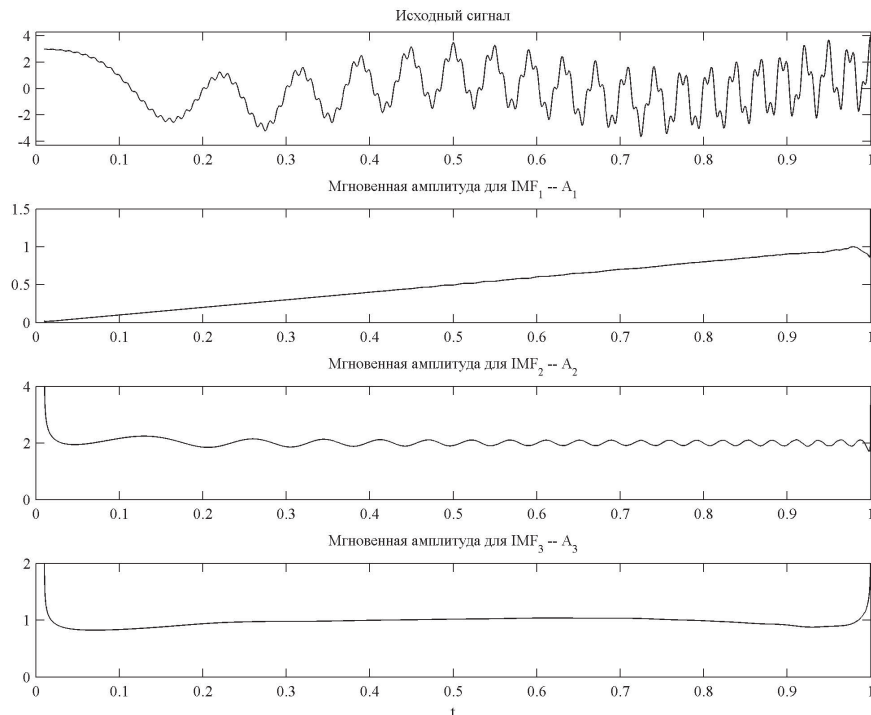


Рисунок 3.16 – Мгновенные амплитуды для разложения, представленного на Рисунке 3.15

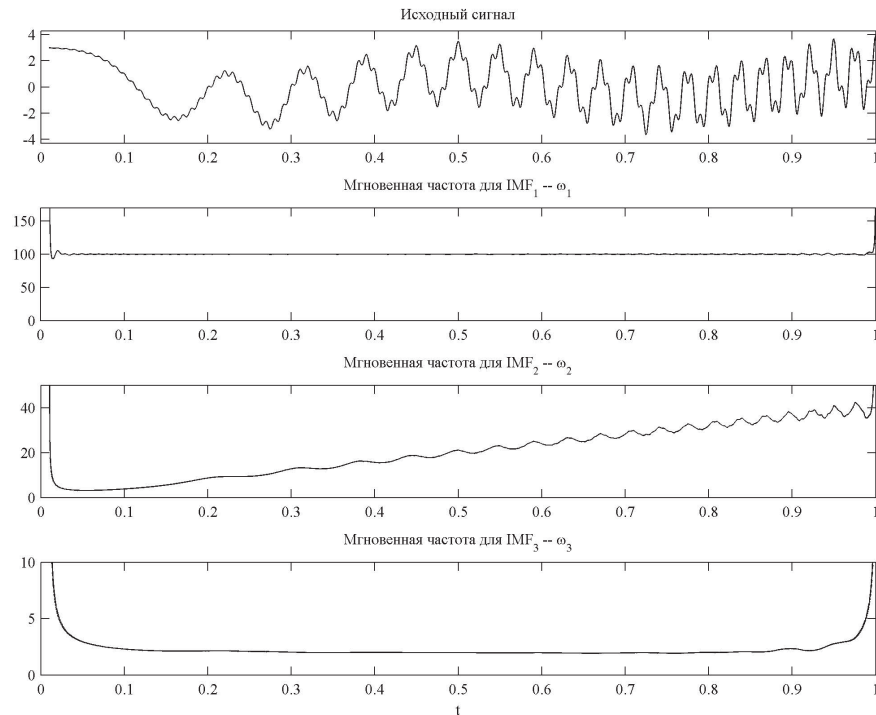


Рисунок 3.17 – Мгновенные частоты для разложения, представленного на Рисунке 3.15

Из Рисунков 3.16 и 3.17 видно, что все входящие в сигнал (3.147) амплитуды и частоты определились. Особенно стоит отметить определение мгновенных амплитуд и частот, которые представляют собой функции с линейным ростом. На маргинальном спектре (Рисунок 3.18) можно видеть частоты всех трех слагаемых сигнала (3.147). Линейный рост частоты второго слагаемого показан на спектре горизонтальной чертой от 20 до 40 герц.

В заключение отметим, что ПГХ, в отличие от Фурье- и вейвлет-анализа, не имеет достаточной разработанной теоретической базы. Остаются открытыми или мало изученными многие важные вопросы, например, такие, как неединственность разложения на IMF, выбор критерия останова, проблема построения верхней и нижней огибающих (выбор метода интерполяции), граничные эффекты, возникающие при вычислении мгновенных амплитуд и частот.

Перейдем к модифицированному ПГХ.

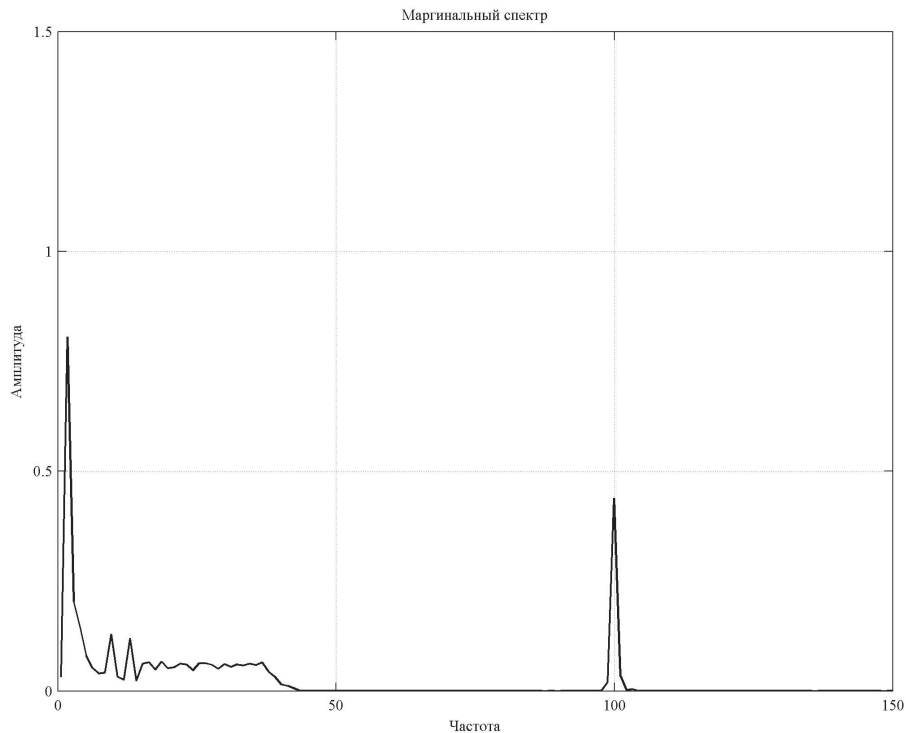


Рисунок 3.18 – Маргинальный спектр

МОДИФИЦИРОВАННОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ГИЛЬБЕРТА-ХУАНГА

В работах [142; 182; 184] представлены модификации преобразования Гильберта-Хуанга с использованием белого шума. Остановимся на одной из них более подробно.

Метод EMD, входящий в ПГХ, помимо своих очевидных достоинств, таких как адаптивность и зависимость только от исходных данных, имеет и определенные недостатки, связанные с наличием в одной IMF осцилляций, слишком различных по амплитуде значений, или распределением по нескольким IMF одной осцилляции. Оба этих недостатка получили название "смешивание мод"¹. Для преодоления этих трудностей был предложен новый метод Ensemble EMD (EEMD) [184], основанный на применении EMD к ансамблю "исходный сигнал плюс белый шум" с последующим осреднением по ансамблю². Согласно свойствам EMD из [149], предложенная процедура позволяет решить проблему "смешивания мод", однако имеет свои новые

¹В этом параграфе, во избежание путаницы, под модой будем понимать одну IMF.

²Под ансамблем здесь подразумевается набор различных (по какому либо критерию) разложений исходного сигнала.

недостатки, основные из которых – неодинаковое количество IMF в разных разложениях ансамбля и большая вычислительная сложность. Предложенная в [142; 182] вариация EEMD предлагает помимо сохранения преимуществ EEMD преодолеть и его недостатки.

Кратко рассмотрим эту вариацию, получившую название CEEMDAN (Complete Ensemble Empirical Mode Decomposition with Adaptive Noise).

Определим оператор $E_j(\cdot)$, который для заданного сигнала производит j -ю моду с помощью EMD. Пусть ω^i есть белый шум с $N(0, 1)$. Тогда для заданного сигнала $x[n]$ метод CEEMDAN можно описать с помощью следующего алгоритма:

- 1) применим обычный EMD к I реализациям $x[n] + \varepsilon_0 \omega^i[n]$, $i = \overline{1, I}$, и получим первую моду

$$\widetilde{IMF}_1[n] = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I IMF_1^i[n];$$

- 2) для $k = 1$ подсчитаем первый остаток

$$r_1[n] = x[n] - \widetilde{IMF}_1[n];$$

- 3) разложим реализации $r_1[n] + \varepsilon_1 E_1(\omega^i[n])$, $i = \overline{1, I}$, до их первой моды и определим вторую

$$\widetilde{IMF}_2[n] = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I E_1(r_1[n] + \varepsilon_1 E_1(\omega^i[n]));$$

- 4) для $k = 2, \dots, K$ вычислим k -й остаток:

$$r_k[n] = r_{k-1}[n] - \widetilde{IMF}_k[n];$$

- 5) так же, как и в шаге 3, найдем $(k + 1)$ -ю моду:

$$\widetilde{IMF}_{k+1}[n] = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I E_1(r_k[n] + \varepsilon_k E_k(\omega^i[n]));$$

- 6) повторяем шаг 4 для следующих k , пока не получим остаток, который удовлетворяет заданному критерию останова (например, критерию, указанному в параграфе 3.2.5). В этом случае алгоритм останавливается, а последний остаток имеет следующий вид:

$$R[n] = x[n] - \sum_{k=1}^K \widetilde{IMF}_k,$$

где K – количество полученных мод.

Таким образом, исходный сигнал $x[n]$ можно представить в следующем виде:

$$x[n] = \sum_{k=1}^K \widetilde{IMF}_k + R[n]. \quad (3.156)$$

Формула (3.156), в отличие от EEMD, делает предложенную декомпозицию завершённой и даёт точную реконструкцию исходного сигнала.

Отметим, что коэффициенты ε_i позволяют на каждом этапе выбирать различные значения отношения среднего значения амплитуды сигнала к среднему значению амплитуды шума. В работе [184] авторами предлагается использовать маленькие амплитуды шума для сигналов, находящихся преимущественно в высокочастотной области, и наоборот.

ИССЛЕДОВАНИЕ ЧАСТОТНО-ИЗБИРАТЕЛЬНЫХ СВОЙСТВ КЛАССИЧЕСКОГО И МОДИФИЦИРОВАННОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГИЛЬБЕРТА-ХУАНГА

При изучении временных рядов теплофизической природы с помощью классического ПГХ проблема "смешивания мод" довольно сильно проявляется и существенно затрудняет анализ полученных составляющих. Это связано с тем, что такие временные ряды описывают нестационарные сигналы и нелинейные сигналы, амплитудные и частотные характеристики которых изменяются очень быстро. Поэтому в данном параграфе приведем методику, позволяющую проводить оценку декомпозиций произведенных классическим ПГХ и модифицированным ПГХ с учетом выбора различных параметров, входящих в мПГХ.

Для конкретики рассмотрим один ряд из серии временных рядов, которые представляют собой автоколебания давления. Наиболее доступным средством анализа динамики межфазной поверхности являются результаты измерения давления в жидкости с применением высокочастотных датчиков.

Полученные ряды данных, один из них представлен на Рисунке 2.12, в дальнейшем обрабатывались методами ПГХ и мПГХ. Анализ динамики межфазной поверхности заключается в изучении полученных после декомпозиции IMF и их частот.

Исследование проводилось в пакете прикладных программ MATLAB R2013b с использованием алгоритмов ПГХ и мПГХ, приведенных в [172].

Согласно методу мПГХ, для разложения исходного сигнала необходимо задать три параметра: амплитуду белого шума (NS), размер ансамбля (EN) и количество итераций для работы классического метода EMD. Количество итераций для метода EMD не играет существенной роли и по сути служит удобным аналогом критерия останова метода на внутреннем уровне. В то же время параметры NS и EN являются важными параметрами для получения качественной декомпозиции. Вообще оценку качества декомпозиции и важности полученных IMF можно проводить по-разному. Например, в [185] предлагается использовать статистические оценки, позволяющие оценить, насколько энергия конкретного IMF больше энергии белого шума. Такие оценки позволяют только определить, является ли конкретная IMF белым шумом или нет, но совершенно не касаются проблемы качества самих IMF. Поэтому в работе под качественной декомпозицией мы будем понимать такое разложение исследуемого сигнала, которое, по возможности, состоит из "несмешанных" IMF. При этом будем предполагать, что каждая "несмешанная" IMF соответствует одному из физических процессов. Соответствие конкретной IMF тому или иному процессу определяется особенностями самого исследуемого сигнала и экспертом. Демонстрацию качественной и некачественной декомпозиции с помощью метода EMD и семейства методов CEEMDAN с различными параметрами NS и EN покажем на уже выбранном сигнале (Рисунок 2.12).

В результате разложения сигнала методами EMD и CEEMDAN с различными NS и EN получены различные наборы IMF, содержащие 12-15 составляющих и монотонный остаток. Оценка качества такого набора IMF заключается в анализе частотного состава IMF, входящих в этот набор. Для оценки "смешанности" IMF будем использовать метод спектральной плотности мощности (СПМ). Существует несколько алгоритмов для оценки СПМ

сигнала, основанных на использовании только значений исходного временного ряда: метод периодограмм, методы модифицированных периодограмм (Даньелла, Бартлетта, Уэлча) и метод Блэкмана-Тьюки. В настоящей работе используется периодограмма Уэлча, так как ее оценка СПМ является асимптотически несмещенной и состоятельной и, как следствие, менее осциллирующей, чем у других методов.

Для начала покажем принципиальное отличие методов EMD и CEEMDAN с разумно выбранными параметрами амплитуды шума и размера ансамбля, например, как предлагается в [182], $NS = 0,02$ и $EN = 500$. После декомпозиции с помощью предложенных методов получим два набора IMF, представленных на Рисунке 3.19.

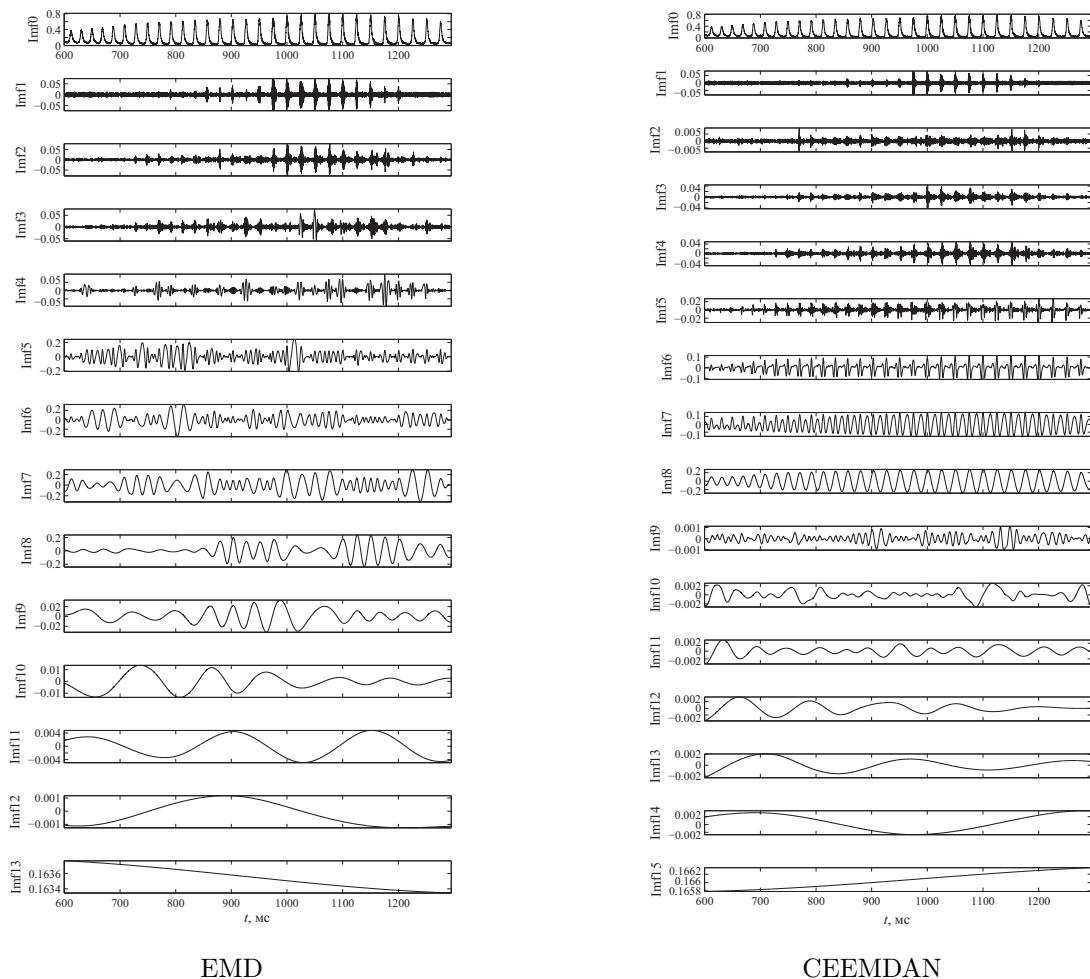


Рисунок 3.19 – Наборы IMF для методов EMD и CEEMDAN

Для удобства разделим оба набора IMF на три группы по частоте с одинаковым количеством составляющих для обоих методов. В первую группу

буду входить высокочастотные компоненты (IMF1-IMF5), во вторую группу средне- и низкочастотные (IMF6-IMF8), а в третью группу буду входить составляющие с очень низкими амплитудами (IMF9-IMF14), которые не несут важной информации о сигнале и могут быть отброшены. В эту группу попадает и 2-я IMF, полученная с помощью SEEMDAN, которая тоже имеет слишком низкую амплитуду и не влияет на формирование исходного сигнала. Применение периодограммы Уэльча к первым двум группам IMF позволяет сравнить СПМ двух методов. Для большей наглядности покажем СПМ только для составляющих из второй группы. Из графиков на Рисунке 3.20 хорошо видно, что метод SEEMDAN позволяет разделить составляющие с достаточно явно выраженной частотой в отличие от EMD, составляющие которого имеют гораздо более размазанную структуру и совпадающую частоту. Для первой (высокочастотной) группы применение СПМ дает аналогичный результат. Отметим, что получение "несмешанного" (в той или иной степени) набора IMF возможно для достаточно широкого разброса параметров, влияющих на работу алгоритма SEEMDAN. Это показывает, что метод SEEMDAN позволяет существенно лучше проводить декомпозицию исходного сигнала для определения частот конкретных IMF. Однако, как видно из Рисунка 3.20, IMF все же смешиваются, так IMF7 имеет две ярко выраженных частоты, а IMF6 вообще размазана по всему частотному спектру, поэтому естественно подобрать наилучшие значения амплитуды шума и размера ансамбля для получения наиболее "несмешанного" набора составляющих (IMF). Как и выше, для оценки качества IMF будем использовать метод оценки СПМ.

Рассмотрим варианты выбора параметров разложения метода SEEMDAN для того же сигнала. Согласно рекомендациям [182], EN достаточно выбрать равным 500. В то же время результаты расчетов, приведенные в [80], показывают, что уже при $EN \geq 100$ декомпозиция сигналов различной природы является вполне приемлемой, это означает, что полученные разложения практически не отличаются друг от друга и повышение размера ансамбля не несет какого либо смысла. Однако для сигнала, исследуемого в работе, как и для других теплофизических сигналов, выбор EN оказался чувствителен к амплитуде шума NS : чем выше NS , тем больше надо выбирать EN . Поэтому для качественного усреднения при выделении высокочастотных компонент

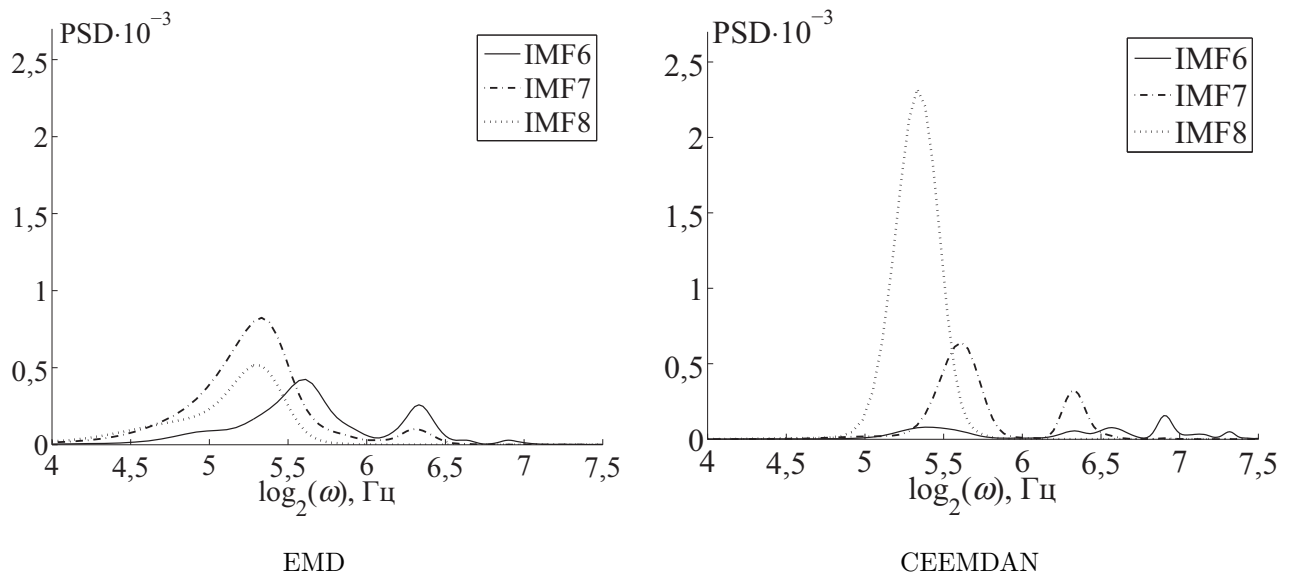


Рисунок 3.20 – СПМ группы среднечастотных IMF для методов EMD и CEEMDAN

сигнала в дальнейших расчетах был выбран параметр $EN = 500$. Дальнейшее увеличение размера ансамбля не дает заметного результата, но при этом требует гораздо больших вычислительных ресурсов. Более существенным в получении качественной декомпозиции является изменение параметра амплитуды белого шума NS . Рассмотрим этот параметр более подробно.

Для сигнала, представленного на Рисунке 2.12, проведены декомпозиции при разных значениях NS . Были рассмотрены разложения с отклонением шума в диапазоне от 0,002 до 0,3 с шагом 0,002. Так как основная энергия сигнала содержится в шестой, седьмой и восьмой IMF, то в дальнейшем будем рассматривать на предмет смешанности именно эти составляющие. Отметим, что для значений $N < 0,018$ декомпозиция напоминает декомпозицию, полученную с помощью классического метода EMD. Это объясняется очень маленькими значениями NS . При таких значениях происходят сильные смешивания одних IMF в другие, как показано на Рисунке 3.21a). Уже с $0,018 < NS < 0,06$ IMF начинают разделяться (Рисунок 3.21b)), однако только со значения $NS = 0,06$ IMF полностью разделяются. Максимально качественная декомпозиция, которую удалось получить, получается при значениях $0,066 \leq NS \leq 0,08$. В этом интервале происходит максимальное разделение, и амплитуды разделенных IMF достигают своих максимальных значений. На Рисунке 3.21b) приведен СПМ для $NS = 0,07$. При этом уже

для $NS = 0,1$ ситуация начинает ухудшаться и опять происходит эффект "смешивания мод". На Рисунке 3.21с) хорошо видно, как энергия 8-й IMF частично перешла в 7-ю, а сама 7-я IMF смешалась с 6-й. Таким образом, при $NS = 0,07$ получаем декомпозицию (см. Рисунок 3.21b)), в которой наиболее чисто выделяются составляющие с частотой около 44 Гц и 85 Гц, соответствующие 7-й и 8-й IMF, и более зашумлено, составляющая с частотой около 114 Гц – 6-я IMF. Отметим, что подбор амплитуды шума позволяет полностью очистить восьмую IMF и наиболее качественно и точно определить ее частоту, в то время как шестую и седьмую IMF не удалось полностью разделить, что может говорить о дефекте метода или о действительном (физическом) содержании двух и более частот в этих составляющих.

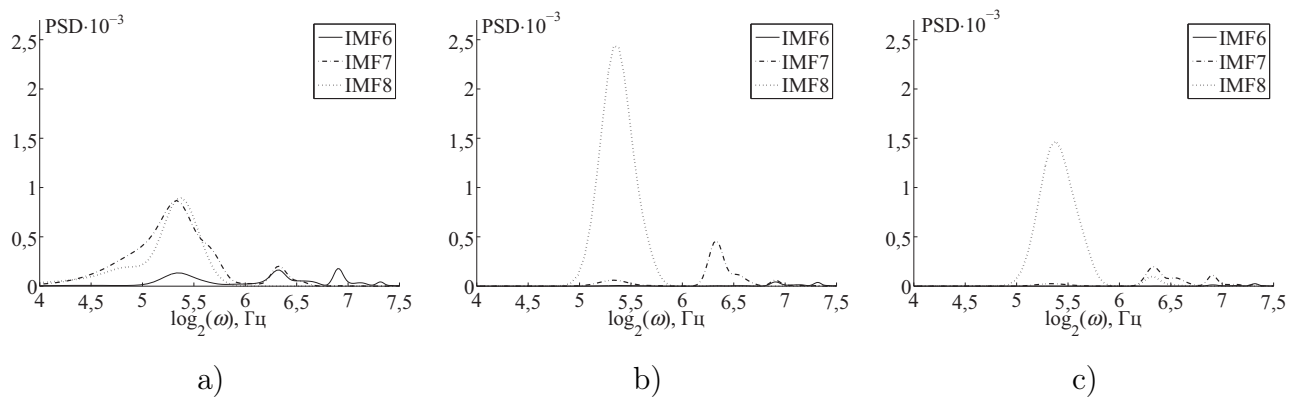


Рисунок 3.21 – СПМ для 6, 7 и 8 IMF, полученных с помощью метода CEEMDAN при значениях амплитуды шума: а) $NS = 0,01$; б) $NS = 0,07$; в) $NS = 0,2$.

3.3. Выводы

В главе рассмотрены математические подходы и методы, которые необходимы для решения возникающих задач идентификации, управления и моделирования нелинейных динамических систем различной природы. В частности, рассмотрен новый подход для идентификации полиномов Вольтерра. В основе этого подхода лежит идея поиска не самих ядер Вольтерра, а интегралов от них. В этом случае задача идентификации полинома Вольтерра сводится к задаче нахождения интегралов от ядер, при этом вместо реше-

ния многомерных интегральных уравнений достаточно решить набор соответствующих СЛАУ. Как и в других подходах (один из них предложен в параграфе 1.1.2), в качестве входных сигналов взято семейства тестовых сигналов в терминах функции Хевисайда с отклоняющимся аргументом. С помощью описанного подхода построены полиномы Вольтерра второй и третьей степени. Для этих полиномов проведена оптимизация амплитуд входных сигналов.

В качестве второго подхода рассмотрена задача о исследовании разрешимости в пространстве непрерывных функций полиномиальных уравнений Вольтерра. Эти исследования проводились с помощью аппарата мажорантных уравнений. Важную роль при исследовании разрешимости полиномиальных уравнений играет функция Ламберта. С помощью мажорантных уравнений получены ограничения на правый конец отрезка $[0, T]$.

Далее представлен метод ИП для численного решения интегрального квадратичного уравнения Вольтерра. Отдельным параграфом вынесены исследования непрерывного решения полиномиального уравнения при $N > 2$ с помощью тестовых уравнений Вольтерра.

В последний параграф входят математические аспекты ПГХ. Приведены два метода: классическое ПГХ и модифицированное ПГХ и проведено их сравнение на сигнале автоколебаний давления, взятом в качестве тестового. Приведена методика, которая позволяет оценить, какой из методов и при каких параметрах дает более качественную декомпозицию исходного сигнала для применения ПГ.

Глава 4. Программные комплексы и численные эксперименты

Для тестирования и применения представленных в главе 3 методик и алгоритмов были разработаны специализированные программные комплексы и программы. С помощью этих программных комплексов (ПК) были проведены различные численные эксперименты, позволяющие выявить те или иные свойства предлагаемых подходов и получить важные практические результаты для реальных технических задач. В основе этих комплексов лежат различные программные средства, позволяющие решить конкретную задачу. Так, на языке пакета MATLAB был разработан программный комплекс для идентификации квадратичной и кубичной моделей для двух динамических систем: математической динамической системы и цифрового двойника объекта Назаровской ГРЭС. Полученные результаты позволили протестировать построенные модели на практике и провести тщательный анализ погрешности моделирования. С помощью математического пакета MAPLE [165] была создана программа для численного решения квадратичного интегрального уравнения Вольтерра I рода различными квадратурными методами. В среде Borland C++ Builder на языке Pascal была разработана программа идентификации кубичного полинома Вольтерра с помощью ИП-метода для моделирования переходного процесса в теплообменном аппарате. Она была адаптирована для применения в ПВК "Динамика" [91]. Для задачи анализа временно-го ряда динамики давления использовался пакет ПГХ [172] и статистические процедуры и методы, входящие в пакет MATLAB.

4.1. Программный комплекс для моделирования нелинейных динамических систем различной природы с помощью квадратичного и кубичного полиномов Вольтерра

Параграф посвящен описанию ПК, который позволяет идентифицировать квадратичный и кубичный полиномы Вольтерра для различных ди-

намических систем, допускающих входные воздействия ступенчатого вида. Программный комплекс разрабатывался в течение нескольких лет в виде различных модулей. Особенностью предлагаемого ПК является возможность добавления любой динамической системы как заданной в виде некоторой "эталонной" модели, так и в виде массивов входных и выходных значений. В представленном в диссертации ПК уже запрограммированы модули для двух тестовых динамических систем: математической "эталонной" динамической системы, заданной в виде модели (3.42), и имитационной модели (цифрового двойника) участка пароводяного тракта Назаровской ГРЭС, представленной в виде входных и выходных сигналов, полученных с помощью ПК "P150".

4.1.1. Краткая характеристика программного обеспечения

Программный комплекс создан с целью построения и тестирования интегральных моделей нелинейной динамики. Комплекс разработан в системе компьютерной математики MATLAB и основан на функционально-модульном принципе. По функциональным признакам пакет можно разделить на следующие программные модули:

- модули идентификации квадратичной и кубической моделей;
- модули, в которых задана исследуемая имитационная система;
- модули с откликами исследуемой системы на серию тестовых сигналов в виде комбинаций функций Хевисайда;
- главный модуль программы, в котором происходит подключение исследуемой системы, выбор квадратичной и/или кубической модели, вычисление переходных характеристик (интегралов от ядер) и построение интегральной и имитационной моделей на заданный тестовый сигнал.

В главном модуле программы находятся настройки входных параметров, таких как:

- шаг дискретизации,

- длина временного отрезка,
- амплитуды тестовых входных сигналов,
- выбор степени полинома (квадратичный и/или кубичный полином),
- выбор подключаемой динамической системы.

В модуле идентификации заданы формулы вычисления интегралов от ядер по формулам (3.14), (3.15) для квадратичной модели и по (3.35)–(3.41) для кубичной.

В модулях, посвященных заданной динамической системе, вычисляются сеточные аналоги откликов имитационной математической модели этой динамической системы на тестовые входные сигналы или набираются массивы откликов из заданных файлов, полученных либо на реальном объекте, либо с помощью другой программы.

Архитектура ПК, в которой представлены модули, блоки и их связи между собой, показана на Рисунке 4.1.

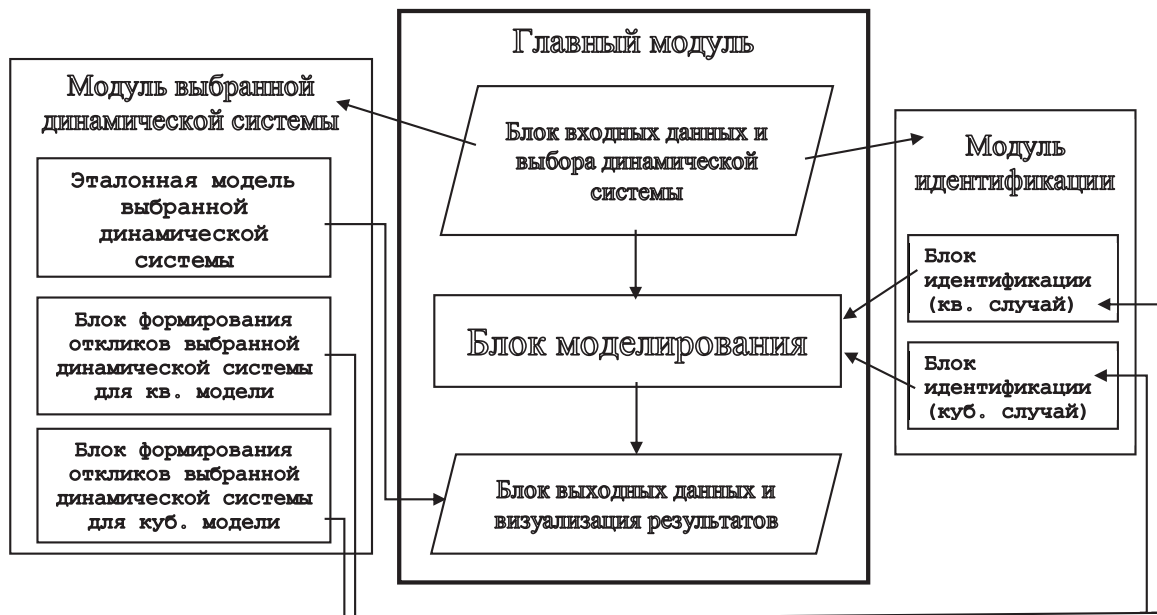


Рисунок 4.1 – Архитектура ПК

В итоге после задания всех параметров, выбора степени полинома и подключения исследуемой динамической системы в главном модуле запускается

модуль идентификации переходных характеристик (интегралов от ядер) системы и после этого – блок моделирования, в котором проводятся расчеты откликов на входные сигналы заданного (вообще говоря, произвольного) вида. Полученные отклики квадратичной и кубической моделей сравниваются с откликом имитационной модели на тот же самый входной сигнал. Важно отметить, что если динамическая система задана в виде массивов входных сигналов и откликов на них, то реакция системы на произвольный входной сигнал должна быть вычислена заранее и занесена в программу в виде численного массива.

Применение описанного ПК для моделирования математической "эталонной" динамической системы и энергоблока Назаровской ГРЭС мощностью 135 МВт дано в разделах 4.1.2 и 4.1.3 соответственно.

4.1.2. Построение квадратичного и кубического полиномов для математической эталонной модели

В главе 3 был рассмотрен метод идентификации нелинейных динамических систем на базе численного метода интегрирования произведения [186]. Были построены скалярные интегральные модели, в основе которых лежат квадратичный и кубический полиномы Вольтерра. В данном параграфе на примере математической "эталонной" динамической системы проиллюстрируем работу предлагаемых моделей с помощью описанного выше ПК.

Как и ранее, в качестве тестовой (эталонной) нелинейной динамической системы будем рассматривать систему вида

$$y_{et}(t) = \sum_{m=1}^N \frac{1}{m!} \left(\int_0^t x(s) ds \right)^m, \quad t \in [0, T]. \quad (4.1)$$

Рассмотрим сначала квадратичный случай. Подставляя сигналы (3.10) и (3.11) в эталонную модель (4.1), получим набор откликов $y_{i,j}$, необходимых при подсчете интегралов от ядер m и p .

Так, если $N = 3$, то, используя формулы обращения (3.14) и (3.15),

имеем

$$m_i^3 = -\frac{(\alpha\beta h^2 - 6)h}{6}, \quad (4.2)$$

$$p_{i,i}^3 = \frac{(\alpha h + 3 + \beta h)h^2}{6}, \quad (4.3)$$

$$p_{i,j}^3 = \frac{(1 + \alpha h(i - j))h^2}{2}. \quad (4.4)$$

В (4.2)–(4.4) и далее верхний индекс означает степень эталонной модели.

Итак, с учетом (4.2)–(4.4) квадратичная модель (3.8) полностью идентифицирована и имеет следующую структуру:

$$\begin{aligned} y_{sq}(t_i) = & \sum_{\mu=1}^i \left[-\frac{(\alpha\beta h^2 - 6)h}{6} \right] x_{i-\mu+1/2} + \sum_{\mu=1}^i \left[\frac{(\alpha h + 3 + \beta h)h^2}{6} \right] x_{i-\mu+1/2}^2 + \\ & + \sum_{\mu=1}^i \sum_{\nu=1, \mu \neq \nu}^i \left[\frac{(1 + \alpha h(\mu - \nu))h^2}{2} \right] x_{i-\mu+1/2} x_{i-\nu+1/2}, \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

При $N = 4$ формулы несколько усложнятся:

$$m_i^4 = \frac{(\beta h^3 \alpha^2 + 4\alpha\beta h^2 + \alpha\beta^2 h^3 - 24)h}{24}, \quad (4.6)$$

$$p_{i,i}^4 = \frac{(\alpha^2 h^2 + 4\alpha h + \alpha\beta h^2 + 12 + 4\beta h + \beta^2 h^2)h^2}{24}, \quad (4.7)$$

$$p_{i,j}^4 = \frac{h^2(12 - 12\alpha^2 h^2 ij + 12\alpha hi + 6\alpha^2 h^2 i^2 + \alpha^2 h^2 - 12\alpha hj + 6\alpha^2 h^2 j^2)}{24}. \quad (4.8)$$

Дальнейшее увеличение порядка эталонной модели приводит только к более сложной структуре m и p и при этом не вносит какой-либо специфики.

Аналогичные действия проведем с кубической моделью. Подставляя сигналы (3.22) и (3.11) в эталонную модель (4.1), получим набор откликов $y_{i,j,k}$, необходимых при подсчете интегралов от ядер m , p и q . Выпишем их только для случая $N = 4$:

$$m_i^4 = -\frac{(\alpha^2 \beta h^3 - 24)h}{24}, \quad (4.9)$$

$$p_{i,i}^4 = \frac{(\alpha^2 h^2)h^2 + 12}{24}, \quad (4.10)$$

$$p_{i,j}^4 = \frac{(6\alpha^2 h^2(i - j)^2 + \alpha^2 h^2 + 12)h^2}{24}, \quad (4.11)$$

$$q_{i,i,i}^4 = \frac{(\beta h + 4)h^3}{24}, \quad (4.12)$$

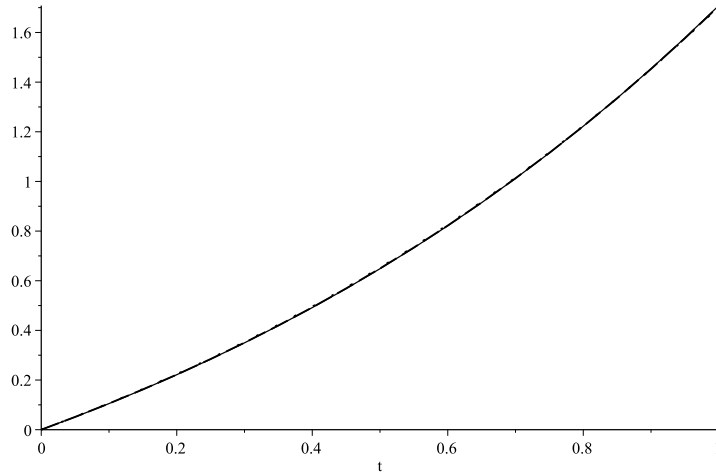


Рисунок 4.2 – Отклик эталона, квадратичной и кубической моделей на сигнал $x(t) = e(t)$

$$q_{i,i,j}^4 = \frac{(-2\alpha hi + 2\alpha hj + \alpha h + 2)h^3}{12}, \quad (4.13)$$

$$q_{i,j,j}^4 = \frac{(2\alpha hi - 2\alpha hj - \alpha h + 2)h^3}{12}, \quad (4.14)$$

$$q_{i,j,k}^4 = \frac{(\alpha hi - 2\alpha hj + \alpha hk + 1)h^3}{6}. \quad (4.15)$$

После того как обе модели построены, покажем их работу для нескольких типов сигналов. Построение обеих моделей для заданных тестовых сигналов производится в программе автоматически. При этом можно задавать, вообще говоря, произвольную степень эталонной модели. Для сравнения будем использовать квадратичную и кубическую модели для случая, когда в (4.1) $N = 4$.

Рассмотрим самый простой тестовый сигнал $x(t) = e(t)$ (Рисунок П.1.2), принадлежащий допустимому множеству входных сигналов вида (3.61).

Естественно, что для сигнала на Рисунке П.1.2 построение квадратичной и кубической моделей проводилось с использованием оптимальных амплитуд (3.68), (3.69), (3.73), (3.74) соответственно. Отклики квадратичной и кубической моделей в сравнении с эталонной приведены на Рисунке 4.2. При этом $T = 1$, $B = 1$, $h = 0,1$. На Рисунке 4.2 и всюду далее сплошной линией обозначена эталонная математическая модель, точками – квадратичная модель, а пунктиром – кубическая.

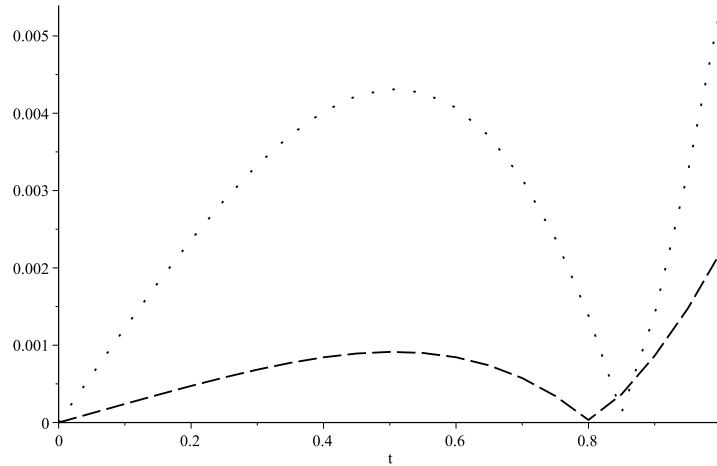


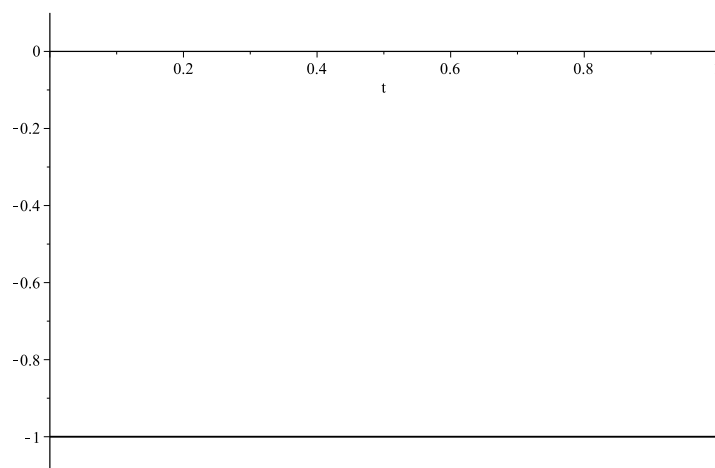
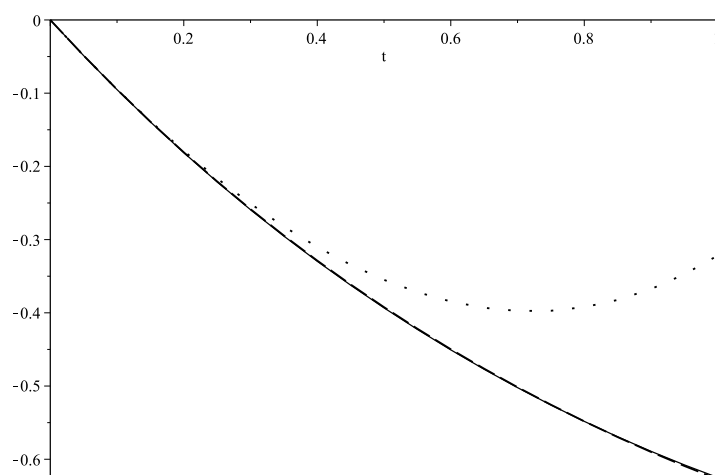
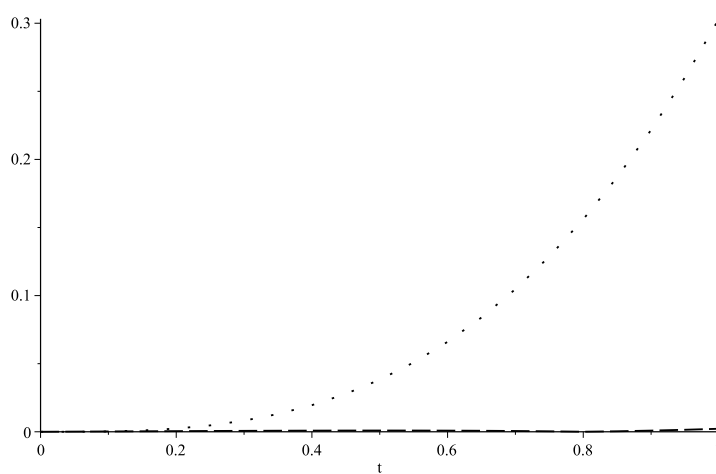
Рисунок 4.3 – Графики погрешности квадратичной и кубической моделей для сигнала $x(t) = e(t)$

Из Рисунка 4.2 видно, что обе модели достаточно точно аппроксимируют эталонную модель. При этом кубическая модель делает это точнее, чем квадратичная. Более четко это просматривается из поточечного сравнения графиков погрешности обеих моделей, представленного на Рисунке 4.3. Погрешность квадратичной и кубической моделей в конце прогнозного отрезка $\varepsilon_T^{sq} = 0,0054$ и $\varepsilon_T^{cub} = 0,0022$ соответственно.

Отметим, что в случае класса входных сигналов (3.61) квадратичная модель вполне конкурентна в сравнении с кубической. Это связано со спецификой тестовых сигналов кубической модели, принадлежащих более широкому классу входных возмущений (3.43). Если кубическую модель возможно настроить только на сигналы из (3.61), то тогда, как показано в [105], результаты работы кубической модели будут намного точнее. В связи с этим естественно, что для случая, рассматриваемого в диссертации, преимущество кубической модели будет проявляться на тестовых сигналах из области (3.43). В качестве следующего тестового сигнала возьмем крайний случай: сигнал $x(t) = -e(t)$ (Рисунок 4.4).

Результаты работы алгоритма моделирования показаны на Рисунках 4.5 и 4.6.

Из Рисунка 4.5 видно, что кубическая модель имеет преимущество перед квадратичной моделью с теми же амплитудами, как в случае выше. На Ри-

Рисунок 4.4 – Сигнал $x(t) = -e(t)$ Рисунок 4.5 – Отклик эталона, квадратичной и кубической моделей на сигнал $x(t) = -e(t)$ Рисунок 4.6 – Погрешности квадратичной и кубической моделей для сигнала $x(t) = -e(t)$

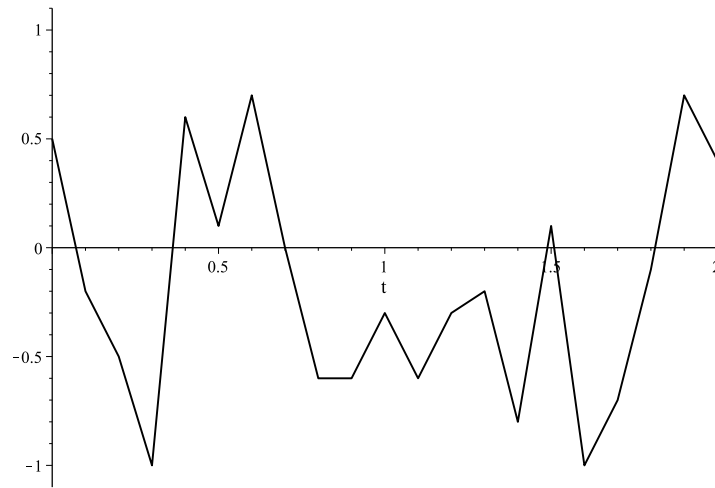


Рисунок 4.7 – Произвольный сигнал № 1

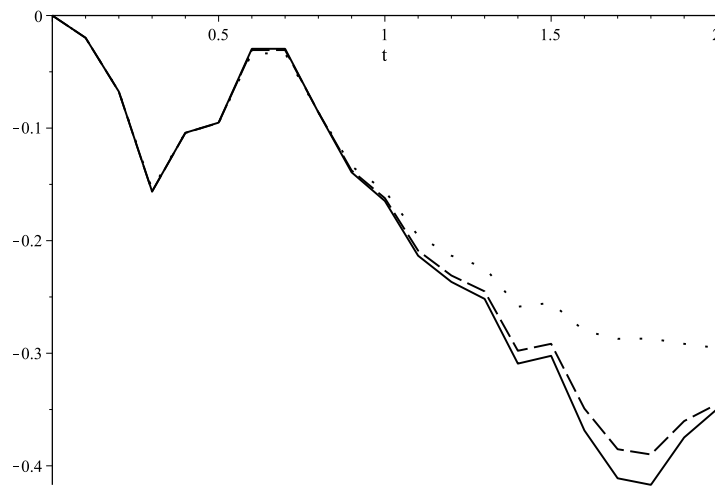


Рисунок 4.8 – Отклики эталонной, квадратичной и кубической моделей на произвольный сигнал № 1

сунке 4.6 показана погрешность обеих моделей. Однако отметим, что в случае данного сигнала квадратичную модель можно настроить на отрицательную полуполосу $[-B, 0)$ (т. е. фактически взять амплитуды со знаком минус). В то же время, если для кубической модели использовать вторую оптимальную пару амплитуд (3.74), результаты будут идентичны первому примеру.

На примере произвольного сигнала покажем работу моделей в области $[-B, B]$. В данном случае амплитуды, найденные в параграфе 3.1.4, уже не будут являться оптимальными. На Рисунках 4.7, 4.8 и 4.9 представлены произвольный сигнал, отклики квадратичной, кубической и эталонной моделей на этот сигнал и сравнение погрешностей этих моделей.

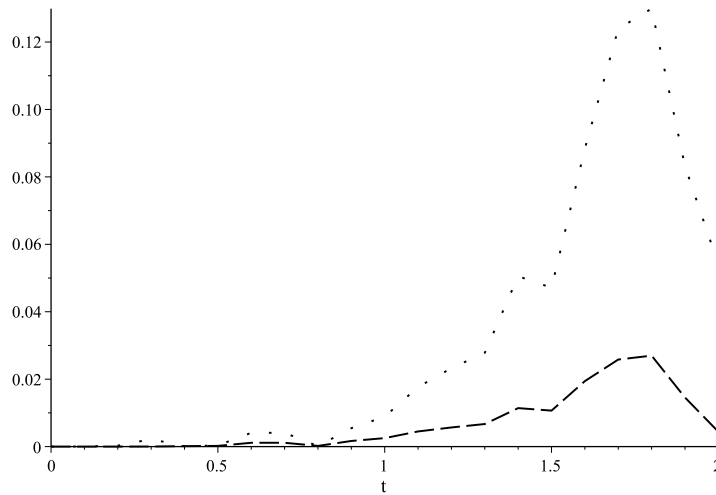


Рисунок 4.9 – Погрешности квадратичной и кубической моделей для произвольного сигнала № 1

Результаты показывают более точную работу кубической модели по сравнению с квадратичной. Ухудшение точности квадратичной модели связано с переходом входного сигнала в отрицательную область.

На сигнале, сформированном случайным образом, но только в положительной области (см. Рисунок 4.10), работа моделей в общем схожа с результатами для сигнала из Рисунка 4.2. При этом амплитуды, используемые для идентификации моделей, близки к оптимальным. Результаты представлены на Рисунках 4.11 и 4.12. Видно, что погрешность кубической модели остается меньше, чем погрешность квадратичной модели.

Для полноты картины рассмотрим еще один тестовый сигнал $x(t) = 1 + \cos 8t$ (см. Рисунок 4.13).

Результат моделирования откликов двух моделей при $T = 3$, $B = 2$, $h = 0,1$ представлен на Рисунке 4.14, при этом погрешности квадратичной и кубической моделей на сигнал $x(t)$ представлены на Рисунке 4.15.

Анализ численных результатов экспериментов показал, что кубическая модель во всех случаях точнее аппроксимирует исходную эталонную модель, чем квадратичная. При этом видно ее явное преимущество для входных сигналов, определенных как на отрицательной, так и на положительных областях. Значения погрешностей для всех рассмотренных сигналов приведены в

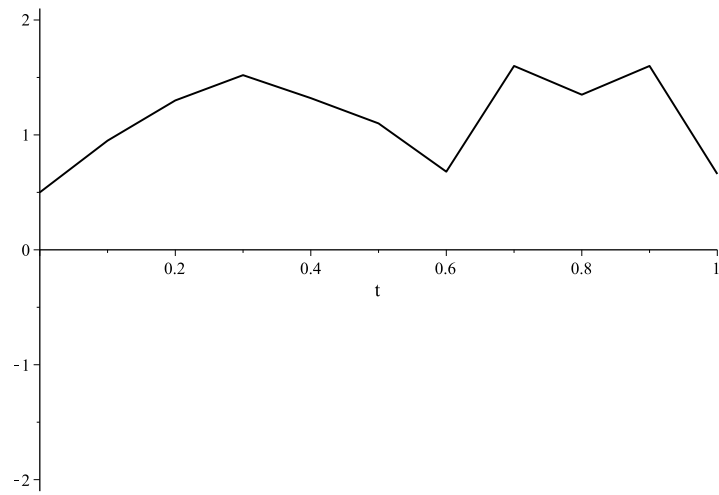


Рисунок 4.10 – Произвольный сигнал № 2

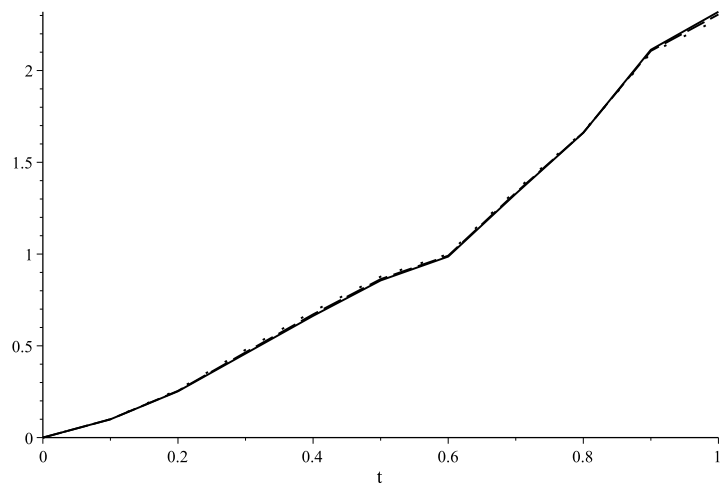


Рисунок 4.11 – Отклики эталонной, квадратичной и кубической моделей на произвольный сигнал № 2

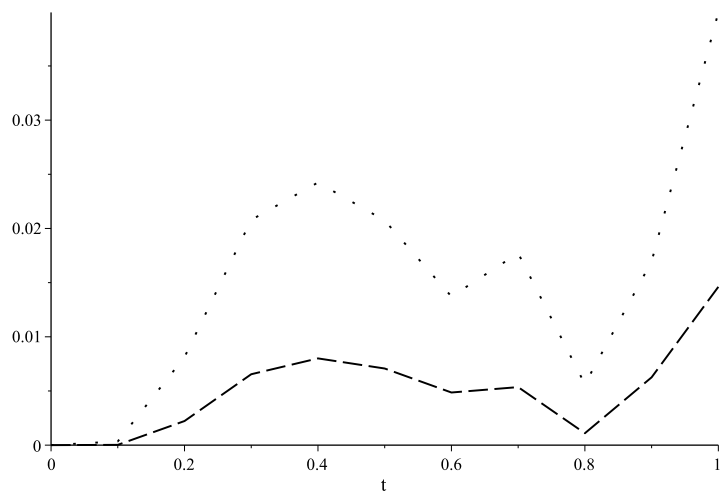


Рисунок 4.12 – Погрешности квадратичной и кубической моделей на произвольный сигнал № 2

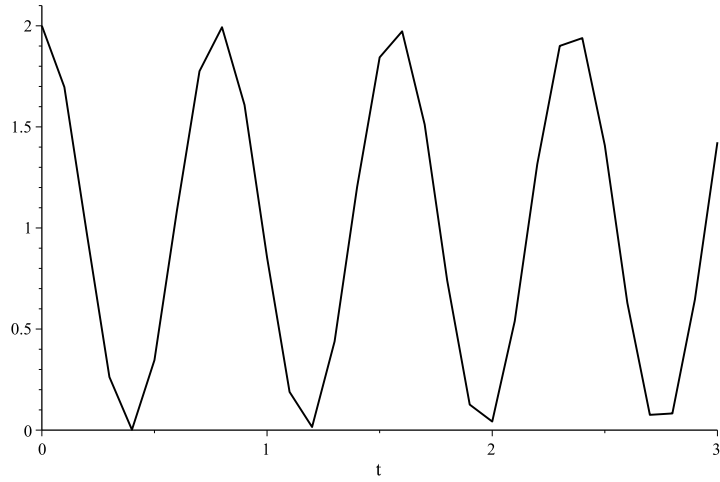


Рисунок 4.13 – Сигнал $x(t) = 1 + \cos 8t$

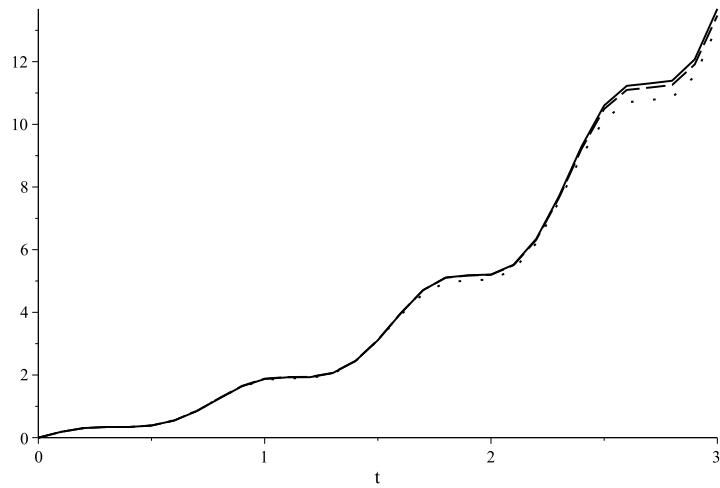


Рисунок 4.14 – Отклики эталонной, квадратичной и кубической моделей на сигнал $x(t) = 1 + \cos 8t$

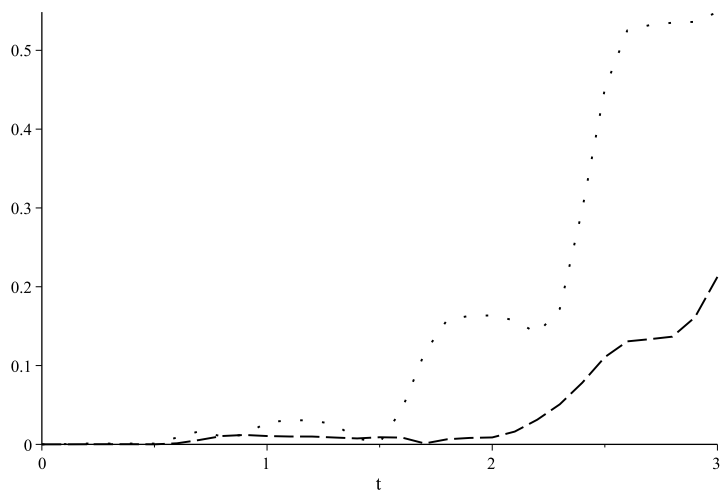


Рисунок 4.15 – Погрешности квадратичной и кубической моделей на сигнал $x(t) = 1 + \cos 8t$

Таблице 4.1, где

$$\|\varepsilon^{sq}\| = \max_{1 \leq i \leq n} |y_{et}(t_i) - y_{sq}(t_i)|,$$

$$\|\varepsilon^{cub}\| = \max_{1 \leq i \leq n} |y_{et}(t_i) - y_{cub}(t_i)|.$$

Таблица 4.1 – Таблица погрешностей

Вид сигнала	Погрешность модели	
	$\ \varepsilon^{sq}\ $	$\ \varepsilon^{cub}\ $
$x(t) = e(t)$	0,0054	0,0022
$x(t) = -e(t)$	0,3032	0,0022
Произвольный сигнал № 1	0,1299	0,0269
Произвольный сигнал № 2	0,0412	0,0141
$x(t) = 1 + \cos 8t$	0,5484	0,2125

4.1.3. Моделирование динамики давления и температуры для объектов Назаровской ГРЭС с помощью квадратичного и кубического полиномов Вольтерра

Основная цель данного параграфа заключается в применении квадратичного и кубического скалярных полиномов Вольтерра, описанных в главе 3 для моделирования динамики энергоблока Назаровской ГРЭС мощностью 135 МВт. Для идентификации переходных характеристик интегральных моделей (2.6) и (2.7) необходимо проведение двух серий тестовых испытаний (для квадратичной и кубической моделей) с помощью имитационной модели "P150", описанной в главе 2.

Перейдем к тестированию интегральных моделей на сигналах ступенчатого вида. Приведем примеры, в которых будем сравнивать точность моделирования откликов полиномами Вольтерра и откликами, полученными с помощью ПВК "P150" [115].

Ниже во всех примерах под эталонной моделью будем подразумевать отклик имитационной модели, подсчитанный на заданный сигнал с помощью

ПВК "P150". Во всех Рисунках ниже отклик эталонной модели будет изображен сплошной линией, а отклики квадратичной и кубической моделей – точками и пунктиром соответственно.

В качестве первого примера был выбран входной сигнал №1, который участвовал при идентификации кубической модели, но не квадратичной (Рисунок 4.16). На Рисунке 4.17 показаны отклики моделей на заданный сигнал. Очевидно, что невязка кубической модели в этом случае будет равна нулю (см. Рисунок 4.18).

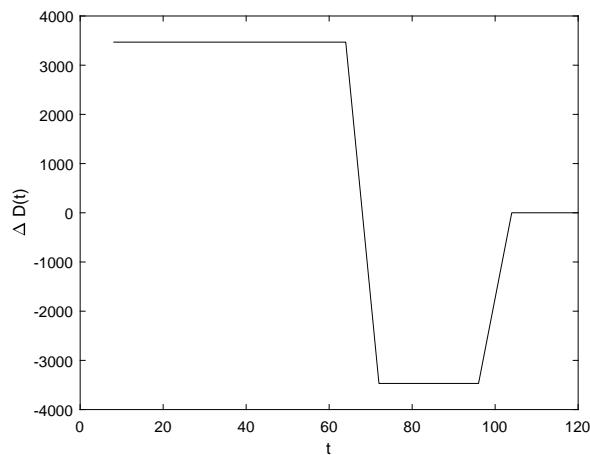


Рисунок 4.16 – Сигнал №1

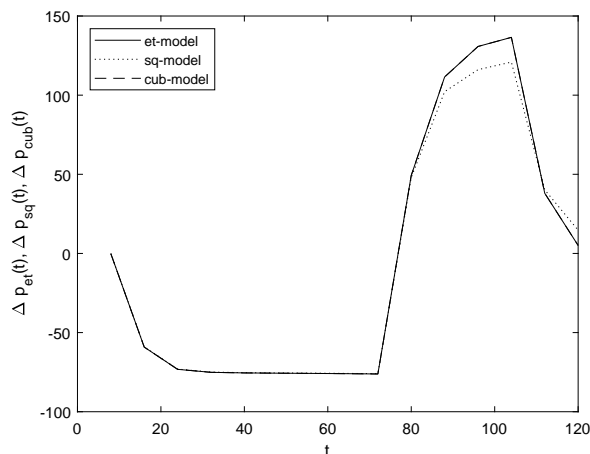


Рисунок 4.17 – Отклик эталонной, квадратичной и кубической моделей на сигнал №1 (случай $y_I^{mod} \equiv \Delta p(t)$)

Результат работы построенных моделей для двух других выходов совершенно идентичен представленному выше результату для $y_I(t)$.

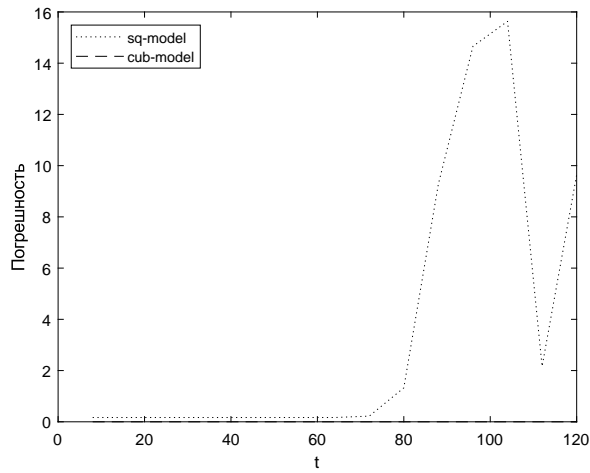


Рисунок 4.18 – Погрешности квадратичной и кубической моделей на сигнал №1 (случай $y_I^{mod} \equiv \Delta p(t)$)

Следующий пример демонстрирует отклики моделей на сигнал №2 (Рисунок 4.19), который не участвовал в идентификации обеих моделей (см. Рисунок 4.20). В этом примере видно преимущество кубической модели перед квадратичной (Рисунок 4.21). Оно заключается, как и в случае математической эталонной модели, в более точном моделировании сигнала в отрицательной области.

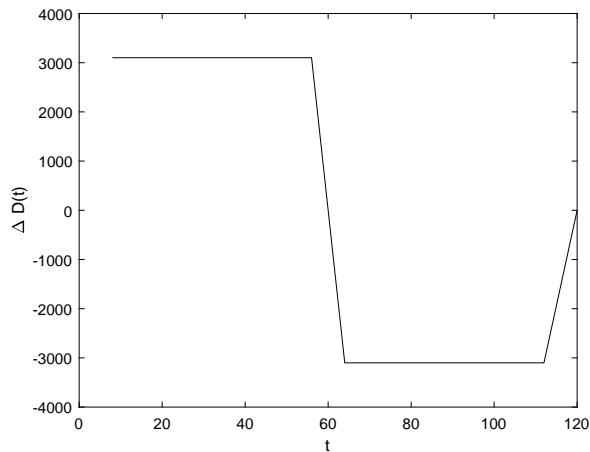


Рисунок 4.19 – Сигнал №2

На Рисунке 4.22 представлены отклики квадратичной, кубической и эталонной моделей, где в качестве выходного сигнала взята температура $y_{II}(t)$, а в качестве входного – сигнал №2, представленный на Рисунке 4.19. На Ри-

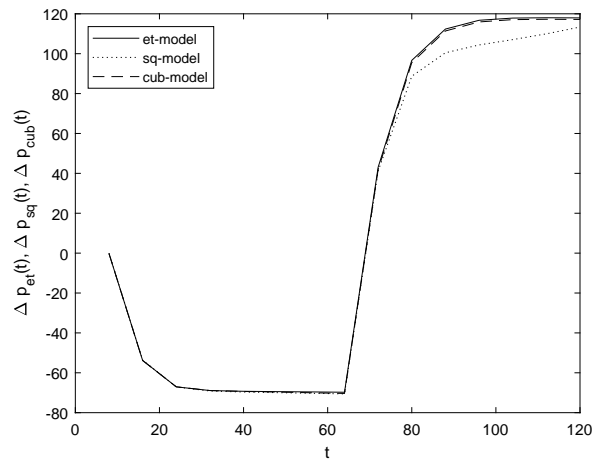


Рисунок 4.20 – Отклик эталонной, квадратичной и кубической моделей на сигнал №2 (случай $y_I^{mod} \equiv \Delta p(t)$)

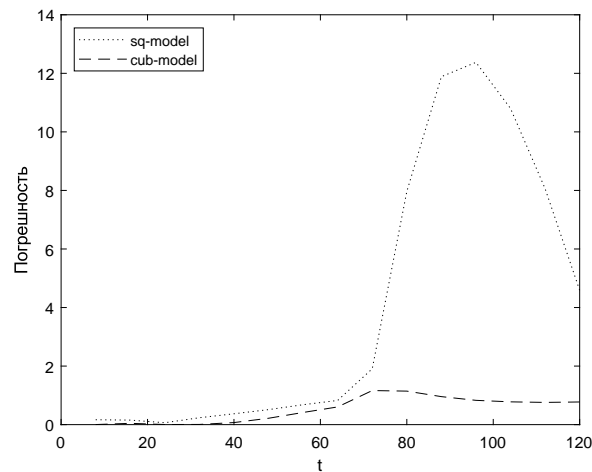


Рисунок 4.21 – Погрешности квадратичной и кубической моделей на сигнал №2 (случай $y_I^{mod} \equiv \Delta p(t)$)

сунке 4.23 показана погрешность квадратичной и кубической моделей. Видно, что с момента перехода входного сигнала в отрицательную область квадратичная модель начинает давать большую погрешность и сопоставимые до этого момента погрешности квадратичной и кубической моделей начинают резко отличаться в пользу кубической модели.

Для полноты картины рассмотрим последнюю модель, где в качестве выходного сигнала взята температура на выходе из ПНД $y_{III}(t)$. Входной же сигнал остается прежним (Рисунок 4.19). Отклики исследуемых моделей и эталонной модели представлены на Рисунке 4.24, а результаты сравнения – на Рисунке 4.25.

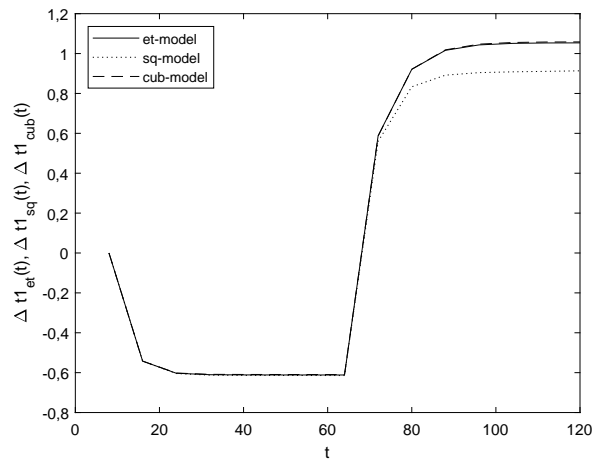


Рисунок 4.22 – Отклик квадратичной, кубичной и эталонной моделей на сигнал №2 (случай $y_{II}^{mod} \equiv \Delta t_1(t)$)

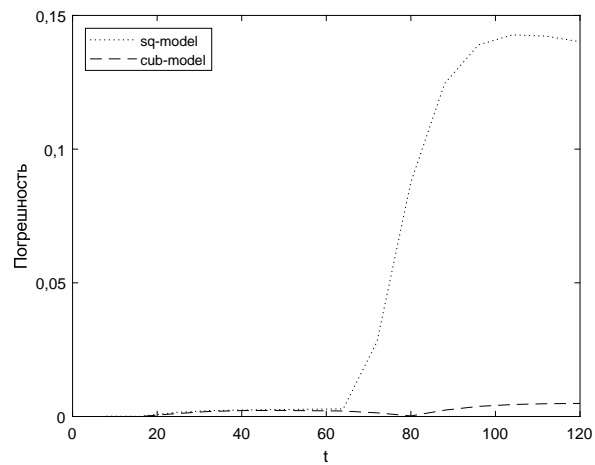


Рисунок 4.23 – Погрешности квадратичной и кубичной моделей сигнал на №2 (случай $y_{II}^{mod} \equiv \Delta t_1(t)$)

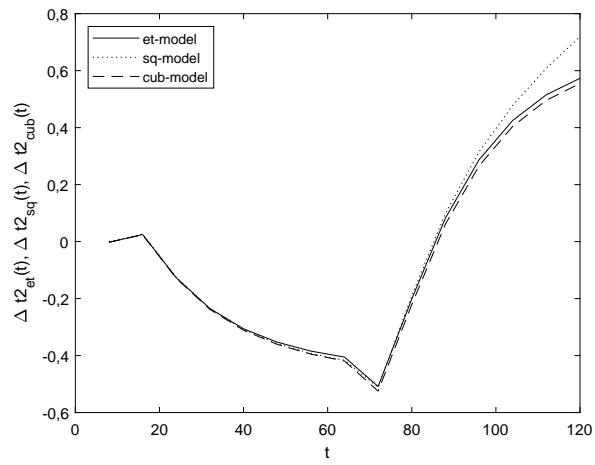


Рисунок 4.24 – Отклик квадратичной, кубичной и эталонной моделей на сигнал №2 (случай $y_{III}^{mod} \equiv \Delta t_2(t)$)

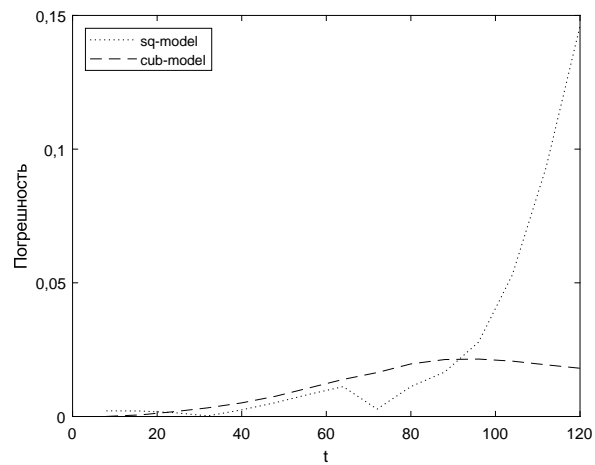


Рисунок 4.25 – Погрешности квадратичной и кубичной моделей на сигнал №2 (случай $y_{III}^{mod} \equiv \Delta t_2(t)$)

Согласно Рисунку 4.25, в отличие от моделей с другими выходами, в которых квадратичная модель давала худший результат, чем кубичная на всем промежутке моделирования, в этом случае кубичная модель даже немного хуже квадратичной, однако ближе к концу прогнозного периода квадратичная модель резко ухудшает свои прогнозные свойства.

Дополнительно стоит отметить, что при расчетах, проводимых выше, не использовались оптимальные амплитуды, подсчитанные в параграфе 3.1.4. Хотя в замечании параграфа 3.1.4 и сказано, что результаты, полученные для математической эталонной модели, могут быть перенесены на другие динамические системы, выписанные оптимальные амплитуды для случая методики восстановления интегралов от ядер не подходят. В силу множителя $\frac{T^2}{h^2}$ для квадратичной модели и множителя $\frac{T^3}{h^3}$ для кубичной модели значения оптимальных амплитуд тестовых входных сигналов получаются очень большими и вряд ли будут возможны для реальной динамической системы. Поэтому во всех тестовых расчетах данного параграфа были приняты для идентификации указанные выше амплитуды.

В Таблице 4.2 собраны результаты по всем экспериментам. Здесь

$$\|\varepsilon_m^{sq}\| = \max_{1 \leq i \leq 30} |y_m(t_i) - y_m^{sq}(t_i)|,$$

$$\|\varepsilon_m^{cub}\| = \max_{1 \leq i \leq 30} |y_m(t_i) - y_m^{cub}(t_i)|,$$

где $y_m(t_i)$, $y_m^{sq}(t_i)$ и $y_m(t_i)$, $y_m^{cub}(t_i)$ – отклики имитационных моделей и квадратичной и кубичной моделей соответственно при $m = I, II, III$.

Таблица 4.2 – Таблица погрешностей

Вид сигнала	Погрешность модели					
	$\ \varepsilon_I^{sq}\ $	$\ \varepsilon_I^{cub}\ $	$\ \varepsilon_{II}^{sq}\ $	$\ \varepsilon_{II}^{cub}\ $	$\ \varepsilon_{III}^{sq}\ $	$\ \varepsilon_{III}^{cub}\ $
Сигнал №1 (4.16)	15, 634	$1, 4 \cdot 10^{-9}$	0, 1851	$2, 9 \cdot 10^{-13}$	0, 1239	$1, 7 \cdot 10^{-11}$
Сигнал №2 (4.19)	12, 374	1, 1641	0, 1427	0, 0048	0, 146	0, 0214
Сигнал №3	23, 145	3, 2713	0, 3034	0, 0196	0, 2935	0, 0599
Сигнал №4	20, 42	4, 511	0, 1343	0, 0255	0, 2728	0, 0667

Дополнительно в Таблице 4.2 для полноты представлены результаты расчетов для сигналов, которые не приводятся на графиках.

4.1.4. Программа построения кубического полинома Вольтерра для моделирования динамики элемента теплообменного аппарата

Рассмотрим процесс моделирования динамики теплообменника радиационного типа, описание которого приведено в параграфе 2.2. В (2.5) входной сигнал $x(t) - \Delta D(t)$, а выходной сигнал $y_{et}(t) - \Delta i(t)$. Построим полиномы Вольтерра второй (3.8) и третьей степени (3.19), используя в качестве эталона (2.5). При этом начальные значения указаны в параграфе 2.2, а $T = 30$ (с), $h = 1$ (с).

Все расчеты проводились в программном комплексе "Динамика" [91], позволяющем проводить идентификацию и тестирование квадратичной и кубической моделей применительно к математической модели теплообменного аппарата ИСЭМ СО РАН (2.5). Автором настоящей диссертации в ПВК "Динамика" был добавлен модуль идентификации квадратичного и кубического полинома Вольтерра в скалярном случае методом ИП. Поэтому в данном параграфе рассмотрено только несколько примеров для демонстрации работы кубического полинома Вольтерра. Все подробности работы программы, ее интерфейс и программные модули детально рассмотрены в [91].

Отклики построенных моделей на произвольный сигнал, представленный на Рисунке 4.26, показаны на Рисунке 4.27.

В Таблице 4.3 приведены погрешности моделирования для произвольного сигнала и дополнительно для двух кусочно-постоянных сигналов:

$$\Delta D(t) = 0,06(e(t) - e(t - 13)) - 0,04(e(t - 13) - e(t - 25)), \quad t \in [0, 30], \quad (4.16)$$

$$\Delta D(t) = 0,04(e(t) - e(t - 13)) - 0,06(e(t - 13) - e(t - 25)), \quad t \in [0, 30]. \quad (4.17)$$

Таблица 4.3 – Таблица погрешностей

Вид сигнала	Погрешность модели	
	$\ \varepsilon^{sq}\ $	$\ \varepsilon^{cub}\ $
Сигнал (4.16)	16,2434	5,9679
Сигнал (4.17)	54,8668	8,2455
Произвольный сигнал	37,7924	6,8341

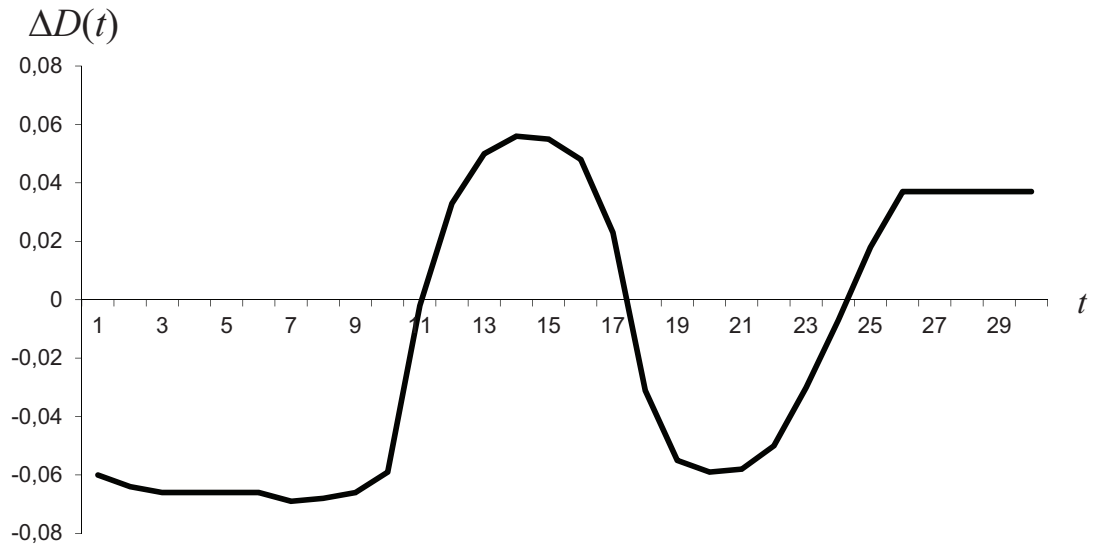


Рисунок 4.26 – Входной сигнал расхода жидкости заданный произвольным образом (произвольный сигнал)

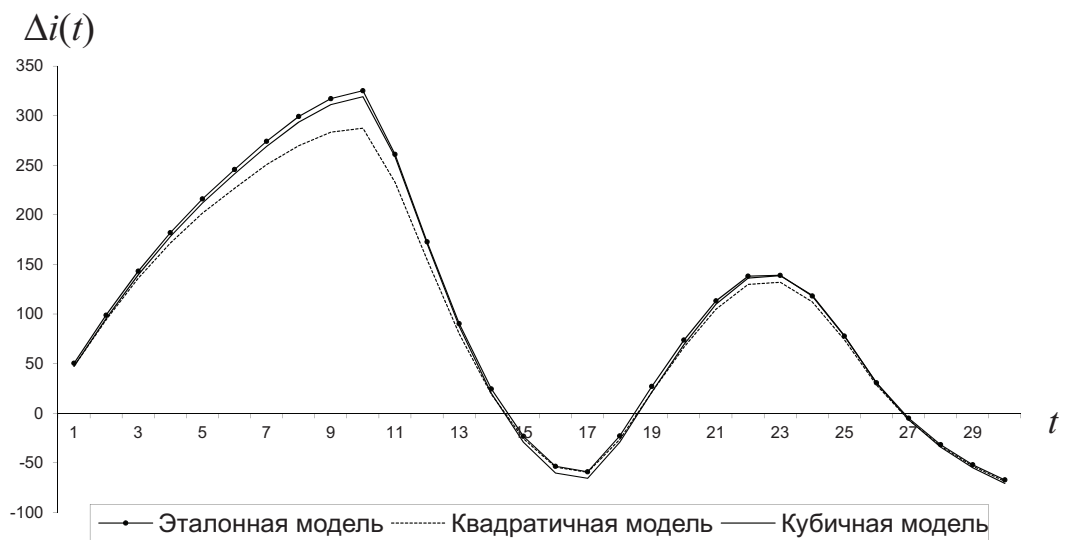


Рисунок 4.27 – Отклик имитационной, квадратичной и кубической моделей на произвольный сигнал из Рисунка 4.26

В Таблице 4.3

$$\|\varepsilon^{sq}\| = \max_{1 \leq i \leq 30} |y_{et}(t_i) - y_{sq}(t_i)|,$$

$$\|\varepsilon^{cub}\| = \max_{1 \leq i \leq 30} |y_{et}(t_i) - y_{cub}(t_i)|.$$

Из Таблицы 4.3 видно, что, как и следовало ожидать, кубическая модель более точно моделирует реакцию имитационной модели на все три типа сигналов. Как и в случае математической эталонной модели более высокая точность достигается за счет того, что кубическая модель лучше квадратичной реагирует на смену знака у входного сигнала.

4.1.5. Программа для численного решения квадратичного уравнения Вольтерра I рода. Примеры тестирования алгоритма

В отличие от всех остальных программных комплексов программа для численного решения квадратичного уравнения Вольтерра создана в математическом пакете MAPLE [165]. Это связано с тем обстоятельством, что при применении численного ИП-метода необходимо вычислять интегралы от заданных ядер, что представляет собой отдельную и очень трудоемкую задачу, не относящуюся к вопросу численного решения интегрального уравнения напрямую. Однако эта трудность легко обходится, если писать программу на языке математического пакета MAPLE, потому что вычисление интегралов от ядер там проводится встроенными средствами самого пакета.

Итак, проиллюстрируем работу ИП-метода в сравнении с методом средних прямоугольников. Естественно ожидать, что метод ИП даст меньшую погрешность для примеров, содержащих сильно осциллирующие ядра. Рассмотрим три примера.

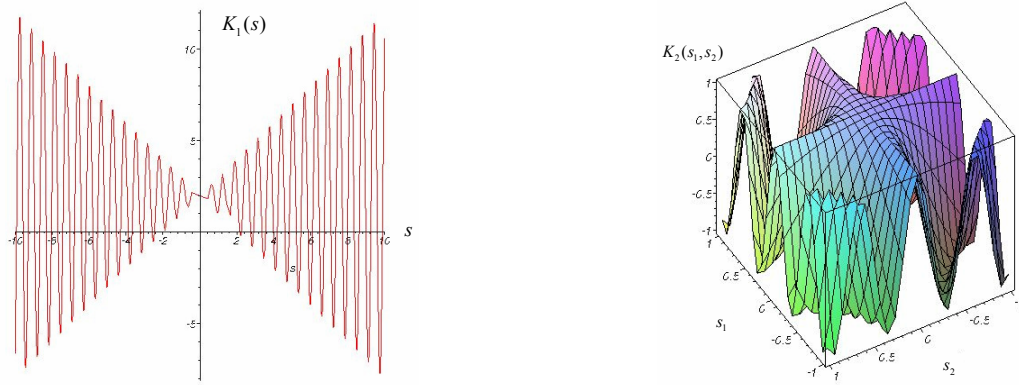
Пример 1:

$$K_1(t, s) = 2 + s \cos 10s, \quad (4.18)$$

$$K_2(t, s_1, s_2) = (s_1 + s_2) \cos 10s_1s_2, \quad (4.19)$$

точное решение

$$x(t) = \cos t, \quad t \in [0, 1]. \quad (4.20)$$

Рисунок 4.28 – Графики ядер для *примера 1*

На Рисунке 4.28, для иллюстрации осцилляций, изображены графики предложенных ядер.

Пример 2:

$$K_1(t, s) = 2 + s \cos 10s, \quad (4.21)$$

$$K_2(t, s_1, s_2) = 1 + s_1 + s_2, \quad (4.22)$$

$x(t)$ совпадает с (4.20).

Пример 3 (заимствован из [19]):

$$K_1(t, s) = 1 + t - s, \quad (4.23)$$

$$K_2(t, s_1, s_2) = 1 + s_1 + s_2, \quad (4.24)$$

$x(t)$ совпадает с (4.20).

Результаты расчетов представлены в Таблице 4.4, где:

Таблица 4.4 – Сравнение погрешностей метода средних прямоугольников и метода интегрирования произведения

		$\ \varepsilon^h\ _{C_h}$		
		$h = \frac{1}{16}$	$h = \frac{1}{32}$	$h = \frac{1}{64}$
Метод интегрирования произведения	1	$0,9209 \cdot 10^{-3}$	$0,2535 \cdot 10^{-3}$	$0,0652 \cdot 10^{-3}$
	2	$0,3789 \cdot 10^{-3}$	$0,0967 \cdot 10^{-3}$	$0,0254 \cdot 10^{-3}$
	3	$0,1679 \cdot 10^{-3}$	$0,0420 \cdot 10^{-3}$	$0,0105 \cdot 10^{-3}$
Метод средних прямоугольников	1	$10,868 \cdot 10^{-3}$	$2,9948 \cdot 10^{-3}$	$0,7690 \cdot 10^{-3}$
	2	$2,0166 \cdot 10^{-3}$	$0,1273 \cdot 10^{-3}$	$0,0318 \cdot 10^{-3}$
	3	$0,1679 \cdot 10^{-3}$	$0,0420 \cdot 10^{-3}$	$0,0105 \cdot 10^{-3}$

$$\|\varepsilon^h\|_{C_h} = \max_{1 \leq i \leq n} \left| x(t_{i-\frac{1}{2}}) - x_{i-\frac{1}{2}}^h \right|.$$

Все программы реализованы с помощью математического пакета MAPLE [165], в том числе использованы символьные возможности пакета для вычисления интегралов от заданных ядер.

Из результатов расчетов видно, что оба алгоритма дают квадратичную сходимость методов, при уменьшении шага в 2 раза погрешность уменьшается в 4 раза. Однако погрешность ИП-метода более чем на порядок меньше погрешности метода средних прямоугольников, что и следовало ожидать. При этом хорошо заметна разница между *примерами 1* и *2*. Добавление большей сложности за счет осцилляции второго ядра сильно влияет на точность обоих методов. В этом случае ИП-метод выигрывает еще больше. На Рисунке 4.29 для *примера 1* приведены графики модуля погрешности между точным и приближенным решением для обоих методов при $h = \frac{1}{32}$. Видно, что погрешность ИП-метода (сплошная линия) на протяжении всего отрезка значительно меньше, чем погрешность метода средних прямоугольников (пунктирная линия).

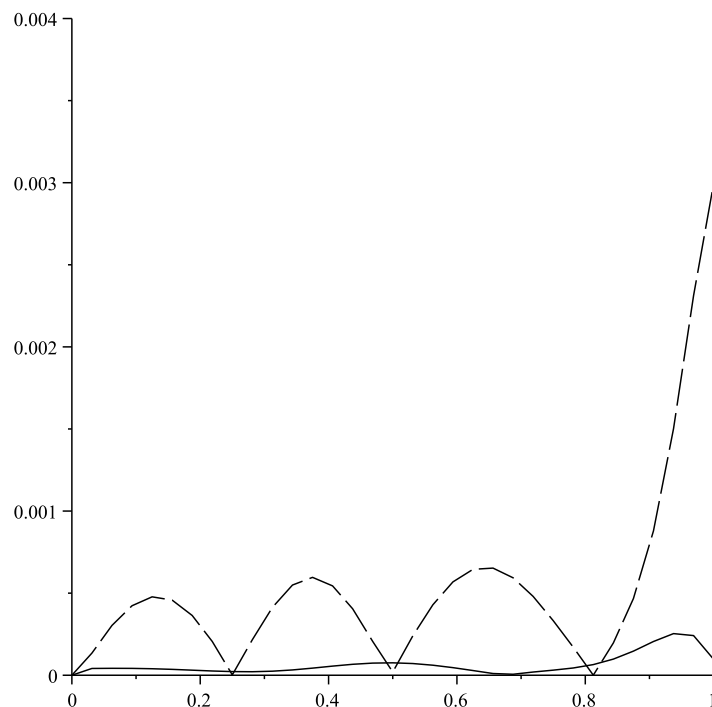


Рисунок 4.29 – Графики погрешности для *примера 1* при $h = \frac{1}{32}$

В то же время, для неосциллирующих ядер (*пример 3*) результаты рабо-

ты алгоритмов практически совпадают.

В заключение отметим, что вопрос о сходимости метода ИП вынесен в качестве замечания в работе [18].

4.1.6. Применение тестовых уравнений

Перейдем далее к практическому применению тестовых уравнений, полученных в главе 3 для описания нелинейной динамики.

Рассмотрим в качестве имитационной динамической системы математическую модель переходного процесса в элементе теплообменного аппарата (2.5), приведенную в параграфе 2.2.

Числовые характеристики, входящие в (2.5), принимались соответствующими реальному теплофизическому процессу на высокотемпературном контуре ИСЭМ СО РАН, $D_0 = 0,16$ кг/с, $Q_0 = 100$ кВт, $i_0 = 434$ кДж/кг.

Пусть в предположении стационарности (неизменности по времени t) динамической системы ядра Вольтерра в (3.76) при $N = 2$

$$\Delta i_{mod}(t) = \int_0^t K_1(t - s_1) \Delta D(s_1) ds_1 + \quad (4.25)$$

$$+ \int_0^t \int_0^t K_2(t - s_1, t - s_2) \Delta D(s_1) \Delta D(s_2) ds_1 ds_2, \quad t \in [0, T],$$

описывающие динамику $\Delta i(t)$ в (2.5), уже идентифицированы, например, с помощью методики, кратко изложенной в главе 1 и работе [93]. Модель (4.25) отображает динамические свойства управляемого объекта (2.5). Вычисление входных сигналов $\Delta D(t)$, обеспечивающих требуемый отклик системы $\Delta i_{mod}(t)$ при известных $K_1(t - s_1)$, $K_2(t - s_1, t - s_2)$, выполнялось в предположении, что численное решение полиномиального уравнения (4.25) существует на всем исследуемом промежутке $[0, T]$.

Тестовое интегральное уравнение с ядрами вида (3.136) при $N = 1, 2$, параметры k , L_1 , M_2 , L_2 в которых получены на базе восстановленных для (4.25) $K_1(t - s_1)$, $K_2(t - s_1, t - s_2)$, $0 \leq s_1, s_2 \leq t \leq T$, может быть применено

для оценки величины T – верхней границы области существования $\Delta D(t)$ в классе $C_{[0,T]}$.

На Рисунках 4.30–4.32 иллюстрируется специфика функций (3.136) при $N = 1, 2$, полученных с помощью сеточных аналогов K_1^h , K_2^h из (4.25), идентификация которых выполнялась на равномерной сетке с шагом h при помощи тестовых сигналов

$$\Delta D_\omega(t) = 0,04(e(t) - e(t - \omega)),$$

где $e(t)$ – функция Хевисайда, $t \in [0, 30]$.

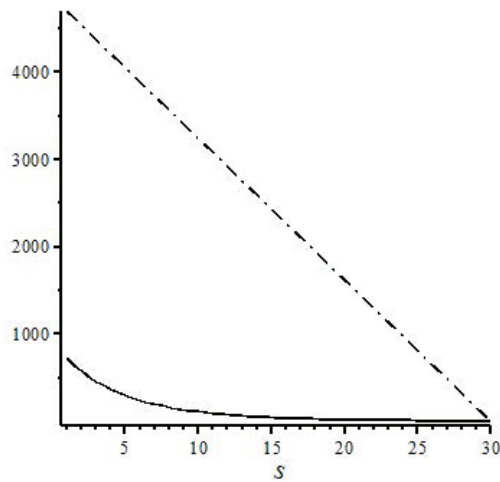


Рисунок 4.30 – Сеточный аналог $|K_1^h(s)|$ (сплошная линия) и модуль функции $|K_1(s)|$ (пунктир через точку) с шагом 1 с

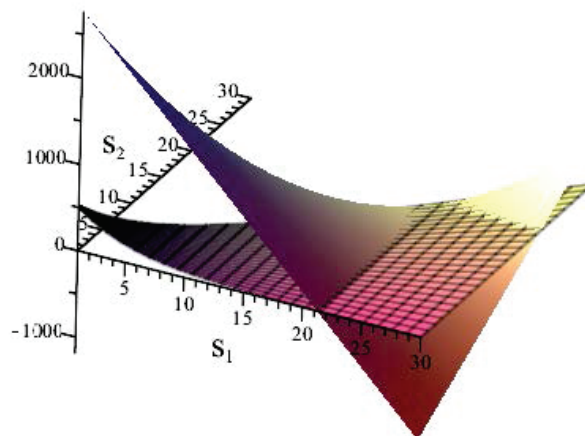


Рисунок 4.31 – Сеточный аналог $K_2^h(s_1, s_2)$ и функция $K_2(s_1, s_2)$ с шагом 1 с

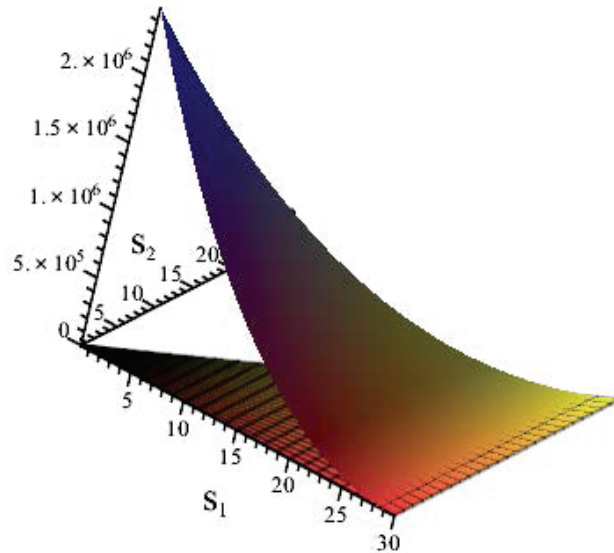


Рисунок 4.32 – Сеточный аналог $K_2^h(s_1, s_2)$ и функция $K_2(s_1, s_2)$ с шагом 0,25 с

Из Рисунков 4.31, 4.32 видно, что шаг сетки h существенно влияет на величины M_2 и L_2 для ядра $K_2(t - s_1, t - s_2)$ из (4.25) и, как следствие, на ограничение для T .

Рассмотрим численное решение квадратичного интегрального уравнения для случая $h = 1$ и $h = 0,25$ с. Для этого выпишем соответствующие этим случаям интегральные модели:

$$\int_0^t (-4862,165 + 162,162s) \Delta D(t-s) ds + \left(\int_0^t (-55,153 + 2,594s) \Delta D(t-s) ds \right)^2 = \Delta i(t), \quad (4.26)$$

$$\int_0^t (4116,815 + 137,317s) \Delta D(t-s) ds + \left(\int_0^t (-1593,257 + 53,756s) \Delta D(t-s) ds \right)^2 = \Delta i(t), \quad (4.27)$$

где $\Delta D(t)$ обеспечивает заданный отклик $\Delta i(t) = 17 - 117t^2$, $t \in [0, 18]$. Выбор нужного корня (4.26) и (4.27) определяется условием

$$\Delta D_1^h \xrightarrow{h \rightarrow 0} \Delta D(0) = \frac{y'(0)}{K_1(0)}.$$

Таблица 4.5 – Сеточное решение (4.26) и (4.27) при $h = 1$ и $h = 0,25$ с

t_i	$h = 1$	$h = 0,25$
1	0,0215	-0,0052
2	0,0832	0,0086 – 0,0083I
3	0,1671	
4	0,3524	
5	0,451 – 0,6231I	

В Таблице 4.5 приведены результаты численного решения (4.26) и (4.27), где через I обозначена мнимая единица. Анализ Таблицы показывает, что правая граница области существования непрерывного решения состоит 4 и 1 секунды для двух разных шагов соответственно. Таким образом, выделена интегральная модель, ядра Вольтерра в которой удовлетворяют специальным мажорантным оценкам, связанным с исследованием области существования полиномиальных уравнений вольтерровского типа. Приведен пример практического использования предложенного подхода в задаче восстановления изменения расхода воды, обеспечивающего требуемое отклонение энтальпии на выходе элемента теплообменного аппарата.

4.2. Анализ динамики давления с помощью модифицированного ПГХ

Данный параграф посвящен применению подхода, подробно рассмотренного в параграфе 3.2.5, для анализа динамики давления в жидкости и идентификации быстропротекающих процессов парообразования.

Для примера будем рассматривать временной ряд, приведенный в параграфе 3.2.5, который представляет собой автоколебания давления (Рисунок 2.12), возникающие в процессе импульсного тепловыделения в недогретой до температуры насыщения жидкости.

Описание появления автоколебательных пульсаций давления, представленных на Рисунке 2.12, приведено в [61]. Задача анализа автоколебательных пульсаций давления состояла в идентификации частот, которые возникают

при подобных пульсациях.

В работе [62] и параграфе 3.2.5 проведено сравнение классического и модифицированного методов ПГХ. На примере задачи, описанной выше, показано, что разложение на эмпирические моды (IMF) у модифицированного метода в целом намного качественнее, чем у классического метода. В отличие от классического ПГХ мПГХ позволяет избежать эффекта "смешивания мод" и в итоге получить более качественные разложения исходного сигнала. А применение ПГ к более качественному набору IMF позволяет получить адекватные частоты механизмов автоколебательных пульсаций давления. Рассмотрим применение мПГХ более подробно. Применение модифицированного ПГХ, а именно, SEEMDAN, к ряду, представленному на Рисунке 2.12, позволяет получить набор *IMF*, представленный на Рисунке 3.19 (SEEMDAN).

На Рисунке 4.33 представлены графики изменения частот пульсаций, полученные с помощью преобразования Гильберта из соответствующих им *IMF*. Были идентифицированы автоколебания со средней частотой $\sim 41-50$ Гц и $\sim 81-85$ Гц, которые соответствуют 7-й и 8-й составляющим на Рисунке 4.33. Анализ видеок кадров из [61], проведенный А. А. Левиным, также показал наличие стоячих волн давления с характерной скоростью 9 м/с в канале длиной 35 см, что соответствует частоте около 51 Гц.

С усилением амплитуды пульсационного процесса в спектре появляется высокочастотная составляющая ($\sim 1600-2000$ Гц) колебаний давления (Рисунок 4.34). При этом проявление этой составляющей совпадает с моментами достижения максимумов давления. Это позволяет идентифицировать две стадии автоколебательного процесса: начальной стадии (с 450 мс до 800 мс) и стадии развитого кипения (с 850 мс до 1400 мс). Более детальное рассмотрение протекающих процессов, их физическая интерпретация, а также сопоставление со скоростной видеосъемкой приведены в работе [61].

Интересным представляется тот факт, что, используя описанные выше мгновенные частоты и соответствующие им амплитуды плюс дополнительную частоту и амплитуду (IMF7 из набора на Рисунке 3.19) для двух указанных временных интервалов, можно с восстановить исходный сигнал по формуле (3.154).

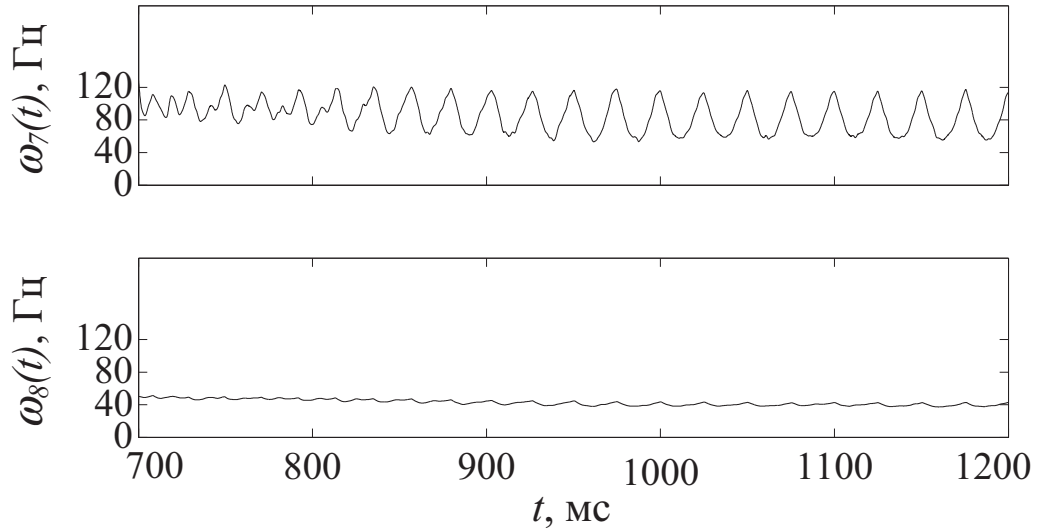


Рисунок 4.33 – Мгновенные частоты средних составляющих

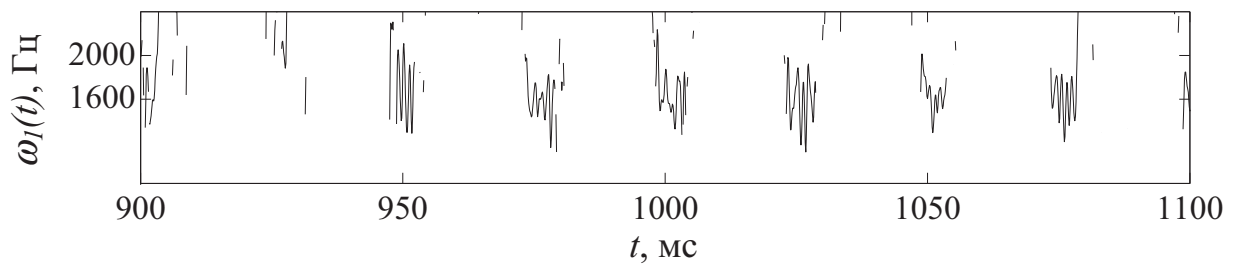


Рисунок 4.34 – Мгновенные частоты высокочастотной составляющей

На Рисунках 4.35, 4.36 представлены точный и восстановленный сигналы автоколебательного процесса, причем на Рисунке 4.36 составляющая с частотой 2000 Гц обеспечивает достаточно точную аппроксимацию пиков исходного сигнала. На Рисунках 4.35, 4.36 черным цветом изображен исходный сигнал, а красным восстановленный.

В заключение отметим, что до сих пор исследование автоколебательных пульсаций давления проходило в основном по результатам скоростной видеосъемки. Привлечение ПГХ совместно с тщательным изучением кадров видеосъемки позволило выделить основные частоты и механизмы формирования колебаний давления, тем самым существенно улучшить и расширить инструментарий для исследования автоколебательных пульсаций давления.

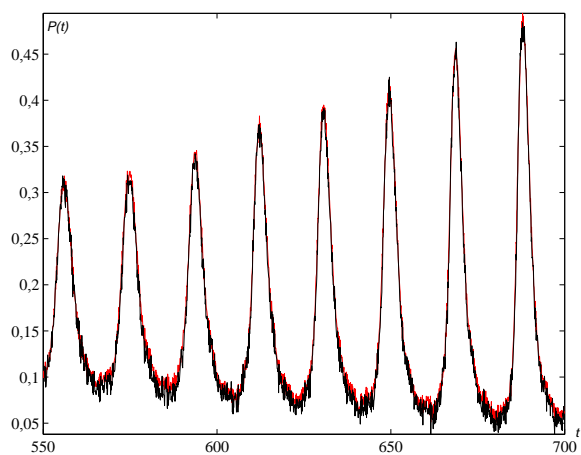


Рисунок 4.35 – Точный и восстановленный сигналы в промежутке между 550 мс и 700 мс

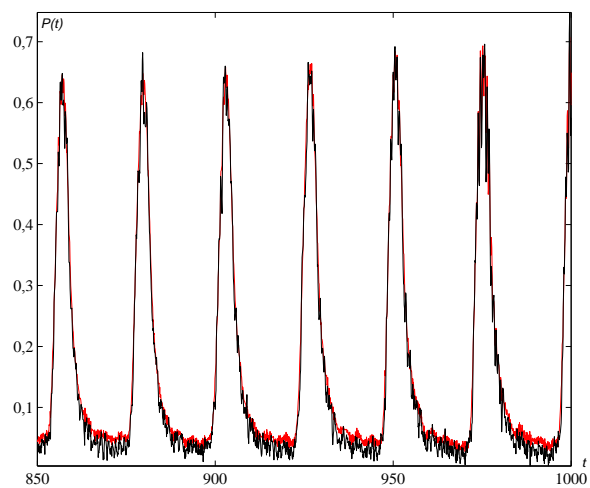


Рисунок 4.36 – Точный и восстановленный сигналы в промежутке между 850 мс и 1000 мс

4.3. Выводы

Таким образом, модули ПК для построения квадратичной и кубической моделей для нелинейных динамических систем имеют универсальный характер. Во всех рассмотренных задачах точность кубической модели в целом выше, чем точность квадратичной. При этом выявлено важное преимущество кубической модели. Оно заключается в том, что кубическая модель позволяет существенно повышать точность моделирования, когда на вход подается сигнал, определенный как на положительной, так и на отрицательной областях. И хотя, если сигнал находится только в одной из областей, можно построить две квадратичные модели, настроенные каждая на свою область, остается вопрос, что делать, если входной сигнал меняет свою область определения со временем. В этом случае для более точного моделирования подходит только кубическая модель. При этом стоит отметить, что технически построение кубической модели намного сложнее, чем построение квадратичной модели. Так, если в квадратичном случае для идентификации полинома Вольтерра необходимо $\frac{n(n+1)}{2}$ входных сигналов и откликов на них, то для идентификации в кубическом случае таких сигналов надо уже $\frac{n(n^2+3n+2)}{6}$. В то же время точность моделирования, вполне достаточная для практического применения даже в квадратичном случае, позволяет использовать данный ПК для описания широкого класса технических устройств, динамика которых допускает представление с помощью моделей типа «вход-выход».

Приведенные в параграфе 4.1.5 результаты работы программы для решения квадратичного интегрального уравнения Вольтерра I рода ИП-методом позволяют решать задачи поиска такого входного возмущения, которому соответствует желаемый выход в случае предложенной в диссертации методики восстановления переходных характеристик системы в виде интегралов от ядер. Дополнительно приведен тестовый пример, демонстрирующий преимущество ИП-метода перед стандартным методом средней точки для сильно осциллирующих ядер.

Применяя методику из главы 3 по выбору метода для декомпозиции исследуемого сигнала, был выбран метод мПГХ. Результаты его применения

показали абсолютное преимущество мПГХ метода перед классическим ПГХ. Полученная качественная декомпозиция позволила эффективно применить ПГ и решить задачу идентификации несущих частот, характеризующих определенные механизмы автоколебательных пульсаций давления. Предложенная методика по выбору метода декомпозиции и его параметров может быть легко адаптируема для изучения и анализа других сигналов различной природы.

Заключение

Диссертационная работа посвящена изучению и построению интегральных моделей различных динамических систем и их применению в теплоэнергетике. В работе исследуются две важные задачи, возникающие в процессе моделирования того или иного явления или процесса. Первая задача посвящена универсальной методике построения модели исследуемой динамической системы, сводящейся к идентификации переходных характеристик этой системы на базе полиномов Вольтерра. Вторая задача касается теоретического вопроса, связанного с исследованием полиномиального уравнения, возникающего при решении задачи автоматического управления. В качестве третьей рассмотрена задача идентификации с помощью аппарата ПГХ или его модифицированной версии. Эта задача состоит в определении несущих частот теплофизического процесса, представленного в виде временного ряда. В диссертации для демонстрации предложенной методики, рассмотрен процесс автоколебаний давления.

Основные результаты, изложенные в диссертационной работе, являются новыми и имеют как теоретическую, так и практическую ценность. Перечислим основные результаты, полученные автором, для каждой из задач:

1. Выполнен обзор по проблемам математического моделирования и различным задачам идентификации, включая идентификацию с помощью метода ПГХ. Проведен обзор по применению полиномов Вольтерра и методики ПГХ для решения технических задач из разных областей науки.
2. Согласно оценочному тестированию имитационной модели энергоблока Назаровской ГРЭС определен временной диапазон, на котором происходит стабилизация отклика на заданные входные сигналы и выбран шаг для вычисления переходных характеристик. Подобная работа проведена и для имитационной модели теплообменного аппарата. Определен временной интервал моделирования для стабилизации отклика на заданные входные сигналы. Выбор шага для модели теплообменного аппарата обусловлен возможностями теплотехнического оборудования.

3. Разработана методика построения квадратичного и кубического полиномов Вольтерра на базе численного многомерного метода ИП в случае скалярного входного сигнала. Полученные полиномы Вольтерра являются интегральными моделями для исследуемой динамической системы.
4. Построены квадратичная и кубическая модели для различных динамических систем. Показано, что кубическая модель точнее квадратичной моделирует заданный объект и позволяет более полно учитывать нелинейные свойства объекта. Применение кубической модели позволяет расширить класс допустимых входных сигналов по сравнению с квадратичной моделью.
5. Для обоснования методики построения квадратичной и кубической моделей с помощью применения метода ИП были доказаны две теоремы. Дополнительно для тестирования методики были построены квадратичные и кубические интегральные модели для математической "эталонной" динамической модели.
6. Решена задача, посвященная теоретическим и практическим аспектам исследования полиномиальных уравнений Вольтерра I рода. Оказалось, что в теории полиномиальных интегральных уравнений Вольтерра I рода принципиально важную роль играет функция Ламберта. В терминах функции Ламберта были получены неулучшаемые оценки непрерывных решений некоторых нелинейных интегральных неравенств. Это позволяет получить обоснованные оценки на правый конец интервала моделирования при решении задачи автоматического управления.
7. Для согласованности решений задачи автоматического управления и задачи идентификации квадратичной модели, с помощью метода ИП была построена численная схема решения квадратичного интегрального уравнения. Для задачи решения квадратичного интегрального уравнения показано преимущество ИП-метода для сильно осциллирующих функций.
8. Была поставлена и решена задача анализа динамики давления и температуры для энергоблока Назаровской ГРЭС. Она проводилась с помощью квадратичного и кубического полиномов Вольтерра, построенных

с помощью метода ИП. Во всех случаях было выявлено преимущество кубической модели перед квадратичной.

9. Реализован модуль идентификации полиномов Вольтерра второй и третьей степени, входящий в ПК "Динамика", для исследования динамики скалярной имитационной модели теплообменной установки.
10. Для задачи исследования временных рядов теплофизической природы была разработана методика выбора и настройки модификации метода ПГХ.
11. Задача идентификации несущих частот механизмов автоколебания давления решена с помощью модифицированного ПГХ.

Необходимо отметить, что описанная методика, алгоритмы и разработанный ПК в силу их универсального характера могут быть использованы для математического моделирования самых разнообразных нелинейных динамических систем.

Перечень сокращений и обозначений

- АЧХ – амплитудно-частотная характеристика;
- БС – бойлерная система;
- ВТК – высокотемпературный контур;
- ГРЭС – гидрорециркуляционная электростанция;
- ГХ – Гильберт-Хуанг;
- ДУЧП – дифференциальные уравнения в частных производных;
- Д – термический деаэратор;
- ИП – (метод) интегрирования произведения;
- К – конденсатор;
- КЭН – система конденсатных электронасосов;
- мПГХ – модифицированное преобразование Гильберта-Хуанга;
- ОДУ – обыкновенные дифференциальные уравнения;
- ОЗТ – обратная задача теплопроводности;
- ПВД – подогреватели высокого давления;
- ПВК – программно-вычислительный комплекс;
- ПГ – преобразование Гильберта;
- ПГХ – преобразование Гильберта-Хуанга;
- ПК – программный комплекс;
- ПНД – подогреватели низкого давления;
- ППК – прямоточный паровой котел;
- ПЭН – система питательных электронасосов;
- СЛАУ – система линейных алгебраических уравнений;
- СНАУ – система нелинейных алгебраических уравнений;
- СПМ – спектральная плотность мощности;
- ТЭЦ – Теплоэлектроцентраль (разновидность тепловой электростанции);
- ЦВД – цилиндр высокого давления;
- ЦНД – цилиндр низкого давления;
- ЦСД – цилиндр среднего давления;
- ЦКП ВТК – центр коллективного пользования высокотемпературный комплекс;

EMD – Empirical Mode Decomposition;

EEMD – Ensemble Empirical Mode Decomposition;

CEEMDAN – Complete Ensemble Empirical Mode Decomposition with Adaptive Noise;

IMF – Intrinsic Mode Function.

Литература

- [1] **Александровский, Н.М.** Адаптивные системы автоматического управления сложными технологическими процессами / Н.М. Александровский, С.В. Егоров, Р.Е. Кузин. – М.: Энергия, 1973. – 272 с.
- [2] **Алексеюк, В.Э.** Усовершенствованная методика идентификации математических моделей теплоэнергетического оборудования / В.Э. Алексеюк, А.С. Максимов, П.Г. Сафронов // Вестник Иркутского государственного технического университета. – 2019. – № 23 (3). – С. 503-515.
- [3] **Алехин, Н.Б.** Построение нелинейной динамической модели морского судна в виде интегростепенного полинома / Н.Б. Алехин, В.Д. Павленко, С.Т. Тихончук // Тезисы 3-й Республ. научно-технич. коф. "Интегральные уравнения в прикладном моделировании". – Киев, 1989. – С. 10-11.
- [4] **Алимурадов, А.К.** Исследование частотно-избирательных свойств методов декомпозиции на эмпирические моды для оценки частоты основного тона речевых сигналов / А.К. Алимурадов // Труды Московского физико-технического института. – 2015. – Т. 7. – № 3 (27). – С. 56-68.
- [5] **Апарцин, А.С.** Идентификация полиномов Вольтерра на базе метода product integration / А.С. Апарцин, С.В. Солодуша, В.А. Спиряев, М.С. Щербинин // Тезисы докладов Международной конференции "Тихонов и современная математика секция "Обратные и некорректно поставленные задачи". – М.: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова, 2006. – С. 30.
- [6] **Апарцин, А.С.** К исследованию устойчивости решения полиномиального уравнения Вольтерра I рода / А.С. Апарцин // Автоматика и телемеханика. – 2011. – № 6. – С. 95-102.
- [7] **Апарцин, А.С.** К теории полилинейных уравнений Вольтерра I рода / А.С. Апарцин // Оптимизация, управление, интеллект. – 2005. – № 1(9). – С. 5-27.

- [8] **Апарцин, А.С.** Неклассические уравнения Вольтерра I рода: теория и численные методы / А.С. Апарцин. – Новосибирск: Наука, 1999. – 193 с.
- [9] **Апарцин, А.С.** Неулучшаемые Ламберт-оценки решений новых классов нелинейных интегральных неравенств [Электронный ресурс] / А.С. Апарцин, М.А. Островская, В.А. Спиряев // Материалы Всерос. конф. „Математическое моделирование, вычислительно-информационные технологии в междисциплинарных научных исследованиях“. – Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2009. – АпарцинОстровскаяСпиряев.pdf. – 1 электрон.опт.диск (CD-ROM).
- [10] **Апарцин, А.С.** Неулучшаемые оценки решений некоторых классов нелинейных интегральных неравенств / А.С. Апарцин // Тр. IX Междунар. конф. „Аналитическая механика, устойчивость и управление движением“, посвященной 105-летию Н.Г. Четаева. – Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2007. – Т. 5. – С. 60-77.
- [11] **Апарцин, А.С.** О билинейном уравнении Вольтерра I рода / А.С. Апарцин // Тезисы докладов VI конференции „Обратные и некорректно поставленные задачи“. – М.: ООО „МАКС Пресс“, 2000. – С. 8.
- [12] **Апарцин, А.С.** О билинейных уравнениях Вольтерра I рода / А.С. Апарцин // Оптимизация, управление, интеллект. – 2004. – № 2(8). – С. 20-28.
- [13] **Апарцин, А.С.** О неулучшаемых ламберт-оценках решений одного класса нелинейных интегральных неравенств / А.С. Апарцин, В.А. Спиряев // Труды Института математики и механики УрО РАН. – Т. 16. – № 2. – 2010. – С. 3-13.
- [14] **Апарцин, А.С.** О новом подходе к идентификации полиномов Вольтерра / А.С. Апарцин, С.В. Солодуша, В.А. Спиряев, М.С. Щербинин // Тезисы докладов Международного конгресса „Нелинейный динамический анализ“, посвященного 150-летию академика А.М. Ляпунова. – СПб.: изд-во СПбГУ, 2007. – С. 260.

- [15] **Апарцин, А.С.** О новых классах линейных многомерных уравнений I рода типа Вольтерра / А.С. Апарцин // Изв. вузов. Математика. – 1995. – № 11. – С. 28-41.
- [16] **Апарцин, А.С.** О полилинейных уравнениях Вольтерра I рода / А.С. Апарцин // Автоматика и телемеханика. – 2004. – № 2. – С. 118-125.
- [17] **Апарцин, А.С.** О решении многомерных уравнений Вольтерра I рода, возникающих в задаче идентификации нелинейных динамических систем / А.С. Апарцин // Методы оптимизации и их приложения. – Иркутск: СЭИ СО РАН, 1992. – С. 219-222.
- [18] **Апарцин, А.С.** О сходимости численных методов решения билинейного уравнения Вольтерра I рода / А.С. Апарцин // ЖВМиМФ. – 2007. – Т. 47. – № 8. – С. 1380-1388.
- [19] **Апарцин, А.С.** О численном решении билинейного уравнения Вольтерра I рода / А.С. Апарцин, Е.В. Маркова // Труды XII Байкальской международной конференции. – Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2001. – Т. 4. – С. 20-24.
- [20] **Апарцин, А.С.** Об одном подходе к идентификации полиномов Вольтерра / А.С. Апарцин, В.А. Спиряев // Оптимизация, управление, интеллект. – 2005. – № 2(10). – С. 109-117.
- [21] **Апарцин, А.С.** Об одном подходе к идентификации полиномов Вольтерра / А.С. Апарцин, В.А. Спиряев // Труды IV Всероссийской конференции "Математика, информатика, управление" (CD-proceedings). – Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2005. – 5.pdf.
- [22] **Апарцин, А.С.** Об одном приложении билинейного уравнения Вольтерра I рода / А.С. Апарцин, С.В. Солодуша, В.А. Спиряев // Тезисы докладов Всероссийской конф. „Алгоритмический и численный анализ неустойчивых задач“, 02.02-06.02.2004. – Екатеринбург: Изд-во Уральского ун-та, 2004. – С. 326.

- [23] **Апарцин, А.С.** Об оптимизации амплитуд тестовых сигналов при идентификации ядер Вольтерра / А.С. Апарцин, С.В. Солодуша // Автоматика и телемеханика. – 2004. – № 3. – С. 116-124.
- [24] **Апарцин, А.С.** Об устойчивости непрерывного решения полиномиального уравнения Вольтерра I рода / А.С. Апарцин, В.А. Спиряев // Материалы за VII международна практична конференция "Achievement of High School-2011 17-25 November, 2011. – С. 3-6.
- [25] **Апарцин, А.С.** Об эквивалентных нормах в теории полиномиальных интегральных уравнений Вольтерра I рода / А.С. Апарцин // Известия Иркутского госуниверситета. Серия „Математика“. – 2010. – Т. 3.– № 1. – С. 19-29.
- [26] **Апарцин, А.С.** Полилинейные интегральные уравнения Вольтерра I рода: элементы теории и численные методы / А.С. Апарцин // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. – 2007. – № 1. – С. 13-41.
- [27] **Апарцин, А.С.** Полиномиальные интегральные уравнения Вольтерра I рода и функция Ламберта / А.С. Апарцин // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2012. – Т. 18. – № 1. – С. 69-81.
- [28] **Апарцин, А.С.** Постановка и решение некоторых минимаксных задач / А.С. Апарцин // Тр. XII Байкальской международной конференции „Методы оптимизации и их приложения“. – Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2001. – Т. 1. – С. 68-73.
- [29] **Апарцин, А.С.** Применение интегростепенных рядов Вольтерра к моделированию динамики теплообменников / А.С. Апарцин, Э.А. Таиров, С.В. Солодуша, Д.В. Худяков // Изв. РАН. Энергетика. – 1994. – № 3. – С. 138-145.
- [30] **Апарцин, А.С.** Теоремы существования и единственности решений уравнений Вольтерра I рода, связанных с идентификацией нелинейных динамических систем (скалярный случай). Препринт № 9 / А.С. Апарцин. – Иркутск: СЭИ СО РАН, 1995. – 30 с.

- [31] **Апарцин, А.С.** Теоремы существования и единственности решений уравнений Вольтерра I рода, связанных с идентификацией нелинейных динамических систем (векторный случай). Препринт № 8 / А.С. Апарцин. – Иркутск: СЭИ СО РАН, 1996. – 60 с.
- [32] **Арбачаускене, Н.** Идентификация динамических систем / Н. Арбачаускене, И. Балтрунас, А. Немура и др. – Вильнюс: Минтис, 1974. – 287 с.
- [33] **Бахвалов, Н.С.** Численные методы (анализ, алгебра, обыкновенные дифференциальные уравнения) / Н.С. Бахвалов. – М.: Наука, 1973. – 632 с.
- [34] **Бек, Дж.** Некорректные обратные задачи теплопроводности / Дж. Бек, Б. Блакуэлл, Ч. Сент-Клэр. – М.: Мир, 1989. – 312 с.
- [35] **Бэслер, И.** О приближении нелинейных операторов полиномами Вольтерра / И. Бэслер, И.К. Даугавет // Тр. Ленингр. матем. общества. – 1990. - № 1. – С. 53-64.
- [36] **Ван-Трис, Г.Л.** Синтез оптимальных нелинейных систем управления / Г.Л. Ван-Трис. – М.: Мир, 1964. – 167 с.
- [37] **Веников, В.А.** Кибернетические модели электрических систем : учебное пособие для вузов / В.А. Веников, О.А. Суханов. – М.: Энергоиздат, 1982. – 328 с.
- [38] **Верлань, А.Ф.** Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Справочное пособие / А.Ф. Верлань, В.С. Сизиков. – Киев: Наукова думка, 1986. – 543 с.
- [39] **Виленкин, Н.Я.** Комбинаторика / Н.Я. Виленкин. – М.: Наука, 1969. – 323 с.
- [40] **Винер, Н.** Нелинейные задачи в теории случайных процессов / Н. Винер. – М.: Издательство иностранной литературы, 1961. – 159 с.
- [41] **Вольтерра, В.** Теория функционалов, интегральных и интегродифференциальных уравнений / В. Вольтерра. – М.: Наука, 1982. – 304 с.

- [42] **Воропай, Н.И.** Smart Grid: мифы, реальность, перспективы / Н.И. Воропай // Энергетическая политика. – 2010. – Вып. 2. – С. 9-14.
- [43] **Воскобойников, Ю.Е.** Алгоритмы непараметрической идентификации сложных технических систем / Ю.Е. Воскобойников, В.А. Боева // Информатика, вычислительная техника и управление. Научный вестник НГТУ. – 2020. – Т. 80. – № 4. – С. 47-64.
- [44] **Галин, Н.М.** Метод решения одного класса нелинейных задач теплообмена при изменяющихся граничных условиях / Н.М. Галин // Теплоэнергетика. – 1981. – № 4. – С. 55-56.
- [45] **Давиденко, К.Я.** Представление и реализация функционалов в управляющих вычислительных машинах методом разложения в ряд Вольтерра / К.Я. Давиденко // Вопросы машинной кибернетики. – М., 1973. – С. 42-47.
- [46] **Данилов, Л.В.** Теория нелинейных электрических цепей / Л.В. Данилов, П.Н. Матханов, Е.С. Филиппов. – Л.: Энергоиздат, 1990. – 252 с.
- [47] **Дейч, А.М.** Методы идентификации динамических объектов / А.М. Дейч. – М.: Энергия, 1979. – 240 с.
- [48] **Дейч, А.М.** Некоторые вопросы представления динамических свойств нелинейных объектов рядом Вольтерра / А.М. Дейч // Экспериментально-статистические методы исследования многофакторных процессов. Тр. МЭИ. – Вып. 67. – 1966.
- [49] **Дилигенская, А.Н.** Идентификация объектов управления / А.Н. Дилигенская. – Самара: Изд-во Самарский государственный технический университет, 2009. – 136 с.
- [50] **Дилигенская, А.Н.** Методы идентификации, анализ и синтез алгоритмов последовательной параметрической оптимизации в обратных задачах технологической теплофизики : дисс. ... д-р техн. наук: 05.13.01 / Дилигенская Анна Николаевна. – Самара: СамГТУ, 2019. – 247 с.

- [51] **Дорофеев, Б.М.** Гидродинамические и термоакустические автоколебания при поверхностном кипении в каналах / Б.М. Дорофеев, В.И. Волкова // Акустический журнал. – 2008. – Т. 54. – № 5. – С. 732–739.
- [52] **Дубинов, А.Е.** W-функция Ламберта и ее применение в математических задачах физики: учеб. пособие для вузов / А.Е. Дубинов, И.Д. Дубинова, С.К. Сайков. – Саров: ФГУП „РФЯЦ-ВНИИЭФ“, 2006. – 160 с.
- [53] **Каминаскас, В.** Идентификация динамических систем по дискретным наблюдениям / В. Каминаскас. – Вильнюс: Мокслас, 1985. – 152 с.
- [54] **Кан, Ш.Ч.** Анализ нестационарных сигналов на основе преобразования Гильберта-Хуанга / Ш.Ч. Кан, А.В. Микулович, В.И. Микулович // Информатика. – 2010. – № 2. – С. 25–35.
- [55] **Клер, А.М.** Повышение точности идентификации параметров математических моделей существующего теплоэнергетического оборудования / А.М. Клер, В.Э. Алексеюк // Научный вестник НГТУ. – 2019. – № 3 (76). – С. 57-76.
- [56] **Клер, А.М.** Оптимизация режимов работы ТЭЦ с использованием быстродействующих математических моделей теплофикационных паровых турбин / А.М. Клер, А.С. Максимов, Е.Л. Степанова // Теплофизика и аэромеханика. – 2006. – Т. 13. – № 1. – С. 159-167.
- [57] **Клер, А.М.** Оперативная оценка состояния основного оборудования ТЭС / А.М. Клер, А.С. Максимов, Е.Л. Степанова, П.В. Жарков // Электрические станции. – 2011. – № 4. – С. 2-6.
- [58] **Краснов, М.Л.** Интегральные уравнения. Введение в теорию / М.Л. Краснов. – М.: Наука, 1975. – 302 с.
- [59] **Курбацкий, В.Г.** О нейросетевом подходе к прогнозированию нестационарных временных рядов на основе преобразования Гильберта-Хуанга / В.Г. Курбацкий, Д.Н. Сидоров, В.А. Спиряев, Н.В. Томин // Автоматика и телемеханика. – 2011. – № 7. – С. 58-68.
- (English text: **Kurbatskii, V.G.** On the neural network approach for

- forecasting of nonstationary time series on the basis of the Hilbert-Huang transform / V.G. Kurbatskii, D.N. Sidorov, V.A. Spiryaev, N.V. Tomin // Automation and Remote Control. – 2011. – Vol. 72. – № 7. – P. 1405-1414.)
- [60] **Курбацкий, В.Г.** Прогнозирование нестационарных временных рядов на основе преобразования Гильберта-Хуанга и машинного обучения / В.Г. Курбацкий, Д.Н. Сидоров, В.А. Спиряев, Н.В. Томин // Автоматика и телемеханика. – 2014. – № 5. – С. 143-158.
(English text: **Kurbatsky, V.G.** Forecasting nonstationary time series based on Hilbert-Huang transform and machine learning / V.G. Kurbatsky, D.N. Sidorov, V.A. Spiryaev, N.V. Tomin // Automation and Remote Control. – 2014. – Vol. 75. – № 5. – P. 922-934.)
- [61] **Левин, А.А.** Автоколебательные пульсации давления в этаноле при захолаживании нагревателя / А.А. Левин, Э.А. Таиров, В.А. Спиряев // Теплофизика и аэромеханика. – 2017. – Т. 24. – № 1. – С. 61–72.
- [62] **Левин, А.А.** Исследование частотно-избирательных свойств преобразования Гильберта-Хуанга и его модификаций на примере изучения автоколебательных пульсаций давления / А.А. Левин, В.А. Спиряев // Вычислительные технологии. – 2017. – Т. 22. – № 5. – С. 58-72.
- [63] **Левин, А.А.** Применение преобразования Гильберта-Хуанга в задачах экспериментального изучения теплофизических процессов / А.А. Левин, В.А. Спиряев // Сборник трудов VII международного симпозиума „Обобщенные постановки и решения задач управления“ (GSSCP-2014). – М.: АНО „Издательство физико-математической литературы“, 2014. – С. 109-113.
- [64] **Лоскутов, А.Ю.** Анализ временных рядов. Курс лекций. / А.Ю. Лоскутов. – М.: Издательство МГУ, 2014. – 144 с.
- [65] **Льюнг, Л.** Идентификация систем. Теория для пользователя / Л. Льюнг. – М.: Наука, 1991. – 431 с.
- [66] **Макеенкова, Н.С.** О детализации структуры модели нелинейной динамической системы / Н.С. Макеенкова, И.В. Егоева, В.И. Нефедов,

- О.В. Вехов // Материалы VII Международной научно-технической конференции „Фундаментальные проблемы радиоэлектронного приборостроения“, INTERMATIC—2010. – Ч. 3. – М.: Энергоатомиздат, 2010. – С. 130-134.
- [67] **Маркова, Е.В.** О моделях развивающихся систем типа Глушкова и их приложениях в электроэнергетике / Е.В. Маркова, И.В. Сидлер, В.В. Труфанов // Автоматика и телемеханика. – 2011. – № 7. – С. 20-28.
- [68] **Маркова, Е.В.** Применение неклассических интегральных уравнений I рода типа Вольтерра для математического моделирования динамических систем / Е.В. Маркова, Д.Н. Сидоров, С.В. Солодуша, В.А. Спиряев // Материалы III конференции молодых ученых, посвященной М.А. Лаврентьеву. – Ч. I. – Новосибирск: изд-во РИЦ "Прайс-куррьер 2003. – С. 87-92.
- [69] **Маркова, Е.В.** Применение неклассических интегральных уравнений I рода типа Вольтерра для математического моделирования динамических систем / Е.В. Маркова, Д.Н. Сидоров, С.В. Солодуша, В.А. Спиряев // Материалы IV конференции молодых ученых, посвященной М.А. Лаврентьеву. – Ч. I. – Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2004. – С. 69-73.
- [70] **Матвеев, А.Ф.** О саморегуляризации задачи вычисления сингулярных интегралов с ядрами Коши и Гильберта в метрике C . Препринт № 165 / А.Ф. Матвеев. – М.: ИТЭФ, 1982. – 37 с.
- [71] **Нечес, И.О.** Метод анализа нелинейных радиотехнических цепей при сложных воздействиях, использующий аппарат функциональных рядов Вольтерра / И.О. Нечес. // Вестник Ростовского государственного университета путей сообщения. – 2005. – № 1. – С. 51-57.
- [72] **Новиков, С.И.** Практическая идентификация динамических характеристик объектов управления теплоэнергетического оборудования / С.И. Новиков. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2005. – 64 с.
- [73] **Павленко, В.Д.** Идентификация нелинейных динамических систем в виде ядер Вольтерры на основе данных измерений импульсных откликов

- / В.Д. Павленко // Электронное моделирование. – 2010. – Т. 32. – № 3. – С. 3-18.
- [74] **Павленко, В.Д.** Методы детерминированной идентификации нелинейных систем в виде моделей Вольтерра / В.Д. Павленко, С.В. Павленко // XII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2014. – М.: ИПУ РАН, 2014. – С. 2830-2842.
- [75] **Панин, А.А.** О локальной разрешимости и разрушении решения абстрактного нелинейного интегрального уравнения Вольтерра / А.А. Панин // Математические заметки. – 2015. – Т. 97. – Вып. 6. – С. 884-903.
- [76] **Первозванский, А.А.** Курс теории автоматического управления / А.А. Первозванский. – М.: Наука, 1986. – 616 с.
- [77] **Попков, Ю.С.** Идентификация и оптимизация нелинейных стохастических систем / Ю.С. Попков, О.Н. Киселев, Н.Г. Петров, Б.Л. Шмульян. – М.: Энергия, 1976. – 440 с.
- [78] **Пупков, К.А.** Анализ и расчет нелинейных систем с помощью функциональных степенных рядов / К.А. Пупков, Н.А. Шмыкова. – М.: Машиностроение, 1982. – 150 с.
- [79] **Пупков, К.А.** Функциональные ряды в теории нелинейных систем / К.А. Пупков, В.И. Капалин, А.С. Ющенко. – М.: Наука, 1976. – 448 с.
- [80] **Сафиуллин, Н.Т.** Разработка методики анализа временных рядов с помощью преобразования Хуанга-Гильберта : дисс. ... канд. техн. наук: 05.13.01 / Сафиуллин Николай Тахирович. – Новосибирск: ФГОБУ ВПО, 2015. – 193 с.
- [81] **Сидоров, Д.Н.** Методы анализа интегральных динамических моделей: теория и приложения / Д.Н. Сидоров. – Иркутск: Изд-во ИГУ, 2013. – 293 с.
- [82] **Сидоров, Д.Н.** Моделирование нелинейных динамических систем рядами Вольтерра (идентификация и приложения) : дисс. ... канд. физ.-мат.

- наук: 05.13.16 / Сидоров Денис Николаевич. – Иркутск: ИГУ, 1999. – 150 с.
- [83] **Сидоров, Д.Н.** Интегральные динамические модели: приближенные методы и приложения : дисс. ... д-р. физ.-мат. наук: 05.13.18 / Сидоров Денис Николаевич. – Иркутск: ИГУ, 2014. – 353 с.
- [84] **Сидоров, Д.Н.** Обобщенные решения в задаче моделирования нелинейных динамических систем полиномами Вольтерра / Д.Н. Сидоров, Н.А. Сидоров // Автоматика и телемеханика. – 2011. – № 6. – С. 127–132.
- [85] **Сидоров, Д.Н.** Существование и разрушение главных по Канторовичу непрерывных решений нелинейных интегральных уравнений / Д.Н. Сидоров // Дифференциальные уравнения. – 2014. – Т.50. – № 9. – С. 1231–1237.
- [86] **Солодуша, С.В.** Методы построения интегральных моделей динамических систем: алгоритмы и приложения в энергетике : дисс. ... д-р. техн. наук: 05.13.18 / Солодуша Светлана Витальевна. – Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2019. – 353 с.
- [87] **Солодуша, С.В.** Численное моделирование динамики энергоблока Назаровской ГРЭС полиномами Вольтерра / С.В. Солодуша, В.А. Спириев, Э.А. Таиров // Труды XXI Международной конференции «Проблемы управления и моделирования в сложных системах». Т. 1. – Самара: Общество с ограниченной ответственностью «Офорт», 2019. – С. 479–482.
- [88] **Солодуша, С.В.** Моделирование нелинейных динамических систем рядами Вольтерра с приложением к теплофизическим объектам / С.В. Солодуша, А.С. Апарцин, Э.А. Таиров // Тез. X Межд. Байкальской школы-семинара по методам оптимизации и их приложениям. – Иркутск: Изд-во СЭИ СО РАН, 1995. – С. 274–275.
- [89] **Солодуша, С.В.** О моделировании нелинейных динамических систем с векторным входом полиномами Вольтерра / С.В. Солодуша, В.А. Спириев, М.С. Щербинин // Материалы Всероссийской научной конференции

- "Математика. Механика. Информатика". – Челябинск: ЧелГУ, 2007. – С. 181-187.
- [90] **Солодуша, С.В.** О численном решении одного класса билинейных уравнений Вольтерра I рода / С.В. Солодуша, В.А. Спиряев // Труды международной конференции по вычислительной математике МКВМ-04. – Ч. II. – Новосибирск: Изд-во ИВМиМГ СО РАН, 2004. – С. 688-692.
- [91] **Солодуша, С.В.** Пакет "Динамика" для исследования динамических процессов рядами Вольтерра / С.В. Солодуша // Вестник ЮУрГУ. Серия: Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника. – 2017. – Т. 17. – № 2. – С. 83-92.
- [92] **Солодуша, С.В.** Постановка и решение некоторых минимаксных задач / С.В. Солодуша, В.А. Спиряев, М.С. Щербинин // Тезисы докладов Всеросс. научной конф. "Математика. Механика. Информатика". – Челябинск: ЧелГУ, 2006. – С. 127-128.
- [93] **Солодуша, С.В.** Построение интегральных моделей нелинейных динамических систем с помощью рядов Вольтерра : дисс. ... канд. физ.-мат. наук: 05.13.16 / Солодуша Светлана Витальевна. – Иркутск: ИГУ, 1996. – 153 с.
- [94] **Солодуша, С.В.** Приложение нелинейных уравнений Вольтерра I рода к задаче управления динамикой теплообмена / С.В. Солодуша // Автоматика и телемеханика. – 2011. – № 6. – С. 133-140.
- [95] **Солодуша, С.В.** Применение кубического полинома Вольтерра к исследованию нелинейных процессов теплообмена / С.В. Солодуша, В.А. Спиряев, М.С. Щербинин // Материалы II Всероссийской конференции с международным участием „Инфокоммуникационные и вычислительные технологии и системы“. – Т. 2. – Улан-Удэ, 2006. – С. 126-132.
- [96] **Солодуша, С.В.** Применение кубического полинома Вольтерра к моделированию динамики теплообмена / С.В. Солодуша, В.А. Спиряев, М.С. Щербинин // Вестник Иркутского государственного технического университета. – 2006. – Т. 26. – № 2. – С. 150-155.

- [97] **Солодуша, С.В.** Тестовое полиномиальное уравнение Вольтерра I рода в задаче идентификации входных сигналов / С.В. Солодуша, Е.Ю. Гражданцева // Труды института математики и механики УрО РАН. – 2021. – Т. 27. – № 4. – С. 161–174.
- [98] **Солодуша, С.В.** Численные методы идентификации несимметричных ядер Вольтерра и их приложения в теплоэнергетике / С.В. Солодуша // Труды XXIV конф. научной молодежи СЭИ СО РАН. – Иркутск, 1994. – С. 76-91. – Деп. ВИНТИ 30.08.94, № 2129-В94.
- [99] **Спиряев, В.А.** О билинейном уравнении Вольтерра I рода / В.А. Спиряев // Вестник Иркутского университета, специальный выпуск. – Иркутск: ИГУ, 2003. – С. 21.
- [100] **Спиряев, В.А.** О билинейном уравнении Вольтерра I рода / В.А. Спиряев // Системные исследования в энергетике (труды молодых ученых ИСЭМ СО РАН). – Вып. 33. – Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2003. – С. 190-194.
- [101] **Спиряев, В.А.** О некоторой мажорантной задаче Коши / В.А. Спиряев // Тезисы докл. Молодежной международной научной школы-конференции „Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач“. – Новосибирск: ИМ СО РАН, 2009. – С. 97.
- [102] **Спиряев, В.А.** О решении билинейного уравнения Вольтерра I рода / В.А. Спиряев // Тр. Всеросс. конф. „Математические и информационные технологии в энергетике, экономике, экологии“. – Ч. 2. – Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2003. – С. 35-39.
- [103] **Спиряев, В.А.** О численном решении билинейных уравнений Вольтерра I рода / В.А. Спиряев // Вестник Иркутского университета, специальный выпуск. – Иркутск: ИГУ, 2002. – С. 19.
- [104] **Спиряев, В.А.** Об одной задаче автоматического регулирования для нелинейной динамической системы с двумя входами / В.А. Спиряев // Системные исследования в энергетике: Труды молодых ученых. – Вып. 34. – Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2004. – С. 189-193.

- [105] **Спиряев, В.А.** Об одном подходе к идентификации кубического полинома Вольтерра / В.А. Спиряев // Сб. статей III Междунар. научно-технической конф. „Аналитические и численные методы моделирования естественнонаучных и социальных проблем“. – Пенза: Приволжский дом знаний, 2008. – С. 7-9.
- [106] **Спиряев, В.А.** Обоснование product integration method для идентификации квадратичного и кубического полиномов Вольтерра в случае скалярного входа / В.А. Спиряев // Труды IX Международной Четаевской конференции „Аналитическая механика, устойчивость и управление движением“, посвященная 105-летию Р.Г. Четаева. – Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2007. – Т. 5. – С. 210-217.
- [107] **Спиряев, В.А.** Оптимизация амплитуд тестовых сигналов для векторной квадратичной модели / В.А. Спиряев, М.С. Щербинин // Системные исследования в энергетике: Труды молодых ученых. – Вып. 38. – Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2008. – С. 158-164.
- [108] **Спиряев, В.А.** Построение квадратичного и кубического полиномов Вольтерра для нелинейных динамических систем с векторным входом / В.А. Спиряев, М.С. Щербинин // Тезисы докладов VII Всероссийской конференции молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям (с участием иностранных ученых). – Красноярск: Институт вычислительных технологий СО РАН, 2006. – С. 29.
- [109] **Спиряев, В.А.** Применение метода product integration в идентификации полиномов Вольтерра / В.А. Спиряев // Материалы IX школы-семинара „Математическое моделирование и информационные технологии“. – Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2007. – С. 151-154.
- [110] **Спиряев, В.А.** Применение метода product integration для идентификации ядер Вольтерра / В.А. Спиряев // Системные исследования в энергетике: Труды молодых ученых. – Вып. 35. – Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2005. – С. 215-220.

- [111] **Спиряев, В.А.** Программное средство для моделирования нелинейных динамических систем с помощью кубических полиномов Вольтерра (скалярный случай) / С.В. Солодуша, В.А. Спиряев // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2013618929. Правообладатель ФГБУН ИСЭМ СО РАН. – № 2013616622 ; заявл. 29.07.2013; зарегистр. 23.09.2013 ; опубл. 23.09.2013. Бюл. № 12.
- [112] **Спиряев, В.А.** Программный комплекс для моделирования нелинейных динамических систем скалярными полиномами Вольтерра второй и третьей степени методом product integration / В.А. Спиряев // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2021618852 . Правообладатель ФГБУН ИСЭМ СО РАН. – № 2021618077 ; заявл. 28.05.2021; зарегистр. 01.06.2021 ; опубл. 01.06.2021. Бюл. № 6.
- [113] **Спиряев, В.А.** Численное решение некоторых билинейных уравнений Вольтерра I рода / В.А. Спиряев // Труды Всеросс. конф. „Математические и информационные технологии“. – Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2004. – С. 38-42.
- [114] **Спиряев, В.А.** Численные решения билинейного уравнения Вольтерра I рода методом квадратур / В.А. Спиряев // Системные исследования в энергетике: Труды молодых ученых. – Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2002. – С. 220-226.
- [115] **Таиров, Э.А.** Математическая модель, численные методы и программное обеспечение тренажера для энергоблока Иркутской ТЭЦ–10 / Э.А. Таиров, А.А. Логинов, В.Ф. Чистяков. – Иркутск: СЭИ СО РАН, 1999. – Препринт № 11. – 43 с.
- [116] **Таиров, Э.А.** Нелинейное моделирование динамики теплообмена в канале с однофазным теплоносителем / Э.А. Таиров // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. – 1989. – № 1. – С. 150-156.
- [117] **Теория** автоматического регулирования / Под. ред. В.В. Солодовникова. – М.: Машиностроение, 1969. – Кн. 3. Ч. II. – 374 с.

- [118] **Тихонов, А.Н.** Методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. – М.: Наука, 1979. – 288 с.
- [119] **Федосов, Б.Т.** О детализации структуры модели нелинейной инерционной системы [Электронный ресурс] / Б.Т. Федосов. – Режим доступа: http://model.exponenta.ru/bt/bt_0007.html.
- [120] **Флейк, Р.Г.** Теория рядов Вольтерра и ее приложение к нелинейным системам с переменными параметрами / Р.Г. Флейк // Труды II Международ. конгресса междунар. Федерации по автомат. упр. „Оптимальные системы. Статистические методы“, г. Базель, 25 авг.–4 сент. 1963. – М.: Наука, 1965. – С. 453-468.
- [121] **Фомин, А.А.** Метод построения многомерной модели Вольтерра глазодвигательного аппарата / А.А. Фомин, В.Д. Павленко, А.Н. Фёдорова // Электротехнические и компьютерные системы. – 2015. – № 19 (95). – С. 296-301.
- [122] **Япарова, Н.М.** Принцип невязки и его применение к численному моделированию некоторых обратных задач математической физики : дисс. ... канд. физ-мат. наук: 05.13.18 / Япарова Наталья Михайловна. – Челябинск: ЧелГУ, 2007. – 135 с.
- [123] **Яценко, Ю.П.** Интегральные модели систем с управляемой памятью / Ю.П. Яценко. – Киев: Наукова думка, 1991. – 218 с.
- [124] **Павленко, В.Д.** Идентификация в виде ядер Вольтерра вентильно-реактивного двигателя для целей диагностики / В.Д. Павленко, З.П. Порцына // Електромашинобуд. та електрообладн.: Міжвід. наук.-техн. зб. Пробл. автомат. електропривода. Теорія і практика. – 2006. – Вип. 66. – С. 354-355.
- [125] **Alper, P.** A consideration of the discrete Volterra series / P. Alper // IEEE Trans. on Automatic Control. – 1965. – V. 10. – № 3. – P. 322-327.
- [126] **Alper, P.** Higher-dimensional Z-transforms and non-linear discrete systems / P. Alper // Revue A. – 1964. – Vol. 6. – № 4. – P. 199-212.

- [127] **Antipina, E.** Application of a Volterra quadratic polynomial to modeling elements of heat engineering devices / E. Antipina, V. Spiryaev, E. Tairov // E3S Web of Conferences. – 2019. – Vol. 114. – P. 01007. DOI: 10.1051/e3sconf/201911401007.
- [128] **Apartsyn, A.S.** Mathematical modeling the dynamic systems and objects with the help of the Volterra integral series / A.S. Apartsyn // EPRI-SEI Joint seminar of methods for solving the problems on energy power systems development and control. – Beijing, China: EPRI, 1991. – P. 117-132.
- [129] **Apartsyn, A.S.** Modeling of nonlinear dynamic systems with Volterra polynomials: elements of theory and applications / A.S. Apartsyn, S.V. Solodusha, V.A. Spiryaev // International Journal of Energy Optimization and Engineering. – 2013. – Vol. 2. – № 4. – P. 16-43.
- [130] **Apartsyn, A.S.** Unimprovable estimates of solutions for some classes integral inequalities / A.S. Apartsyn // Inverse and Ill-Posed Problems. – 2008. – Vol. 16. – № 7. – P. 651-680.
- [131] **Bahar, O.** Enhanced Hilbert–Huang transform and its application to modal identification / O. Bahar, S. Ramezani // Structural Design of Tall and Special Buildings. – 2014. – Vol. 23. – № 4. – P. 239-253.
- [132] **Battista, B.M.** Application of the empirical mode decomposition and Hilbert-Huang transform to seismic reflection data / B.M. Battista, C. Knapp, T. McGee, V. Goebel // Geophysics. – 2007. – Vol. 72. – № 2. – P. H29–H37.
- [133] **Belbas, S.A.** Numerical solution of multiple nonlinear Volterra integral equations / S.A. Belbas, Yu. Bulka // Applied Mathematics and Computation. – 2011. – Vol. 217. – P. 4791-4804.
- [134] **Bellman, R.** The stability of solutions of linear differential equations / R. Bellman // Duke Math. J. – 1943. – Vol. 10. – P. 643-647.
- [135] **Bose, A.G.** A theory of nonlinear systems : Technical Report 309 / A.G. Bose. – Research Laboratory of Electronics, MIT, May 15, 1956.

- [136] **Carassale, L.** Modeling Nonlinear Systems by Volterra Series / L. Carassale, A. Kareem // Journal of Engineering Mechanics, ASCE. – 2010. – Vol. 136. – № 6. – P. 801-818.
- [137] **Brockwell, P.J.** Introduction to time series and forecasting / P.J. Brockwell, R.A. Davis. – N.Y.: Springer-Verlag, 2002.
- [138] **Browne, T.J.** A comparative assessment of two techniques for modal identification from power system measurements / T.J. Browne, V. Vittal, G.T. Heydt, A.R. Messina // IEEE Transactions on Power Systems. – 2008. – Vol. 23. – № 3. – P. 1408–1415.
- [139] **Brunner, H.** Volterra integral equations: an introduction to theory and applications / H. Brunner. – Cambridge: Cambridge University Press, 2017. – 387 p.
- [140] **Bulatov, M.V.** Integral Equations Related to Volterra Series and Inverse Problems: Elements of Theory and Applications in Heat Power Engineering / S.V. Solodusha, M.V. Bulatov // Mathematics. – 2021. – Vol. 9. – № 16. – P. 1905.
- [141] **Chesler, D.A.** Nonlinear system with Gaussian inputs : Sc. D. Thesis / D.A. Chesler. – MIT Dept. of Electrical Engineering, 1960.
- [142] **Colominas, M.A.** Noise-assisted EMD methods in action / M.A. Colominas, G. Schlotthauer, M.E. Torres, P. Flandrin // Advances in Adaptive Data Analysis. – 2012. – Vol. 4. – № 4.
- [143] **Corless, R.M.** On the Lambert W function / R.M. Corless, G.H. Gonnet, D.E.G. Hare, D.J. Jeffrey, et al // Advances Computational Maths. – 1996. – Vol. 5. – P. 329-359.
- [144] **Cover, T.** Geometrical and statistical properties of systems of linear inequalities with applications in pattern recognition / T. Cover // IEEE Transactions on Electronic Computers. – 1965. – Vol. 14. – № 3. – P. 326-334.

- [145] **Doyle III, F.** Identification and control using Volterra models / F. Doyle III, R. Pearson, B. Ogunnaike. – Springer-Verlag, 2002.
- [146] **Echeverria, J.C.** Application of empirical mode decomposition to heart rate variability analysis / J.C. Echeverria, J.A. Crowe, M.S. Woolfson, and B.R. Hayes-Gill // Medical and Biological Engineering and Computing. – 2001. – Vol. 39. – № 4. – P. 471–479.
- [147] **Elias, P.** Progress in information theory in the U.S.A., 1957-1960 / P. Elias et al // IRE Trans. on Information Theory. – 1961. – Vol. 7. – № 3. – P. 128-144.
- [148] **Flandrin, P.** Detrending and denoising with empirical mode decomposition / P. Flandrin, P. Goncalves, G. Rilling // Proceedings of the 12th European Signal Processing Conference (EUSIPCO '04), Vienna, Austria, September 2004. – Vol. 2. – P. 1581–1584.
- [149] **Flandrin, P.** Empirical mode decomposition as a filter bank / P. Flandrin, G. Rilling, P. Goncalves // IEEE Signal Processing Letters. – 2004. – Vol. 11. – № 2. – P. 112–114.
- [150] **Frechet, M.** Sur les fonctionnelles continues / M. Frechet // Ann. de l'Ecole Normale Sup. – 1910. – Vol. 30. – P. 27.
- [151] **George, D.A.** Continuous Nonlinear Systems : Technical Report 355 / D.A. George. – Research Laboratory of Electronics, MIT, July 24, 1959.
- [152] **Hsieh, M.** Parameter estimation using Volterra series / M. Hsieh, P. Rayner // ICASSP-98, 1998. – P. 49-53.
- [153] **Hu, H.L.** Identification of Gas-solid Two-phase Flow Regimes Using Hilbert-Huang Transform and Neural-Network Techniques / H.L. Hu, J. Zhang, J. Dong, Z.Y. Luo, T.M. Xu // Instrumentation Science & Technology. – 2011. – Vol. 39. – № 2. – P. 198-210.
- [154] **Huang, N.E.** A review on Hilbert-Huang transform: Method and its applications to geophysical studies / N.E. Huang, Z. Wu // Rev. Geophys. – 2008. – Vol. 46. – № 2. doi:10.1029/2007RG000228.

- [155] **Huang, N.E.** Computing instantaneous frequency by normalizing Hilbert transform / N.E. Huang. – Patent 6901353, U.S. Patent and Trademark Off., Washington, D.C., 2005.
- [156] **Huang, N.E.** Hilbert-Huang transform and its applications / N.E. Huang, S.S.P. Shen. – Singapore, World Scientific Publishin Co., 2005. – 323 p.
- [157] **Huang, N.E.** On Hilbert Spectral Representation: A True Time-Frequency Representation for Nonlinear and Nonstationary Data / N.E. Huang, X. Chen, M.-T. Lo, Zh. Wu // *Advances in Adaptive Data Analysis*. – 2011. – Vol. 3. – № 1&2. – P. 63-93.
- [158] **Huang, N.E.** The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis / N.E. Huang, Z. Shen, S.R. Long, M.C. Wu, et al // *Proc. R. Soc. Lond. A*. – 1998. – Vol. 454. – P. 903–995.
- [159] **Huang, Y.** Arbitrary order Hilbert spectral analysis definition and application to fully developed turbulence and environmental time series : Ph.D. Thesis. ... Fluid Mechanics / Y. Huang. – Universite des Sciences et Technologie de Lille - Lille I: Shanghai University, 2009. – 273 p.
- [160] **Im, S.B.** Adaptive Equalization of Nonlinear Digital Satellite Channels Using a Frequency-Domain Volterra Filters / S.B. Im // *Proceedings of IEEE Military Communications Conference (MILCOM-96)*, Mclean, VA, Oct. 21-24, 1996. – P. 843-848.
- [161] **Jeffrey, D.J.** Unwinding the branches of the Lambert W function / D.J. Jeffrey, D.E.G. Hare, R.M. Corless // *The Mathematical Scientist*. – 1996. – Vol. 21. – № 1. – P. 1-7.
- [162] **Laila, D.S.** A refined Hilbert–Huang transform with applications to interarea oscillation monitoring / D.S. Laila, A.R. Messina, B.C. Pal // *IEEE Transactions on Power Systems*. – 2009. – Vol. 24. – № 2. – P. 610-620.
- [163] **Linz, P.** Product integration method for Volterra integral equations of the first kind / P. Linz // *BIT*. – 1971. – Vol. 11. – P. 413-421.

- [164] **Long, S.R.** The Hilbert techniques: An alternate approach for non-steady time series analysis / S.R. Long, N.E. Huang, C.C. Tung, M.-L.C. Wu, R.-Q. Lin, E. Mollo-Christensen, Y. Yuan // IEEE GRSS. – 1995. – Vol. 3. – P. 6-11.
- [165] MAPLE 10 // Licensed to: Energy Systems Institute of the SB RAS. Serial number: 5GG8Z57RMT8DA5ZE.
- [166] **Minu, K.K.** Volterra kernel identification by wavelet networks and its applications to nonlinear nonstationary time series / K.K. Minu, John C. Jessy // Journal of Information and Data Management. – 2012. – Vol. 1. – № 1. – P. 4-9.
- [167] **Ogunfunmi, T.** Adaptive nonlinear system identification: the Volterra and Wiener model approaches / T. Ogunfunmi. – Springer, 2007. – 232 p.
- [168] **Pavlenko, V.D.** Estimation of the Volterra kernels of a nonlinear system using impulse response data / V.D. Pavlenko // Signal Image Processing and Pattern Recognition: Proc. the Eighth All-Ukrainian Intern. Conf. UkrOBRAZ'2006, August 28–31, 2006, Kyjiv, Ukraine. – Kyjiv, 2006. – P. 191-194.
- [169] **Prazenica, R.J.** Volterra kernel identification using triangular wavelets / R.J. Prazenica, A.J. Kurdila // Journal of Vibration and Control. – 2004. – Vol. 10. – № 4. – P. 597-622.
- [170] **Rilling, G.** On empirical mode decomposition and its algorithms / G. Rilling, P. Flandrin, P. Goncalves // IEEE-EURASIP Workshop on Nonlinear Signal and Image Processing NSIP-03, Grado (I). – 2003.
- [171] **Rilling, G.** One or two frequencies? The empirical mode decomposition answers / G. Rilling, P. Flandrin // Signal Processing, IEEE Transactions. – 2008. – Vol. 56. – № 1. – P. 85–95.
- [172] **Rilling, G.** Empirical Mode Decomposition / G. Rilling, P. Flandrin, P. Goncalves. – Available at: <http://perso.ens-lyon.fr/patrick.flandrin/emd.html> (accessed 23.12.2021).

- [173] **Rugh, W.J.** Nonlinear system theory: the Volterra/Wiener approach / W.J. Rugh. – Baltimore, MD: John Hopkins University Press, 1981. – 330 p.
- [174] **Ruspini, L.C.** Two-phase flow instabilities: A review / L.C. Ruspini, C.P. Marcel, A. Clause // International Journal of Heat Mass Transfer. – 2014. - Vol. 71. – P. 521–548.
- [175] **Schetzen, M.** Measurement of the kernels of a non-linear systems of finite order / M. Schetzen // International Journal of Control. – 1965. - Vol. 1. – № 3. – P. 251–263.
- [176] **Silva, S.** Nonlinear mechanical system identification using discrete-time Volterra models and Kautz filter / S. Silva // Proceedings of the 9th Brazilian Conference on Dynamics Control and their Applications, June 07-11, 2010. – Serra Negra, Brazil, 2010. – P. 299-305.
- [177] **Silva, W.** Identification of nonlinear aeroelastic systems based on the Volterra theory: progress and opportunities / W. Silva // Nonlinear Dynamics. – 2005. – Vol. 39. – № 1. – P. 25–62.
- [178] **Singleton, H.E.** Theory of Nonlinear Transducers : Technical Report 160 / H.E. Singleton. – MIT, Research Laboratory of Electronics, September, 1950.
- [179] **Solodusha, S.** Numerical Modeling of Dynamics of Thermal Power Equipment of the Power unit at the Nazarovo Power Station by Volterra Polynomial / Solodusha S., Spiryaev V., Tairov E. // Proc. of the 2019 XXI International Conference Complex Systems: Control and Modeling Problems. – Samara, Russia, 2019. DOI: 10.1109/CSCMP45713.2019.8976749.
- [180] **Suslov, K.V.** Modeling of nonlinear dynamics of active components in intelligent electric power systems / K.V. Suslov, S.V. Solodusha, D.O. Gerasimov // Proceedings of the 4th International Conference on Smart Cities and Green ICT Systems "SMARTGREENS 2015". – Lisbon: SCITEPRESS–Science and Technology Publications, 2015. – P. 195-200.
- [181] **Suslov, K.V.** Smart grid: algorithms for control of active-adaptive network components / K.V. Suslov, D.O. Gerasimov, S.V. Solodusha // Proc. of

IEEE Powertech Eindhoven "Towards Future Power Systems and Emerging Technologies" . – Eindhoven, 2015. – P. 95.

- [182] **Torres, M.E.** A complete ensemble empirical mode decomposition with adaptive noise / M.E. Torres, M.A. Colominas, G. Schlotthauer, P. Flandrin // IEEE Int. Conf. on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP), Prague (CZ), 2011. – P. 4144-4147.
- [183] **Wiener, N.** Response of a nonlinear system to noise / N. Wiener. – Radiation Laboratory M.I.T., 1942. Restricted report V-16-S. – № 129. – Declassified July 1946, published by U.S. Dept. Commerce, report № PB-I-5R087.
- [184] **Wu, Z.** Ensemble empirical mode decomposition: a noise-assisted data analysis method / Z. Wu, N.E. Huang // Advances in adaptive data analysis. – 2009. – Vol. 1. – № 1. – P. 1-41.
- [185] **Wu, Z.** Statistical significance test of intrinsic mode functions / Z. Wu, N.E. Huang // Hilbert–Huang Transform and Its Applications. – 2005. – P. 107–127.
- [186] **Young, A.** Approximate product integration / A. Young // Proc. Roy. Soc. London (A) 224. – 1954. – P. 552-561.
- [187] **Yuan, Y.** Specific emitter identification based on Hilbert-Huang transform-based time-frequency-energy distribution features / Y. Yuan, Z. Huang, H. Wu, X. Wang // IET Communications. – 2014. – Vol. 8. – № 13. – P. 2404-2412.

Приложение

Приложение А. Иллюстративный материал

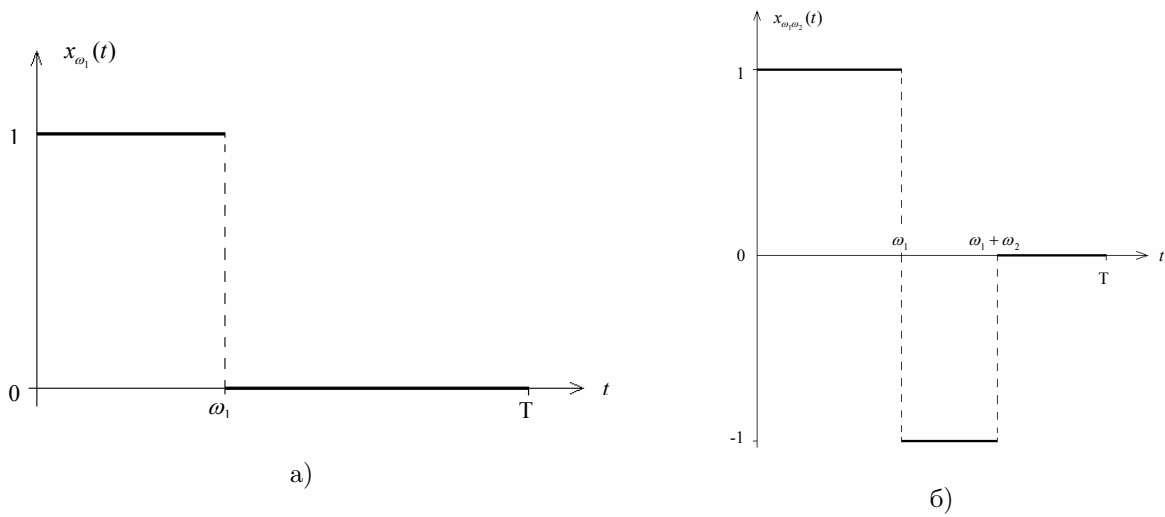


Рисунок П.1.1 – Сигналы для идентификации квадратичной а) и кубической модели б)

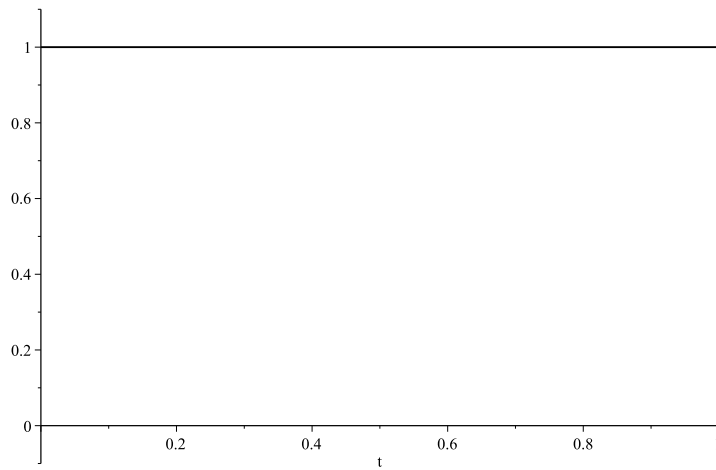


Рисунок П.1.2 – Сигнал $x(t) = e(t)$

Приложение Б.
Идентификация ядер Вольтерра с помощью семейств
кусочно-постоянных тестовых сигналов

ТЕОРЕМА 7. (Апарцин А.С. 1995)

Условия

$$f''_{t\omega_1}(t, \omega_1) + f''_{\omega_1^2}(t, \omega_1) \in C_{\Delta_2}, \Delta_2 = \{t, \omega_1/0 \leq \omega_1 \leq t \leq T\}; \quad (\text{П.1.1})$$

$$f(t, 0) = 0, \forall t \in [0, T]; \quad (\text{П.1.2})$$

$$f(t - \omega_1, -\omega_1) = f(t, \omega_1), \forall t, \omega_1 \in \Delta_2; \quad (\text{П.1.3})$$

$$f'_{\omega_1}(t, \omega_1) |_{\omega_1=0} = 0 \quad \forall t \in [0, T] \quad (\text{П.1.4})$$

необходимы и достаточны для существования решения уравнения (1.16) в классе симметричных функций, непрерывных на $\Pi_2 = \{s_1, s_2/0 \leq s_1, s_2 \leq T\}$. Это решение единственно в указанном классе и определяется формулой (1.17).

ТЕОРЕМА 8. (Апарцин А.С. 1995)

Условия

$$f'''_{t\omega_2^2} - f'''_{t\omega_1\omega_2} + f'''_{\omega_1\omega_2^2} - f'''_{\omega_1^2\omega_2} \in C_{\Delta_3}, \quad (\text{П.1.5})$$

$$\Delta_3 = \{t, \omega_1, \omega_2/\omega_1, \omega_2 \geq 0, 0 \leq \omega_1 + \omega_2 \leq t \leq T\};$$

$$f(t, 0, 0) = 0, \forall t \in [0, T]; \quad (\text{П.1.6})$$

$$f(t, 0, \omega_1) = -f(t, \omega_1, 0), \forall t, \omega_1 \in \Delta_3; \quad (\text{П.1.7})$$

$$f(t - \omega_1, 0, -\omega_1) = f(t, \omega_1, 0), \forall t, \omega_1 \in \Delta_3; \quad (\text{П.1.8})$$

$$f(t, \omega_1, -\omega_1) = 8f(t, \omega_1, 0), \forall t, \omega_1 \in \Delta_3; \quad (\text{П.1.9})$$

$$f(t - \omega_1, -\omega_1, \omega_1) = -8f(t, \omega_1, 0), \forall t, \omega_1 \in \Delta_3; \quad (\text{П.1.10})$$

$$f(t - \omega_1 - \omega_2, 0, -\omega_2) = -f(t - \omega_1, 0, \omega_2), \forall t, \omega_1, \omega_2 \in \Delta_3; \quad (\text{П.1.11})$$

$$f(t - \omega_1, \omega_2, -\omega_2) = -8f(t - \omega_1, 0, \omega_2), \forall t, \omega_1, \omega_2 \in \Delta_3; \quad (\text{П.1.12})$$

$$f(t - \omega_1 - \omega_2, -\omega_2, \omega_2) = 8f(t - \omega_1, 0, \omega_2), \forall t, \omega_1, \omega_2 \in \Delta_3; \quad (\text{П.1.13})$$

$$\frac{9}{2}f(t, \omega_1, 0) + \frac{1}{2}f(t - \omega_1, -\omega_1, \omega_1 + \omega_2) + \frac{1}{2}f(t, \omega_1 + \omega_2, -\omega_2) +$$

$$+\frac{9}{2}f(t - \omega_1, 0, \omega_2) = f(t, \omega_1, \omega_2) \forall t, \omega_1, \omega_2 \in \Delta_3; \quad (\text{П.1.14})$$

$$f'_{\omega_2}(t, \omega_1, \omega_2)|_{\omega_1=\omega_2=0} = 0 \quad \forall t \in [0, T] \quad (\text{П.1.15})$$

необходимы и достаточны для существования решения уравнения (1.18) в классе симметричных по всем переменным функций, непрерывных на $\Pi_3 = \{s_1, s_2, s_3 / 0 \leq s_1, s_2, s_3 \leq T\}$. Это решение единственно в указанном классе и определяется формулой (1.19).

Доказательства теорем 7 и 8 получены А.С. Апарциным и приведены в [30].

Приложение В.

Обоснование моделей и вычислительных алгоритмов в задачах идентификации

Квадратичный случай.

ТЕОРЕМА 1. Система линейных алгебраических уравнений (3.12), (3.13) является замкнутой и невырожденной.

Доказательство:

Покажем, что СЛАУ (3.12), (3.13) замкнута, то есть число уравнений равно числу неизвестных. В силу скалярности входного сигнала, ядро $K_2(s_1, s_2)$ является симметричной функцией, так что $p_{\mu,\nu} = p_{\nu,\mu}$, а следовательно, количество неизвестных в (3.8) равно $n + \frac{n(n+1)}{2}$. Подсчитаем количество уравнений. Число уравнений в (3.12) равно

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i 1 = \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2},$$

а в (3.13) – n , так что их сумма совпадает с числом неизвестных в (3.8), что и требовалось доказать.

Покажем невырожденность этой системы.

Введем следующие обозначения:

$$\mathbf{V}_{i,j} K_2 = \int_{(i-j+1)h}^{ih} K_2(s_1, s_2) ds_1 = \sum_{\mu=i-j+1}^i V_{\mu} K_2, \quad (\text{П.1.16})$$

где

$$V_{\mu} K_2 = \int_{(\mu-1)h}^{\mu h} K_2(s_1, s_2) ds_1; \quad (\text{П.1.17})$$

$$(\mathbf{V}_{i,j} \cdot \mathbf{V}_{k,l}) K_2 = \int_{(i-j+1)h}^{ih} \int_{(k-l+1)h}^{kh} K_2(s_1, s_2) ds_1 ds_2, \quad (\text{П.1.18})$$

$$(V_{\mu} V_{\mu}) K_2 = V_{\mu}^2 K_2 = \int_{(\mu-1)h}^{\mu h} \int_{(\mu-1)h}^{\mu h} K_2(s_1, s_2) ds_1 ds_2 = p_{\mu,\mu},$$

$$(V_\mu V_\nu)K_2 = \int_{(\mu-1)h}^{\mu h} \int_{(\nu-1)h}^{\nu h} K_2(s_1, s_2) ds_1 ds_2 = p_{\mu, \nu}. \quad (\text{П.1.19})$$

Тогда двойная сумма из (3.12) переписывается в виде

$$\sum_{\mu=i-j+1}^i \sum_{\nu=i-j+1}^i p_{\mu, \nu} = \mathbf{V}_{i,j}^2 K_2 = \left(\sum_{\mu=i-j+1}^i V_\mu \right)^2 K_2. \quad (\text{П.1.20})$$

Используя (П.1.16)-(П.1.19), перепишем систему уравнений в новых обозначениях:

$$y_{i,j}^\alpha = \alpha \sum_{\mu=i-j+1}^i m_\mu + \alpha^2 \mathbf{V}_{i,j}^2 K_2, \quad 1 \leq j \leq i \leq n, \quad (\text{П.1.21})$$

$$y_{i,1}^\beta = \beta m_i + \beta^2 p_{i,i}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Так как ядро K_2 симметрично, то операторы V_μ и V_ν являются перестановочными и, следовательно, сумма, входящая в (П.1.20), раскрывается по полиномиальной формуле

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_j)^N = \sum_{r_1 + \dots + r_j = N} \frac{N!}{r_1! \dots r_j!} a_1^{r_1} \dots a_j^{r_j}, \quad N = 2. \quad (\text{П.1.22})$$

Согласно (П.1.22), число различных слагаемых $(V_\mu V_\nu)K_2 = p_{\mu, \nu}$, $1 \leq \nu \leq \mu \leq n$, входящих в (П.1.20), равно $C_n^1 + C_n^2 = n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$. Воспользовавшись этим фактом, распишем систему (П.1.21) для каждого $i = 1, 2, \dots, n$ на n подсистем:

$$i = 1, j = 1,$$

$$\alpha m_1 + \alpha^2 p_{1,1} = y_{1,1}^\alpha,$$

$$\beta m_1 + \beta^2 p_{1,1} = y_{1,1}^\beta; \quad (\text{П.1.23})$$

$$i = 2, j = \overline{1, 2},$$

$$\alpha m_2 + \alpha^2 p_{2,2} = y_{2,1}^\alpha,$$

$$\beta m_2 + \beta^2 p_{2,2} = y_{2,1}^\beta,$$

$$\alpha(m_2 + m_1) + \alpha^2(p_{2,2} + p_{1,1} + 2p_{2,1}) = y_{2,2}^\alpha; \quad (\text{П.1.24})$$

.....

$$i = n, j = \overline{1, n},$$

$$\alpha m_n + \alpha^2 p_{n,n} = y_{n,1}^\alpha,$$

$$\beta m_n + \beta^2 p_{n,n} = y_{n,1}^\beta,$$

$$\alpha(m_n + m_{n-1}) + \alpha^2(p_{n,n} + p_{n-1,n-1} + 2p_{n,n-1}) = y_{n,2}^\alpha,$$

.....

$$\alpha(m_n + \dots + m_1) + \alpha^2(p_{n,n} + \dots + p_{1,1} + 2(p_{n,n-1} + \dots + p_{2,1})) = y_{n,n}^\alpha. \quad (\text{П.1.25})$$

Упорядочим вектор неизвестных и правую часть СЛАУ следующим образом:

$$v_{sq} = (m_1, p_{11}, \dots, m_n, p_{n,n}; p_{2,1}, \dots, p_{n,n-1}; p_{3,1}, \dots, p_{n,n-2}; p_{n,1}), \quad (\text{П.1.26})$$

$$b_{sq} = (y_{1,1}^\alpha, y_{1,1}^\beta, \dots, y_{n,1}^\alpha, y_{n,1}^\beta; y_{2,2}^\alpha, \dots, y_{n,2}^\beta; \dots; y_{n,n}^\alpha), \quad (\text{П.1.27})$$

тогда матрица \mathbf{A}^{sq} , соответствующая системе (П.1.23)-(П.1.25), так что $\mathbf{A}^{sq} v_{sq} = b_{sq}$, имеет блочно-треугольную структуру:

$$\mathbf{A}^{sq} = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha^2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \beta & \beta^2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \alpha^2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \beta & \beta^2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha & \alpha^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \beta & \beta^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha & \alpha^2 & \alpha & \alpha^2 & \dots & 0 & 0 & 2\alpha^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \alpha^2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 2\alpha^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \alpha & \alpha^2 & \alpha & \alpha^2 & \dots & \alpha & \alpha^2 & 2\alpha^2 & 2\alpha^2 & \dots & 2\alpha^2 \end{bmatrix}$$

и ее невырожденность следует из того, что $\alpha \neq \beta \neq 0$, так как

$$\det |\mathbf{A}^{sq}| = 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \alpha^{n^2} \beta^n (\alpha - \beta)^n \neq 0.$$

Теорема 1 полностью доказана.

Кубичный случай.

ТЕОРЕМА 2. Система линейных алгебраических уравнений (3.23) является замкнутой и невырожденной.

Доказательство:

Замкнутость системы (3.23) показывается аналогично теореме 1. В силу симметрии ядер $K_2(s_1, s_2)$ и $K_3(s_1, s_2, s_3)$ имеем $n + \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ неизвестных в (3.23). Подсчитаем количество уравнений. При $j = 1, k = 0, i = \overline{1, n}$ и $j = 0, k = 1, i = \overline{1, n}$ имеем $2n$ уравнений, далее при $j = 2, k = 0, i = \overline{2, n}$, $j = 1, k = 1, i = \overline{2, n}$ и $j = 0, k = 2, i = \overline{2, n}$ — $3(n - 1)$ уравнений и т.д. В конце концов при различных $j + k = n$ и $i = n$ получим ровно $(n + 1)$ уравнение. В итоге суммарное количество уравнений равно $2n + 3(n - 1) + 4(n - 2) + \dots + (n + 1) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$. Как и в квадратичном случае, для замкнутости системы не хватает еще n уравнений, которые можно набрать с помощью сигнала (3.11). Итак, мы показали, что система (3.23) является замкнутой.

Покажем невырожденность.

Так как ядра K_2 и K_3 есть симметричные функции всех своих аргументов, то операторы V_μ , V_ν и V_λ в (3.31)-(3.34) перестановочны. Для раскрытия

$$(\mathbf{V}_{i,j} - \mathbf{V}_{i-j,k})^2 \quad (\text{П.1.28})$$

и

$$(\mathbf{V}_{i,j} - \mathbf{V}_{i-j,k})^3 \quad (\text{П.1.29})$$

в (3.23) воспользуемся полиномиальной формулой (П.1.22) при $N = 2, 3$ и подсчитаем количество различных слагаемых, входящих в (П.1.29) (количество различных слагаемых, входящих в (П.1.28), уже подсчитано ранее). После раскрытия (П.1.29) с использованием (3.31)-(3.34) видно, что количество V_μ^3 , $\mu = \overline{1, n}$, соответствующих $q_{\mu,\mu,\mu}$, равно n , $V_\mu^2 V_\nu$, $1 \leq \nu \neq \mu \leq n$ соответствующих $q_{\mu,\mu,\nu}$, — $\frac{n(n-1)}{2} = C_n^2$ и столько же $V_\mu V_\nu^2$, $1 \leq \nu \neq \mu \leq n$ для $q_{\mu,\nu,\nu}$. Остались только различные комбинации $V_\mu V_\nu V_\lambda$, $1 \leq \mu \neq \nu \neq \lambda \leq n$, соответствующие им $q_{\mu,\nu,\lambda}$, и их ровно $\frac{n(n-1)(n-2)}{2} = C_n^3$. Тогда всего различных слагаемых в (П.1.29) будет $n + C_n^2 + C_n^3 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$.

Следовательно, система (3.23) содержит все необходимые неизвестные.

Упорядочим вектор неизвестных и вектор правой части способом, предложенным в теореме 1:

$$v_{cub} = (m_1, p_{1,1}, q_{1,1,1}, \dots, m_n, p_{n,n}, q_{n,n,n};$$

$$p_{2,1}, q_{2,1,1}, q_{2,2,1}; \dots; p_{n,n-1}, q_{n,n-1,n-1}, q_{n,n,n-1};$$

$$p_{3,1}, q_{3,1,1}, q_{3,3,1}, q_{3,2,1}; \dots; p_{n,1}, q_{n,1,1}, q_{n,n,1}, q_{n,2,1}), \quad (\text{П.1.30})$$

$$b_{cub} = (y_{1,1,0}^\alpha, y_{1,0,1}^\alpha y_{1,1,0}^\beta, \dots, y_{n,1,0}^\alpha, y_{n,0,1}^\alpha, y_{n,1,0}^\beta; \dots, y_{2,2,0}^\alpha, y_{2,0,2}^\alpha, y_{2,1,1}^\alpha; \dots;$$

$$y_{n,n-1,1}^\alpha, y_{n,1,n-1}^\alpha, y_{n,n,0}^\alpha, y_{n,0,n}^\alpha). \quad (\text{П.1.31})$$

При этом матрица \mathbf{A}^{cub} системы

$$\mathbf{A}^{cub} v_{cub} = b_{cub} \quad (\text{П.1.32})$$

имеет блочно-треугольную структуру, причем диагональные 1-й и i -й блоки \mathbf{A}^{cub} таковы:

$$A_1^{cub} = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 \\ -\alpha & \alpha^2 & -\alpha^3 \\ \beta & \beta^2 & \beta^3 \end{bmatrix},$$

$$A_i^{cub} = \begin{bmatrix} 2\alpha^2 & 3\alpha^3 & 3\alpha^3 & 6\alpha^3 & \dots & 6\alpha^3 \\ 2\alpha^2 & -3\alpha^3 & -3\alpha^3 & -6\alpha^3 & \dots & -6\alpha^3 \\ -2\alpha^2 & 3\alpha^3 & -3\alpha^3 & -6\alpha^3 & \dots & -6\alpha^3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -2\alpha^2 & 3\alpha^3 & -3\alpha^3 & 6\alpha^3 & \dots & 6\alpha^3 \end{bmatrix}, \quad i = \overline{2, n}.$$

Так как $\alpha \neq \beta \neq 0$, то $\det |A_1^{cub}| = 2\alpha^3\beta(\beta^2 - \alpha^2) \neq 0$, а $\det |A_i^{cub}| = 2^{i-1}6^i\alpha^{3i+2} \neq 0$ при $i = \overline{2, n}$. Следовательно $\det |\mathbf{A}^{cub}| \neq 0$, и матрица \mathbf{A}^{cub} , соответствующая системе (3.23), является невырожденной.

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3. При сделанных предположениях об исходных данных и достаточно малом $T > 0$ уравнение (3.79) однозначно разрешимо в $C_{[0,T]}$, причем для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $T(\varepsilon)$, что

$$\|x_N^*(t) - x_1^*(t)\|_{C_{[0,T(\varepsilon)]}} \leq \varepsilon, \quad (\text{П.1.33})$$

где $x_N^*(t)$ – непрерывное решение (3.79), а $x_1^*(t)$ – решение линейного уравнения (1.6).

Д о к а з а т е л ь с т в о :

Перепишем (3.79) в форме

$$\int_0^t K_1(t, s)x(s)ds = y(t) - \delta_N(t), t \in [0, T], \quad (\text{П.1.34})$$

$$\delta_N(t) = \sum_{n=2}^N V_n x^n. \quad (\text{П.1.35})$$

Из непрерывной дифференцируемости по t ядер K_n , $n = \overline{2, N}$ и очевидного равенства $\delta_N(0) = 0$ следует, что $\delta_N(t) \in C_{[0, T]}^{\circ(1)}$. Если T достаточно мало, то

$$\|\delta_N(t)\|_{C_{[0, T]}^{\circ(1)}} = O(T). \quad (\text{П.1.36})$$

Трактуя теперь (П.1.34) как возмущенное линейное уравнение (1.6) и в силу корректности (1.6) на паре $(C_{[0, T]}, C_{[0, T]}^{\circ(1)})$ заключаем, что уравнение (П.1.34) также однозначно разрешимо в $C_{[0, T]}$. Наконец, неравенство (П.1.33) следует из того, что

$$x_N^*(0) = x_1^*(0) = \frac{y'(0)}{K_1(0, 0)}. \quad (\text{П.1.37})$$

В справедливости (П.1.37) легко убедиться, перейдя от (3.79) дифференцированием по t к эквивалентному уравнению Вольтерра II рода и положив в нем $t = 0$.

Теорема доказана.

Замечание. Равенство (П.1.37) показывает, что значение непрерывного решения (3.79) в нуле целиком определяется ядром линейного оператора $V_1 x$. Этот факт может быть использован при конструировании методов последовательных приближений – естественно в качестве начального приближения выбирать решение линейного уравнения.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $y(t) \in C_{[0, T]}^{\circ(1)}$. Тогда для того, чтобы уравнение (3.81) имело единственное вещественное решение $x_2^*(t) \in C_{[0, T]}$ при любом $0 < T < \infty$, необходимо и достаточно выполнения неравенства

$$\lambda y(t) \geq -\frac{1}{4} \forall t \in [0, T], 0 < T < \infty. \quad (\text{П.1.38})$$

Доказательство:

Необходимость. Пусть $x_2^*(t) \in C_{[0,T]}$ – решение (3.81), так что

$$\int_0^t x_2^*(s)ds + \lambda \left(\int_0^t x_2^*(s)ds \right)^2 \equiv y(t), \forall t \in [0, T]. \quad (\text{П.1.39})$$

Умножив (П.1.39) на λ , имеем при любом $t \in [0, T]$, $0 < T < \infty$,

$$\lambda y(t) \equiv \lambda \int_0^t x_2^*(s)ds + \left(\lambda \int_0^t x_2^*(s)ds \right)^2 \geq \min_{z \in R} \{z + z^2\} = -\frac{1}{4}. \quad (\text{П.1.40})$$

и неравенство (П.1.38) выполняется.

Достаточность. Пусть выполнено (П.1.38). Обозначим

$$\int_0^t x(s)ds = \theta(t). \quad (\text{П.1.41})$$

Трактуя (3.81) как квадратное уравнение относительно $\theta(t)$, имеем два корня

$$\theta_{1,2}^*(t) = \frac{-1 \mp \sqrt{1 + 4\lambda y(t)}}{2\lambda}, \quad (\text{П.1.42})$$

вещественных при любом $0 < t < \infty$ в силу (П.1.38), причем для корня

$$\theta_2^*(t) = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\lambda y(t)}}{2\lambda} \quad (\text{П.1.43})$$

выполняется условие $\theta_2^*(0) = 0$, так как $y(0) = 0$.

Положим в (П.1.41) $\theta(t) = \theta_2^*(t)$ и, учитывая, что $\theta_2^*(t) \in C_{[0,T]}^{(1)}$, находим, что (П.1.41) как интегральное уравнение Вольтерра I рода имеет единственное непрерывное на $[0, T]$ вещественное решение

$$x_2^*(t) = \frac{d\theta_2^*(t)}{dt} = \frac{y'(t)}{\sqrt{1 + 4\lambda y(t)}}. \quad (\text{П.1.44})$$

ТЕОРЕМА 9. Пусть $M_3 > 0$, $L_3 \geq 0$, тогда для того, чтобы ядро Вольтерра $K_3(t, s_1, s_2, s_3)$ имело вид

$$K_3(t, s_1, s_2, s_3) = \prod_{i=1}^3 \left(\sqrt[3]{M_3} - \frac{L_3}{3M_3^{\frac{2}{3}}}(t - s_i) \right), \quad (\text{П.1.45})$$

при $0 \leq s_1, s_2, s_3 \leq t \leq T, T \leq \frac{3M_3}{L_3}$, необходимо и достаточно, чтобы

$$M_3 = \max_{0 \leq s_1, s_2 \leq t \leq T} |K_3(t, t, s_1, s_2)|, \quad (\text{П.1.46})$$

$$L_3 = \max_{0 \leq s_1, s_2, s_3 \leq t \leq T} |(K_3(t, s_1, s_2, s_3))'_t|. \quad (\text{П.1.47})$$

Д о к а з а т е л ь с т в о .

Достаточность. Пусть

$$K_3(t, s_1, s_2, s_3) = \prod_{i=1}^3 (\mathbf{k} - \mathbf{L}(t - s_i)), \mathbf{k} > 0, \mathbf{L} \leq 0, \quad (\text{П.1.48})$$

тогда

$$K_3(t, s_1, s_2, s_3) |_{s_1=t} = K_3(t, t, s_2, s_3) = \mathbf{k} (\mathbf{k} - \mathbf{L}(t - s_2)) (\mathbf{k} - \mathbf{L}(t - s_3)),$$

В силу (П.1.46) и (П.1.48)

$$\begin{aligned} M_3 &= \mathbf{k} \max_{0 \leq s_2, s_3 \leq t \leq T} |(\mathbf{k} - \mathbf{L}(t - s_2)) (\mathbf{k} - \mathbf{L}(t - s_3))| = \\ &= \mathbf{k} \max_{0 \leq s_2, s_3 \leq t \leq T} |(\mathbf{k} - \mathbf{L}(t - s_2))| \max_{0 \leq s_2, s_3 \leq t \leq T} |(\mathbf{k} - \mathbf{L}(t - s_3))|, \end{aligned} \quad (\text{П.1.49})$$

откуда при $t - s_2 = 0, t - s_3 = 0, T < \frac{2\mathbf{k}}{\mathbf{L}}$ справедливо $M_3 = \mathbf{k}^3$,

$$\mathbf{k} = \sqrt[3]{M_3}. \quad (\text{П.1.50})$$

Дифференцируя (П.1.48) по t , получаем

$$\begin{aligned} (K_3(t, s_1, s_2, s_3))'_t &= -\mathbf{L}(\mathbf{k} - \mathbf{L}(t - s_2))(\mathbf{k} - \mathbf{L}(t - s_3)) - \\ &-\mathbf{L}(\mathbf{k} - \mathbf{L}(t - s_1))(\mathbf{k} - \mathbf{L}(t - s_3)) - \mathbf{L}(\mathbf{k} - \mathbf{L}(t - s_1))(\mathbf{k} - \mathbf{L}(t - s_2)), \end{aligned} \quad (\text{П.1.51})$$

а в силу (П.1.47) с учетом (П.1.51), где $\mathbf{L} \geq 0$, имеем

$$\begin{aligned} L_3 &= \mathbf{L} \max_{0 \leq s_1, s_2, s_3 \leq t \leq T} |(\mathbf{k} - \mathbf{L}(t - s_2))(\mathbf{k} - \mathbf{L}(t - s_3)) + \\ &+ (\mathbf{k} - \mathbf{L}(t - s_1))(\mathbf{k} - \mathbf{L}(t - s_3)) + (\mathbf{k} - \mathbf{L}(t - s_1))(\mathbf{k} - \mathbf{L}(t - s_2))|. \end{aligned} \quad (\text{П.1.52})$$

Так как функция, входящая под знак максимума в (П.1.52), есть парабола ветвями вверх, то она достигает своего наибольшего значения на концах отрезка, которое при $T < \frac{2\mathbf{k}}{\mathbf{L}}$ и $t - s_i = 0$ равно $3\mathbf{k}^2\mathbf{L}$. Из (П.1.52) следует $L_3 = 3\mathbf{k}^2\mathbf{L}$, т.е.

$$\mathbf{L} = \frac{L_3}{3M_3^{\frac{2}{3}}}.$$

Следовательно,

$$\frac{2\mathbf{k}}{\mathbf{L}} = \frac{6M_3}{L_3}.$$

Таким образом, при $T < \frac{6M_3}{L_3}$ ядро $K_3(t, s_1, s_2, s_3)$ имеет вид (П.1.45).

Необходимость. Пусть справедливо (П.1.45), тогда выполнение (П.1.46) с учетом (П.1.49) очевидно. При этом (П.1.47) также выполняется, так как

$$\begin{aligned} & \max_{0 \leq s_1, s_2, s_3 \leq t \leq T \leq \frac{6M_3}{L_3}} \left| 27M_3^2 - 18L_3M_3t + 6L_3M_3(s_1 + s_2 + s_3) + \right. \\ & \left. + L_3^2(3t^2 - 2t(s_1 + s_2 + s_3) + s_1s_2 + s_1s_3 + s_2s_3) \right| = 27M_3^2. \end{aligned}$$

Приложение Г. Апробация результатов исследования и другие документы

Свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ

Здесь приведены документы о регистрации программ для ЭВМ, реализованные в пакете прикладных программ MATLAB 2013b и на языке Pascal в программной среде Borland C++ Builder.



Рисунок П.1.3 – Свидетельство о регистрации программного средства для моделирования нелинейных динамических систем с помощью кубических полиномов Вольтерра (скалярный случай)

Автором диссертации на языке Pascal написан модуль для идентификации квадратичной и кубической моделей с помощью метода ИП.



Рисунок П.1.4 – Свидетельство о регистрации ПК для моделирования нелинейных динамических систем полиномами Вольтерра

