

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «ИРКУТСКИЙ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи



Та Чунг Тхань

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ
ТРЕХМЕРНЫХ ЗАДАЧ РАЗМЕЩЕНИЯ НА ОСНОВЕ
ОПТИКО-ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ПОДХОДА**

Специальность 05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы
и комплексы программ

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание учёной степени кандидата технических наук

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук, профессор

Казаков Александр Леонидович

Иркутск – 2020

Введение	4
Глава 1 Обзор применения математических моделей и численных методов для решения трехмерных задач размещения	15
1.1 Обзор исследований трехмерных задач размещения	15
1.2 Задачи оптимальных трехмерных упаковок шаров и методы их решения ...	25
1.3 Численные методы решения задач размещения трехмерных объектов	29
1.4 Оптико-геометрический подход и бильярдный подход.....	34
Выводы по главе 1	39
Глава 2 Математические модели размещения трехмерных физических объектов и алгоритмы их исследования	40
2.1 Математическая формализация задачи размещения трехмерных физических объектов	40
2.2 Вычислительные алгоритмы решения задач размещения шаров	47
2.2.1 Базовые алгоритмы	47
2.2.2 Упаковка равных шаров в выпуклое множество	55
2.2.3 Упаковка равных шаров в невыпуклое множество	56
2.2.4 Покрытие множества равными шарами	57
2.2.5 Упаковка шаров двух типов.....	58
2.2.6 Упаковка шаров разных радиусов.....	61
Выводы по главе 2	63
Глава 3 Описание программного комплекса «ТУШОЛ».....	64
3.1 Описание программного комплекса	64
3.1.1 Общая характеристика	64
3.1.2 Модуль «Среда».....	66
3.1.3 Модуль «Волна».....	67
3.1.4 Модуль «Упаковка».....	68
3.1.5 Модуль «Настройки».....	70

3.2 Решение тестовых задач	73
3.2.1. Упаковка равных шаров в выпуклое множество	73
3.2.2. Упаковка равных шаров в невыпуклое множество	80
3.2.3. Покрытие множества равными шарами	83
3.2.4. Упаковка шаров двух типов.....	85
3.2.5. Упаковка шаров разного радиуса.....	89
Выводы по главе 3	93
Глава 4 Решение прикладных задач.....	94
4.1 Размещение датчиков движения при проектировании «умных» помещений в технологии Smart Grid	94
4.2 Размещение беспроводных устройств в крупном здании.....	99
4.3 Задачи размещения устройств точечной физической защиты	105
Выводы по главе 4	110
Заключение	111
Список литературы	112
Приложение А Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ.....	132
Приложение Б Акт о внедрении программного продукта	133

Актуальность исследования. В современных технических системах важное место занимают задачи компоновки и размещения трехмерных объектов с известными свойствами. Помимо непосредственно задачи упаковки товаров в контейнеры, такие постановки возникают в медицине при планировании автоматизированного радиохирургического лечения, в материаловедении при изучении и моделировании структуры молекул вещества, в логистике при проектировании сети обслуживающих центров.

В современной энергетике в последние годы большую популярность получила концепция Smart Grid, под которой понимаются модернизированные сети электроснабжения, которые используют информационные и коммуникационные сети и технологии для сбора информации об энергопроизводстве и энергопотреблении, позволяющей автоматически повышать эффективность, надёжность, экономическую выгоду, а также устойчивость производства и распределения электроэнергии [110]. В США, Европейском Союзе (Smart Grid European Technology Platform [93]) данная концепция развивается уже около 15 лет.

В России соответствующие исследования начались несколько позже, однако к настоящему времени отставание во многом удалось преодолеть [11]. Так, предложен не имеющий мировых аналогов подход к построению ИТ-инфраструктуры для создания интеллектуальных систем управления развитием и функционированием систем энергетики, основанный на применении результатов системных исследований энергетики с использованием современных концепций – цифровых двойников и цифровых образов [10]. Иркутская электросетевая компания стала одним из пионеров внедрения технологии Smart Grid, в результате чего интенсивность энергопотребления в Иркутской области снизилась с 2012 г. более чем на 27% [42].

Отметим, что в рамках концепции Smart Grid конечный потребитель энергии рассматривается в качестве партнёра субъектов энергетики, т.е. является действующим лицом, а не пассивным участником процесса. Иными словами, он становится "активным потребителем" [1], который, исходя из потребностей, оптимизирует график загрузки своих энергопотребляющих и энергогенерирующих установок с целью минимизации количества потребляемой энергии и (или) затрат на нее.

Одним из условий успешной практической реализации концепции Smart Grid является получение в режиме реального времени объективных и достоверных данных о состоянии, для чего необходимо развитие систем мониторинга. Как отмечается в работе [9], концепция интеллектуальной энергетической системы основывается на интеграции нескольких инновационных направлений, включая методы диагностики и мониторинга состояния энергетических объектов и систем и управления их режимами на базе современных подходов теории управления, к числу которых традиционно относятся методы оптимизации [55].

Сказанное относится как к крупным энергетическим объектами и системам, так и к отдельным зданиям. Общеизвестно [1, 43], что при достижении наружным воздухом расчетной для систем отопления температуры происходит увеличение количества жалоб со стороны населения на низкую температуру внутреннего воздуха в жилых помещениях. С другой стороны, в осенний и весенний периоды температура внутреннего воздуха зачастую превышает максимальную из диапазона допустимых значений, т.е. +24 °С. В этой связи, проблема мониторинга температурного режима в жилых и офисных помещениях является в настоящее время, как никогда, актуальной. Кроме того, целесообразно регулировать режим работы тепловых и электрических (осветительных, кондиционеров, вентиляторов и т.п.) приборов в зависимости от нахождения там людей: при их отсутствии оборудование (все или часть) целесообразно переводить в спящий режим. Последняя проблема весьма актуальна для Вьетнама, который, с одной стороны,

отличается жарким и влажным климатом, а с другой – испытывает постоянный дефицит генерирующих мощностей.

Кроме того, концепция Smart Grid подразумевает охват всех энергопроизводителей, как центральных (АЭС, ТЭЦ, ГЭС), так и малой энергетики (автономные ДГУ, солнечные, ветровые станции). При определении расположения и компоновки последних возникает задача об оптимальном размещении на плоскости [85,92,141,150]. Еще одна актуальная задача размещения возникает при строительстве зарядных станций для электромобилей в крупных транспортных сетях, когда критерием оптимальности является минимизация общей стоимости, либо общих потерь в распределительной сети [98,154,158].

Кроме того, трехмерные задачи размещения возникают при построении систем мониторинга различного назначения, когда требуется расположить устройства, чей радиус действия может существенным образом зависеть от свойств окружающей среды, в которой они находятся. Особенно ярко это проявляется в устройствах, работающих по типу сонара (гидролокатора), когда время передачи сигнала используется для оценки расстояния. Таким образом, для исследования данных классов задач появляется необходимость применять специальные неевклидовы метрики, описывающие изменение исследуемой среды. Отметим, что в представленных системах сигнал, как правило, может распространяться в любую сторону, т.е. диапазон наблюдения обычно имеет сферическую форму. Тогда задачи размещения датчиков наблюдения приводятся к задачам о нахождении наиболее плотных упаковок шаров и наиболее экономных покрытий шарами.

При исследовании проблем размещения трехмерных объектов наиболее часто используются следующие подходы: генетические методы (Д.Б. Заруба [17], В.В. Курейчик [30], О.П. Тимофеева [57], Ж. Хемминки [119]), эвристические подходы (Х. Акеб [64], Дж.А. Джордж [105], Е.Е. Бишоф [72], Х. Геринг [102], Д. Писингер [155]), метод поиска с запретами (А. Бортфельдт [75], Ц. Лю [134], Д. Мак [139]), метод поиска по окрестности (Р. М'Халла [143], Ф. Паррено [151]).

Кроме того, многие исследователи постарались применить гибридные методы (Т. Дерели [90]) и также жадные методы (В. Хуан [124], Т. Кубач [130], Дж.Л. Кастро Сильва [162]).

Отметим, что большинство известных алгоритмов решения задач размещения объектов работает только с евклидовым расстоянием и выпуклым множеством-контейнером. В случае же невыпуклого и, особенно, неодносвязного множества сложности математической формализации и вычислительной трудности получающихся задач существенно возрастают.

Для исследования представленной задачи в неевклидовом пространстве и с невыпуклым множеством-контейнером в данной диссертационной работе предлагается использовать оптико-геометрический подход и метод бильярдного моделирования.

Объект и предмет исследования. Объектом диссертационного исследования являются системы мониторинга и обеспечения безопасности, в которых требуется определить оптимальное местоположение устройств наблюдения и защиты в трехмерном пространстве. Предметом исследования являются математические модели размещения физических объектов в системах мониторинга, необходимых при реализации концепции Smart Grid, и обеспечения безопасности, имеющие вид задач непрерывной оптимизации, и численные методы их решения.

Цель и задачи исследования. Целью диссертационной работы является разработка технологии размещения физических объектов с предопределенными свойствами в трехмерном пространстве на основе покрытия и упаковки шаров в ограниченное множество. Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

1. Выполнить формализацию трехмерных задач размещения в пространстве с неевклидовыми метриками в форме: а) математических задач о покрытиях и упаковках равных шаров; б) математических задач об упаковках шаров разного радиуса.

2. Разработать вычислительные алгоритмы решения поставленных в п. 1 задач в пространстве с неевклидовым расстоянием на основе оптико-геометрического подхода и метода бильярдного моделирования.

3. Разработать программный комплекс, реализующий предложенные численные алгоритмы, и провести вычислительные эксперименты для проверки работоспособности алгоритма и корректности вычислений.

4. Идентифицировать модели для конкретных прикладных задач из области энергетики и безопасности, и провести их исследования при использовании созданного программного комплекса.

Методы исследования. При выполнении диссертационного исследования применяются следующие методы: математического моделирования, оптимизации, вычислительной геометрии, геометрической оптики. Для реализации программной системы используются среда разработки Visual Studio 2012 (язык программирования C#) с дополнительной библиотекой HelixToolkit и пакет MATLAB для 3-D визуализации результатов расчетов.

Научная новизна. Научная новизна исследования состоит в следующем:

1. Построены математические модели трехмерного размещения физических объектов на основе: а) задач о покрытиях и упаковках равных шаров; б) задач об упаковках шаров разного радиуса в пространстве со специальной неевклидовой метрикой. Для рассматриваемых задач модели с такой метрикой предложены впервые.

2. Разработаны новые численные методы разбиения трехмерного пространства на зоны Дирихле на основе оптико-геометрического подхода при разных скоростях распространения световой волны. Ранее представленные методы использовались только в двумерном пространстве.

3. Разработаны новые численные алгоритмы решения задач о покрытиях и упаковках шаров на основе оптико-геометрического подхода и метода бильярдного моделирования. В отличие от известных методов, разработанные алгоритмы работают не только с выпуклыми множествами, но и с невыпуклыми и неодносвязными множествами в пространстве с неевклидовой метрикой.

4. Создан новый программный комплекс «ТУШОЛ», реализующий предложенные численные алгоритмы и позволяющий решать различные прикладные задачи, в частности, из области энергетики (при проектировании систем мониторинга в рамках реализации концепции Smart Grid), а также безопасности (при создании систем мониторинга и точечной физической защиты).

Достоверность и обоснованность. Достоверность и обоснованность вычислительных результатов обеспечиваются применением фундаментальных физических принципов и корректностью выбора условий для построения математических моделей и численных методов решения, согласованностью экспериментальных и теоретических данных.

Теоретическая значимость состоит в следующем:

1. Формализация задач размещения объектов в виде задач о покрытии и упаковке вносит вклад в развитие теории математического моделирования.
2. Предложенный метод разбиения трехмерных объектов на множество плоских геометрических фигур вносит вклад в развитие теории аппроксимации.
3. Разработанные вычисленные алгоритмы на основе оптико-геометрического подхода и метода бильярдного моделирования вносят вклад в развитие методов решения трехмерных задач размещения.
4. Построенные модели и результаты решения прикладных задач вносят вклад в развитие концепции Smart Grid.

Практическая значимость состоит в следующем:

1. Разработанный программный комплекс «ТУШОЛ» позволяет строить решения задач размещения трехмерных физических объектов в ограниченное множество, возникающих в проектировании систем мониторинга в "умных зданиях" при реализации концепции Smart Grid. Предложенные численные алгоритмы могут быть использованы для решения других прикладных задач, таких как оптимальная загрузка контейнера, обеспечение безопасности охраняемого объекта.
2. Результаты диссертационного исследования могут использоваться в процессе изучения магистрантами и аспирантами разделов «Математическое

моделирование», «Оптимизация», «Системный анализ». Применяется при изучении студентами дисциплины «Системология», получен акт о внедрении результатов диссертационной работы в учебный процесс ФГБОУ ВО ИРНИТУ.

Апробация результатов исследования. Работа выполнялась на кафедре «Автоматизированных систем» ФГБОУ ВО ИРНИТУ. Основные результаты диссертационного исследования докладывались и обсуждались на следующих научных конференциях:

17th IFAC Workshop on control applications of optimization CAO 2018 (г. Екатеринбург. 2018);

Всероссийская молодёжная научно-практическая конференция «Винеровские чтения» (ИРНИТУ, г. Иркутск. 2018, 2019);

Проблемы информационного и математического моделирования сложных систем (ПИМС) (ИрГУПС, г. Иркутск. 2017, 2018);

International workshop «Critical infrastructures: Contingency management, Intelligent, Agent-based, Cloud computing and Cyber security» (IWCI – 2019, 2021) (г. Байкальск, 2019, 2021);

III Международный семинар «Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона – Якоби» (г. Екатеринбург, 2020);

The Second International Conference on Unconventional Modeling, Simulation & Optimization [UMSO2019] & The Fifteenth International Symposium on Management Engineering [ISME2019] (г. Ханой, Вьетнам, 2019);

Результаты диссертационного исследования неоднократно докладывались на научных семинарах кафедры «автоматизированных систем» ФГБОУ ВО ИРНИТУ.

Результаты диссертационного исследования опубликованы в 7 научных работах, из них 1 статья в изданиях, индексируемых в базе данных WoS, 1 статья в изданиях, индексируемых в базе данных Scopus и 2 статьи в изданиях, которые входят в Перечень ВАК по специальности 05.13.18. Получено 1 свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ.

Основные результаты исследования опубликованы в следующих работах.

Издания, индексируемые в базе данных WoS:

1. Та Т.Т. The sphere packing problem into bounded containers in three-dimension non-Euclidean space / A.L. Kazakov, A.A. Lempert, T.T. Ta // IFAC-PapersOnLine. – 2018. – Vol. 51, No. 32. – P. 782–787.

Издания, индексируемые в базе данных Scopus:

2. Та Т.Т. On the Algorithm for Equal Balls Packing into a Multi-connected Set / A.L. Kazakov, A.A. Lempert, T.T. Ta // Advances in Intelligent Systems Research. – 2019. – Vol. 169. – P. 216–222. DOI: 10.2991/iwci-19.2019.38.

Издания, входящие в Перечень ВАК РФ:

3. Та Ч.Т. Вычислительный алгоритм для решения задачи упаковки шаров двух различных типов в трехмерное множество с неевклидовой метрикой / А.Л. Казаков, А.А. Лемперт, Ч.Т. Та // Вычислительные методы и программирование. – 2020. – Т. 21. – С. 152–163.

4. Та Ч.Т. О задачах упаковок неравных шаров в трехмерном пространстве / А.Л. Казаков, А.А. Лемперт, Ч.Т. Та // Управление большими системами. – 2020. – Вып. 87. – С. 47–66.

Свидетельства о государственной регистрации программы для ЭВМ:

5. Та Ч.Т. «ТУШОЛ»: Трехмерные Упаковки Шаров, Оптимизация, Логистика / А.Л. Казаков, А.А. Лемперт, Ч.Т. Та // Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ. № 202061112 от 27 января 2020 г. Москва: Федеральная служба по интеллектуальной собственности. – 2020.

Прочие издания:

6. Та Ч.Т. Алгоритм построения оптимального покрытия множеств в трехмерном пространстве на основе оптико-геометрического подхода / Та Ч.Т. // Труды международной конференции «Global science. Development and novelty». – 2017. – С. 77–79.

7. Та Т.Т. The sphere packing problem into bounded containers in three-dimension non-Euclidean space / A.L. Kazakov, A.A. Lempert, T.T. Ta // Материалы международной конференции «17th IFAC Workshop on Control Applications of Optimization (CAO 2018)». Екатеринбург: ИММ УрО РАН. – 2018. – С. 37.

Тематика работы соответствует следующим пунктам паспорта специальности 05.13.18:

- пункт 1. «Разработка новых математических методов моделирования объектов и явлений» – в части формализации задач размещения трехмерных физических объектов в виде задач о покрытии и упаковке шаров в ограниченное трехмерное множество со специальными неевклидовыми метриками;

- пункт 4. «Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента» – в части разработки и реализации в виде комплекса программ «ТУШОЛ численных алгоритмов для решения задач о покрытии и упаковке шаров в трехмерное множество»;

- пункт 5 «Комплексные исследования научных и технических проблем с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента» – в части решения модельных и прикладных задач из области информационных технологий и безопасности.

Личный вклад. Все выносимые на защиту результаты исследования, включая разработанные численные методы, получены лично автором. Построение математических моделей выполнено совместно с д.ф.-м.н. А.Л. Казаковым и к.ф.-м.н. А.А. Лемперт. Программный комплекс «ТУШОЛ» создан в неделимом соавторстве с д.ф.-м.н. А.Л. Казаковым и к.ф.-м.н. А.А. Лемперт, при этом проектирование архитектуры и программная реализация выполнены автором диссертации, также лично автором выполнено решение прикладных задач из области энергетики и безопасности.

Структура и объем работы. Научно-квалификационная работа состоит из введения, четырёх глав, заключения и списка литературы из 178 наименований. Объем данной работы составляет 133 страниц текста, иллюстрированного 43 рисунками и 16 таблицами.

Кратко изложим содержание основных разделов диссертационной работы:

В главе 1 представлен обзор литературы о математических моделях, численных методах и их применении для решения задач размещения трехмерных

геометрических объектов в ограниченном множестве. Анализ известных численных методов исследования данной предметной области позволяет установить, что задачи трехмерного размещения относятся к классу NP-полных, для решения которых в большинстве случаев применяются эвристические и генетические методы. В последние годы при рассмотрении проблемы размещения логистических центров А.Л. Казаков предложил новый метод, который позволяет найти решение задач покрытия и упаковки кругов в пространстве не только с евклидовой, но и с неевклидовой метрикой. В заключительном разделе главы 1 приведено описание оптико-геометрического подхода и метода бильярдного моделирования, обсуждена возможность их применение для решения задач размещения в трехмерном пространстве.

В главе 2 представлено описание задачи размещения трехмерных геометрических объектов, разработаны их математические модели в виде задач об оптимальных покрытиях и упаковках шаров одинаковых и разных типов в ограниченное множество при евклидовой и неевклидовой метрике. Для решения предложенных задач разработаны новые численные алгоритмы на основе оптико-геометрического подхода и метода бильярдного моделирования, позволяющие решить задачи не только в случае выпуклого контейнера, но и при невыпуклом и неодносвязном контейнере.

В главе 3 представлено описание программного комплекса «ТУШОЛ», который реализует все алгоритмы, предложенные во второй главе. Для реализации программного комплекса автор использовал язык программирования высокого уровня C# и среду Visual Studio 2012. Программный комплекс содержит четыре главных модуля и вспомогательные дополнительные функции для вычисления проницаемости среды, ввода данных и вывода результатов, визуализации результатов и изменения параметров. В данной главе представлены результаты вычислительных экспериментов, позволяющих оценить работоспособности предложенных алгоритмов в пространстве с евклидовой и неевклидовой метрикой и их погрешности при сравнении с известными результатами.

В главе 4 представлены результаты применения программного комплекса «ТУШОЛ» для решения следующих прикладных задач: размещение датчиков движения при проектировании «умных» помещений в технологии Smart Grid, построение системы беспроводной сети в крупном здании с максимальной зоной покрытия помещения; построение системы размещения подводных объёмных средств физической защиты от внешних воздействий с максимальной зоной покрытия.

В заключении представлены основные результаты, полученные в процессе выполнения данной диссертационной работы.

Глава 1 Обзор применения математических моделей и численных методов для решения трехмерных задач размещения

1.1 Обзор исследований трехмерных задач размещения

В последние годы задачи геометрического проектирования широко используются для повышения эффективности работы промышленного производства и экономии ресурсов. К ним относятся задачи оптимального размещения геометрических объектов, появляющиеся при загрузке различных транспортных средств (самолетов, кораблей, железнодорожных вагонов, автотранспорта и т.п.) [30], при хранении продуктов на складе, при решении задачи размещения центров управления, хранения, обработки данных [49], при размещение электронных компонентов на печатной плате [120,127,161], а также при исследованиях в различных отраслях науки: материаловедении, нанотехнологиях, молекулярной геометрии, современной биологии [168].

Суть основной задачи размещения состоит в расположении заданных объектов в ограниченном множестве таким образом, чтобы максимизировать его заполнение. Допустимым положением объектов считается такое, когда все упакованные объекты находятся внутри заданного множества и не пересекают друг друга. Поскольку задача достаточно сложная и принадлежит к классу NP-трудных, в большинство известных работ она сводится к решению задачи в низкоразмерном пространстве или к размещению простых геометрических фигур (параллелепипедов, цилиндров, сфер и т. д.) [30].

Хотя решения задач размещения объектов в трехмерном пространстве имеют высокую промышленную и экономическую важность, количество публикаций на эту тему заметно меньше, в сравнении с количеством публикаций по одномерной или двумерной задаче. Однако в последние годы замечен быстрый рост в исследованиях трехмерной проблемы, включая новые направления поиска приближенных решений [61]. К наиболее известным задачам размещения

геометрических объектов в трехмерном пространстве относятся задача о размещении блоков в контейнере-параллелепипеде (рисунок 1.1), задача об размещении шаров.

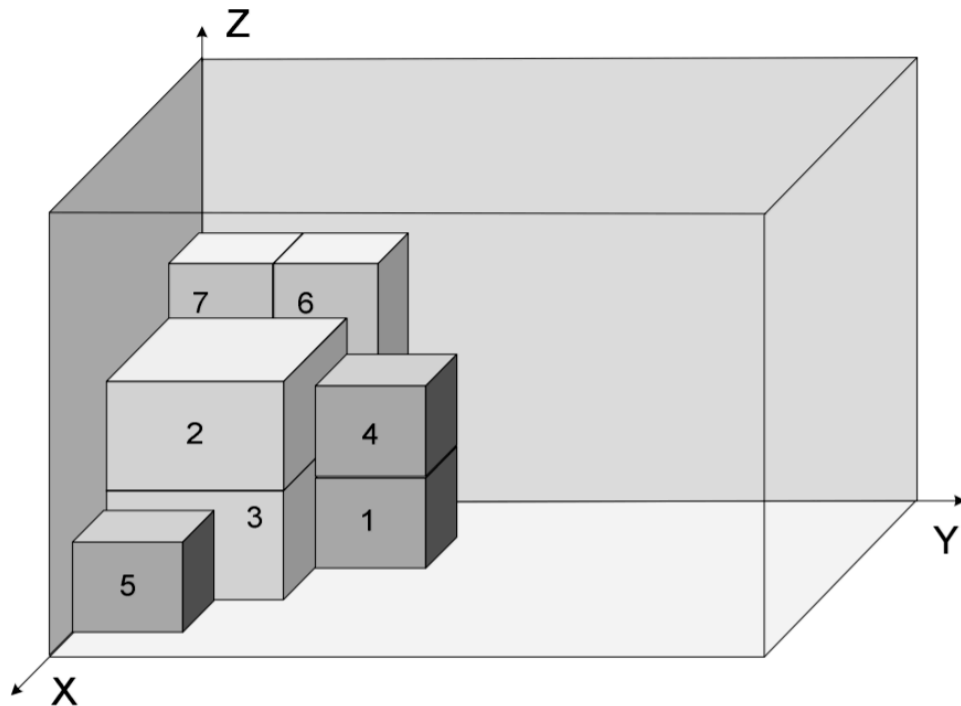


Рисунок 1.1 – Размещение блоков в трехмерном ограниченном пространстве

В случае трехмерного пространства многие исследователи обратили внимание на задачу размещения ящиков различных размеров в контейнере, причём все ящики и контейнер имеют форму параллелепипеда. В литературе можно найти различные направления исследования таких задач (линейное, целочисленное и частично-целочисленное программирование, эвристические и биоинспирированные модели, теория глобальной оптимизации и др.), и множество алгоритмов поиска локально-оптимальных и приближенно-оптимальных решений. Так, различные виды генетического алгоритма можно найти в работах [17,30,31,57,58], гибриднему подходу поиска с запретами (табу-поиск) посвящены статьи [75,77,134,139], поиск по дереву применялся в [94,159], гибридный «пчелиный алгоритм» – в [90], алгоритм поиска по переменной окрестности предложен в [151], алгоритм поиска по лучу – в работе [68], жадный алгоритм – в [162].

В работе [76] представлен гибридный генетический алгоритм для задачи загрузки в контейнер ящиков различных размеров. Результаты расчетов показывают хорошую работоспособность алгоритма, причём среднее отклонение не больше 0,26% при сравнении с известными результатами.

Л.А. Гладков и соавторы рассматривают задачу размещения блоков в ограниченном трехмерном пространстве [15]. При этом блоки имеют различные габариты, а пространство контейнера ограничено параллелепипедом. Для решения авторы использовали последовательно эволюционный и генетический алгоритмы, которые в результате дают приемлемое решение для небольшого количества элементов.

В работе [79] рассмотрена задача размещения блоков в контейнер-параллелепипед минимальной длины. Для решения проблемы авторы предложили эвристический алгоритм, состоящий из двух этапов. Первый этап ориентирован на поиск решения для контейнера практически бесконечной длины. Второй решает последовательность задач загрузки контейнера с постепенным уменьшением его длины. Авторы представили результаты тестирования при числе блоков до 100 и показали, что алгоритм имеет высокую эффективность при сравнении с другими методами.

На основе эвристик В.В. Псиола в работе [51] предложил алгоритм, предназначенный для расчета оптимального размещения грузов в транспортные средства. Результаты вычислений показывают, что плотность заполнения в среднем 80–90% от объема грузового отсека, а время работы алгоритма составляет несколько минут для количества ящиков до 100. Алгоритм был реализован в виде программного комплекса «Packer3d» на языке программирования C++ [52].

В работе [117] для решения задачи загрузки блоков в контейнер предложен эвристический подход, позволяющий найти приемлемые решения за небольшое время. Авторы показывают, что с помощью данного алгоритма получаются результаты со средней загрузкой объема на 0,62% выше текущего наилучшего результата. При увеличении времени вычисления новый подход может решить

проблему со средним заполнением объема на 1,12% выше, чем текущий лучший результат.

Чж. Ц. Ван и соавторы в работе [175] представили эвристический алгоритм, основанный на модели третичного дерева, для решения проблемы загрузки контейнера неоднородными блоками. Алгоритм был реализован на языке программирования Object Pascal в среде Delphi 6.0 и OpenGL. Полученный программный комплекс позволяет представить результаты в виде трехмерной визуализации и вращать загруженный контейнер для просмотра полученных результатов под разными углами.

В работе [178] представлен новый подход с использованием итеративного дублирования по принципу жадного поиска по дереву для задачи расположения блоков в трехмерном контейнере. Для реализации авторы использовали язык программирования Java и пакет 64-бит Java Development Kit 1.6.0. Сравнив свои результаты с известными, авторы сделали вывод, что предложенный в статье подход является наилучшим для стандартных тестовых данных.

В работе [118] представлен эвристический алгоритм под названием «Fit Degree Algorithm», который расширяет метод «Caving Degree Approach» из [125], для решения задачи размещения блоков в контейнере. Алгоритм был реализован на языке программирования JAVA и было проведено сравнение полученных результатов с известными.

В работах [69,70] Н. Бансал и соавторы расширили возможности известного алгоритма упаковки в двумерном пространстве [83,88] и предложили гармонический алгоритм для нахождения контейнера минимальной высоты.

В работе [91] представлен эвристический алгоритм на основе пары последовательностей (sequence-pair) [147] с использованием полунормализованной упаковки Писингера [156] для задачи двумерной упаковки. Понятие «пара последовательностей» возникает при рассмотрении задачи об упаковке прямоугольников в прямоугольник. Каждая компактная упаковка может быть представлена двумя перестановками чисел $\{1, 2, 3, \dots, n\}$, где каждое число соответствует одному прямоугольнику. Пара перестановок называется «парой

последовательностей». Представленный в [91] алгоритм объединяет метод локального поиска по окрестности с имитацией отжига и позволяет решить задачу упаковки и в двумерном и в трехмерном пространствах.

Е.В. Нужнов и А.В. Барлит использовали эвристический алгоритм для нахождения оптимального варианта размещения трехмерных элементов в прямоугольном контейнере [45]. Принцип работы алгоритма заключается в том, что для размещения следующего элемента, подсчитывается число возможных вариантов размещения каждого элемента среди всех неразмещенных элементов, и выбирается элемент, для которого это число является минимальным. Алгоритм реализован в виде программного комплекса в программной среде Borland C++ Builder с использованием библиотеки Open GL для визуализации результатов.

В.В. Курейчик и соавторы представили в [32] для решения задачи трехмерной упаковки новый гибридный подход. Он состоит из двух этапов: на первом этапе используется генетический алгоритм для первоначальной эффективной перестановки блоков, на втором этапе реализуется эволюционный алгоритм для улучшения предыдущих результатов. Авторы реализовали алгоритм с использованием пакетов Visual C++ и Borland C++ Builder, в результате применения данного подхода полученное качество упаковки в среднем на 2,17% превосходит результаты упаковки, полученные при использовании других известных алгоритмов.

В некоторых работах были рассмотрены задачи расположения блоков в одном или нескольких контейнерах таким образом, чтобы максимально эффективно использовать пространство контейнеров. В работе [172] представлен подход двумерной эвристической декомпозиции для задачи множественной загрузки контейнеров. Идея алгоритма состоит в том, что различные стеки рассматриваются как двумерные элементы, тогда задача разделяется на две подзадачи: упаковывать элементы в стеки и упаковывать стеки в контейнеры. Полученные две подзадачи потом решаются различными алгоритмами.

В работе [135] была рассмотрена задача расположения элементов в минимальном количестве идентичных контейнеров. Авторы использовали

эвристический алгоритм, основан на основе метода табу-поиска для оценки окрестности. По предложенному методу прямоугольные элементы расположены в контейнерах по слоям, пол каждого последующего слоя определяется высотой самого высокого элемента, расположенного в нижнем слое. Чтобы эффективно расположить элементы по слоям, авторы предложили алгоритм под названием «Высота первая, Площадь вторая» (Height first – Area second). Алгоритмы были реализованы на языке программирования FORTRAN 77.

В работе [160] предлагается новый подход к решению задачи расположения ящиков в нескольких контейнерах, который основан на рассмотрении приоритета. Ящики отсортированы по размерам и большему ящику присваивается более высокий приоритет по сравнению с другими ящиками. Тогда они в первоочередном порядке загружаются в контейнеры. Затем добавляются мелкие ящики, и контейнеры перезагружаются.

В работе [40] М.В. Луцан и Е.В. Нужнов рассматривали задачу трехмерной упаковки, которая состоит из расположения блоков на паллетах, и размещения паллет в контейнерах. Цель оптимизации заключается в снижении числа паллет, используемых для размещения всех блоков, и, следовательно, снижении транспортных затрат. Авторы создали программную реализацию алгоритма в виде программного комплекса, который позволяет выполнять решение в двух случаях: с использованием паллет и без их использования.

В работе [128] предложен метод для решения задачи расположения элементов в нескольких контейнерах, причем сначала элементы объединены в «строки», а затем «строки» объединены в «стопки». Наконец, все «стопки» располагаются в контейнерах по этажам. Метод является жадным алгоритмом, который сначала создает хорошие «строки» и высококачественные «стопки», а затем располагает «стопки» в контейнерах как задачи упаковки контейнеров в двумерном пространстве.

Задача размещения ящиков в нескольких контейнерах также рассматриваются в многих других работах, например, [83,86,171] было выполнено

тестирование с реальными промышленными данными и получены хорошие результаты.

В последние годы важным направлением развития исследуемой проблемы является разработка методов решения задачи нерегулярного размещения, т.е. поиск оптимального расположения объектов произвольной формы. В работах [6,62,164] авторы представили решения задачи размещения объектов сложной формы в параллелепипед минимальной высоты различными методами. Ю.Г. Стоян [164] рассматривает проблему упаковки произвольных выпуклых многогранников. Автор предполагает, что все многогранники заранее ориентированы, т.е. повороты объектов не допускаются. Для поиска локальных минимумов задачи им предложен точный метод, являющийся специальной модификацией метода двойственного симплекса (dual-simplex).

В двух других работах [6,62] авторы модифицировали условия, при которых упаковываемые объекты имеют возможность поворачиваться. Р.Р. Ягудин [62,63] использовал метод покоординатного спуска (метод Гаусса-Зейделя), который разделяет процесс решения на две части: внутреннюю и внешнюю. Внутренняя часть осуществляет моделирование плотного движения объектов внутри ограниченного множества, т.е. позволяет перемещать объекты с обеспечением условий взаимного непересечения. Для этого автор предложил подход, базирующийся на понятии годографа вектор-функции плотного размещения, определяющего множество положений подвижного объекта относительно зафиксированных, при котором подвижный объект соприкасается с областью размещения и/или с зафиксированными [56]. Внешняя или комбинаторная часть решает проблему формирования и изменения последовательности упаковываемых объектов.

Ю.Г. Стоян и соавторы в работах [87,168] использовали концепции квази-фи-функций для решения задачи размещения произвольных многогранников в выпуклые контейнеры минимальных размеров. С помощью данного подхода авторы рассмотрели ряд сложных нерегулярных задач упаковки.

В работе [7] при решении задачи упаковки сложных трехмерных объектов в прямоугольный контейнер М.А. Верхотуров и соавторы применили алгоритм, основанный на использовании дискретно–логического представления информации. Он базируется на понятии годографа вектор-функции плотного размещения [56] и используется для моделирования движения и поворота объектов внутри контейнера.

М.А. Верхотуров и соавторы продолжили исследовать проблему размещения сложных трехмерных объектов в прямоугольный контейнер и предложили новый алгоритм ее решения в работе [8]. Алгоритм базируется на понятии «No Fit Polyhedron» и позволяет изменять положение подвижного объекта относительно зафиксированных внутри контейнера, а также повернуть его вокруг своей оси так, чтобы он не пересекал другие объекты.

Отдельно отметим задачи размещения, возникающие в энергетике. В работах [66,157] авторы указали, что использование интеллектуальной электрической сети позволяет снизить пиковую нагрузку при распределении потребности в электроэнергии на несколько коротких интервалов. Авторы рассматривали данную проблему как задачу упаковки полосок с наименьшей высотой. Тогда каждый процесс в системе рассматривается как прямоугольник с двумя размерами (высота и длина), соответствующими потребляемой энергии и продолжительности выполнения. В работе [73] представлен способ оптимизации использования энергии в умных домах путем максимального использования местной энергии. Авторы предложили два алгоритма управления энергопотреблением на основе алгоритма упаковки в контейнер (bin packing algorithm).

В работе [112] на основе алгоритма упаковки в контейнер рассматривается проблема управления энергопотреблением приложений в многоядерной многораздельной архитектуре. Авторы предложили метод распределения энергии, который учитывает различные частоты, на которых работает ядро. В работе [82] рассматривается задача трехмерного размещения электронных компонентов в

компактных объемах, при этом учитываются ограничения, связанные с тепловыми характеристиками. Авторы создали алгоритм типа имитации отжига.

В работе [46] рассматривается задача компоновки оборудования в процессе проектирования теплоэнергетических комплексов. Авторы предложили подход к компоновке оборудования в 2-х и 3-мерном пространстве. Данный подход базируется на использовании генетического алгоритма и позволяет найти приближенное к оптимальному решение за конечное время.

Кроме того, в связи с развитием малой энергетики, в частности, при размещении ветряных электростанций в ветропарке, актуальны задачи оптимального размещения на плоскости. Так, в работе [92] предложена методика обоснования параметров, размещения и оценки эффективности строительства ветро-дизельных электростанций в северных регионах России. Для электроснабжения изолированных населенных пунктов с высоким ветроэнергетическим потенциалом в северных регионах России методика позволяет повысить надежность электроснабжения и сэкономить на перевозке дизельного топлива на дальние расстояния.

В работе [85] предлагается новый метод нахождения оптимального размещения ветряных электростанций с учетом характеристик ветра и ограничений электрической сети. Авторы определяют метрики, отражающие качество ветра, для оценки возможных мест для создания ветряных электростанций. Найденные участки наносятся на карту электросети и определяется оптимальное размещение и размер электростанций. В работах [141,150] для решения задачи оптимального расположения ветряных турбин применяется метод моделирования Монте-Карло и двухэтапный генетический алгоритм, соответственно. Критерием оптимальности здесь является максимизация общей мощности при ограниченных затратах на стоимость установки.

С. Пауль [152] предложил новый подход к оптимальному размещению ветряных электростанций в радиальной распределительной сети с учетом их надежности. Поскольку ветряные турбины склонны к отказу, автор полагает, что

их принудительное отключение или случайный отказ влияют на надежность ветряной электростанции при выборе ее оптимального размещения. Это, в свою очередь, приводит к необходимости создания дублирующего контура.

Еще одна актуальная задача размещения возникает в строительстве зарядных станций для электромобилей в крупных транспортных сетях, когда критерием оптимальности является минимизация общей стоимости, либо общих потерь в распределительной сети [98,154,158]. В статье [98] авторы рассматривают задачу нахождения минимального количества зарядных станций и их расположения для покрытия наиболее вероятных маршрутов в транспортной сети. В работах [154,158] для решения указанной задачи используются эвристические алгоритмы, в частности, колонии муравьев (Ant colony optimization).

По результатам обзора исследований задач упаковки можно сделать вывод о том, что проблеме размещения трехмерных геометрических объектов уделяется большое внимание учеными, особенно в последние годы, из-за ее большой значимости в различных областях. Поскольку проблема NP-трудная, то не существует эффективных методов, с помощью которых можно было бы эффективно находить глобальные решения. Известны различные методы и алгоритмы, но они пригодны для решения данной проблемы только в частных ситуациях. Кроме того, большинство известных методов и алгоритмов работает с евклидовой метрикой, что, как будет показано далее, не всегда обеспечивает достаточную точность и адекватность моделирования при решении прикладных задач. Таким образом, можно заключить, что в области исследования существуют открытые проблемы, представляющие как теоретический, так и практический интерес.

В следующем разделе представлен развернутый обзор исследований одного из наиболее известных частных случаев размещения геометрических объектов – задачи упаковки шаров.

1.2 Задачи оптимальных трехмерных упаковок шаров и методы их решения

В данном разделе рассматриваются проблемы размещения геометрических объектов, имеющих сферическую форму, в трехмерном пространстве. Эти проблемы обычно называют задачами об оптимальной упаковке шаров в трехмерное пространство. Помимо уже упомянутых приложений, они имеют широкое применение при изучении белковых структур в биологии [100] и различных систем, состоящих из множества мелких частиц: молекул, живых клеток и т.п. [101]; при конструировании антенн, в рентгеновской томографии, лечении гамма-ножом в медицине [2,81,174]; также областями применения являются цифровая связь и хранение информации.

Подобные задачи можно формулировать следующим образом: необходимо найти способ расположения заданного количества шаров в пространстве так, чтобы шары друг с другом не пересекались, и их радиус достиг максимальной величины.

Задача о нахождении упаковки конгруэнтных шаров, имеющей наибольшую плотность, появилась более 400 лет назад и была сформулирована немецким ученым Иоганном Кеплером. Он предложил решение этой задачи, которое известно, как «гипотеза Кеплера». Суть ее заключается в следующем: среди всех упаковок шаров равного размера в трёхмерном пространстве наибольшую среднюю плотность имеет гранецентрированная кубическая упаковка и упаковки, равные ей по плотности [2,173]. Необходимо отметить, что правильность гипотезы была подтверждена компьютером в 2010 году [113] и аналитически доказана в 2017 году [114]. Другими словами, в случае бесконечного пространства задача уже решена и максимальная плотность достигается при упаковке в соответствии с гипотезой Кеплера. Однако в реальном мире все множества являются ограниченными, и требуется находить упаковки численными методами, учитывающими геометрию границы контейнера.

Большинство публикаций рассматривает задачу упаковки в двумерном пространстве с евклидовой метрикой в контейнер простой формы: круг, квадрат,

треугольник. Наилучшие известные упаковки для различного числа кругов опубликованы на веб-ресурсе [163] и регулярно обновляются. Для некоторых из них доказана оптимальность, например, для задачи упаковки равных кругов в квадрат представлены оптимальные результаты при числе кругов до 36 [140,148,170,173], в круг – до 19 [95-97,111,142].

Для задачи упаковки в трехмерном пространстве литература не так обширна, как для решения соответствующей задачи в двумерном пространстве. Хотя, ясно, что математические формулировки могут быть легко расширены с двумерного на трехмерное пространство, однако при увеличении размерности пространства трудность вычислений резко возрастает.

Большинство исследователей интересуется проблемами упаковки в «простые» контейнеры: куб, параллелепипед, сфера, цилиндр. Так, Т. Генсане и соавторы в работах [103,104,153] представили результаты решения задачи упаковки равных шаров в единичный куб при числе шаров $n \leq 32$, и в единичную сферу $n \leq 72$.

Е.Г. Биргин и соавторы в своей работе [71] рассмотрели задачи о нахождении контейнера минимального размера при заданном количестве сфер. В данной работе для случая равных единичных сфер авторы предложили результаты решения при их числе $n \leq 100$ для различных контейнеров.

Контейнер цилиндрической формы также привлекает внимание исследователей. Ю.Г. Стоян и Г. Яков представили решения задачи упаковки одинаковых шаров в параллелепипед или круговой цилиндр минимальной высоты в работах [165,166]. Авторы предложили метод поиска по дереву, который позволяет получить начальные точки в допустимой области и найти различные локальные минимумы. Кроме того, для нахождения локальных максимумов авторы использовали модификацию метода допустимых направлений и стратегию активных неравенств. Этот метод в дальнейшем был использован при исследовании проблемы упаковки максимального числа конгруэнтных сфер в многосвязное многогранное множество, т.е. когда контейнер имеет сквозные отверстия [167].

В работе [145] рассматривается задача упаковки сфер единичного диаметра в цилиндр, причём автор задает отношение диаметра цилиндра и отношение высоты цилиндра к диаметру сферы. В этой работе получены некоторые хорошие результаты при больших количествах шаров и проведено их сравнение с известными.

В 2012 А. Мугал и соавторы изучили проблему упаковки одинаковых сфер в цилиндр бесконечной длины [146]. Авторы использовали алгоритм имитации отжига для нахождения наилучшей плотности упаковки при заданном отношении диаметра цилиндра к диаметру сферы. Исследовали эту проблему Л. Фу и соавторы, они ее решали с помощью метода адаптивно-сжимающихся ячеек и метода последовательного линейного программирования [99].

В работе [126] В. Хуанг и Л. Ю рассмотрели различные контейнеры и предложили квазифизическую модель для решения задачи упаковки одинаковых шаров. Авторы показали эффективность алгоритма в сравнении с известными и привели результаты упаковки при числе шаров до 200 для сферического контейнера и до 150 для кубического контейнера.

В работах [67,143,144] рассматриваются проблемы упаковки единичных сфер в кубический и сферический контейнер. Р. М'Халла и А. Алкандари предложили алгоритм гибридной эвристики, которая связывает поиск переменной окрестности с локальным поиском, для нахождения контейнера минимального размера.

Для решения задачи упаковки равных шаров в трехмерный многогранник П.Д. Лебедев и А.А. Успенский предложили алгоритм разбиения многогранника на подмножества, используя диаграмму Вороного [36]. Затем для каждого подмножества отыскивается вписанный шар с наибольшим радиусом. Этот алгоритм работает только для выпуклых многогранников. Авторы реализовали алгоритм в пакете MATLAB и тестировали примеры для контейнера в виде куба и октаэдра.

В работе [38] П.Д. Лебедев и Н.Г. Лавров для решения задачи оптимальной упаковки равных шаров в эллипсоид предложили алгоритм, основанный на

принципе отталкивания их центров друг от друга и от границы контейнера. Авторы разработали программный комплекс в среде MATLAB и выполнили некоторые эксперименты при различных эллипсоидах.

В случае трехмерных неравных шаров многие исследователи рассмотрели случай, при котором контейнер является прямоугольным параллелепипедом фиксированных ширины и высоты с минимальной длиной. Х. Акеб получил различные результаты при числе шаров с 25 до 60 и показал, что известные результаты были улучшены [64,65]. М. Хифи [122], Т. Кубач [130] и соавторы в своих работах предложили алгоритм на основе жадных алгоритмов.

С. Ямада и соавторы в работе [177] рассмотрели задачу упаковки шаров двух различных типов в различные контейнеры, причем размер больших шаров во много раз больше маленьких. Авторы тоже предложили формулу вычисления размера больших шаров при известном размере маленьких для получения наибольшей плотности. А. Сутоу и Ю. Даи предложили глобальный подход для решения задачи нахождения оптимальной упаковки неравных шаров в работе [169].

Поскольку задача упаковки шаров в трехмерном пространстве является NP-трудной задачей оптимизации, построение точного эффективного алгоритма нахождения глобального решения маловероятно. Все известные алгоритмы приводят к приближенно-оптимальному решению. Например, многие ученые применяли генетические [50], эвристические [45,64,65] алгоритмы, квазифизический метод [126], имитационный алгоритм Монте-Карло [116,176], другие использовали метод поиска по переменной окрестности [143,144]. Использовался также жадный алгоритм [124,130] и метод поиска по ширине, основанный на жадном алгоритме [122], хотя данный алгоритм очень медленно работает и требует много ресурсов компьютера.

В следующем разделе опишем наиболее известные подходы к численному решению задач размещения трехмерных объектов более подробно.

1.3 Численные методы решения задач размещения трехмерных объектов

Поскольку задача размещения трехмерных геометрических объектов является NP-полной задачей комбинаторной оптимизации [15,51], все известные алгоритмы ее решения имеют экспоненциальную временную сложность [59]. Это означает, что даже в случае небольшого количества объектов и использования современных компьютеров, время работы программы, реализующей такие алгоритмы, будет велико [31].

В последние годы появилось большое число различных подходов, методов и алгоритмов решения проблемы трехмерного размещения, но глобальных оптимальных решений не найдено. Все известные подходы за приемлемое время приходят к отысканию решения, близкого к оптимальному. В данном разделе представлены известные численные подходы решения задач размещения трехмерных объектов.

Метод «Генетический алгоритм»

Генетический алгоритм является одним из популярных алгоритмов, используемых для решения многих классов задач оптимизации, в том числе и задачи размещения объектов. Первая публикация о генетическом алгоритме появилась в 1975 г. [123]. Ж. Хемминки является первым ученым, который использовал генетический алгоритм для решения задачи размещения в работе [119].

Принцип работы генетического алгоритма основан на моделировании биологических механизмов и процессов в живой природе. Генетический алгоритм не гарантирует нахождение глобальное оптимального решения за полиномиальное время, однако он позволяет отыскать «достаточно хорошее» решение за меньшее время, чем другие известные алгоритмы [14,28]. Анализ литературы показал, что генетический алгоритм широко использовали для решения задачи размещения объектов как в двумерном [12,39,44,50,78], так и в трехмерном пространстве [17,30,31,57,58,121].

Генетический алгоритм характеризуется популяцией, в которой каждая особь называется хромосомой, и содержит все параметры текущей популяции. Пусть заданы трехмерный контейнер P и n объектов $S_i, i=1...n$. Каждое t -е поколение, которое обозначается символом P_t , содержит n хромосом $S_i^t, i=1...n$.

Целевая функция $f(P_t)$ определяется текущим поколением и текущими параметрами его хромосом.

Общий генетический алгоритм для решения задачи размещения геометрических объектов содержит следующие шаги:

Шаг №1. Создать первую начальную популяцию P_0 случайным образом. Каждой хромосоме присваиваются начальные параметры. Порядковое значение $t = 0$.

Шаг №2. Вычислить значение целевой функции $f(P_t)$.

Шаг №3. Сформировать популяцию следующего поколения P_{t+1} методом отбора особей из текущего множества $S_i^t, i=1...n$ и изменения их состояния.

Шаги 2-3 повторяются до тех пор, пока не выполнится заданное число шагов (поколений) или какой-либо другой критерий остановки [50].

Для создания нового поколения используются генетические операторы: скрещивание и мутация. В результате этих операторов состояние хромосомы и значение целевой функции изменяются.

При исследовании задач размещения трехмерных геометрических объектов в контейнере обычно используется система кодирования, при которой каждая хромосома характеризует соответствующий объект, и содержит его текущее состояние. Например, хромосома t -ого поколения описывается формулой $S_i^t = \langle x_i, y_i, z_i, w_i, l_i, h_i, m_i \rangle$, где (x_i, y_i, z_i) – координаты, (w_i, l_i, h_i) – размер (ширина, длина, высота) и m_i – вес объекта.

Существуют следующие критерии оптимизации:

- Максимизации суммы объемов всех упаковываемых объектов, тогда целевая функция описывается выражением $f(P_t) = \sum w_i \cdot l_i \cdot h_i \rightarrow \max$;

- Минимизации длины заданного контейнера, целевая функция имеет вид:

$$f(P_i) = l_{\text{container}} \rightarrow \min.$$

В двух представленных случаях под понятием «генетический оператор» понимается процесс сдвига объектов вдоль оси координаты или их поворота.

«Эвристический подход»

Эвристический подход представляет собой популярный метод, использующийся для решения задач с высокой степенью сложности вычисления. Практически невозможно доказать правильность эвристического алгоритма для всех случаев, но при его использовании обычно получается достаточно хорошее решение [16]. Для задачи размещения объектов существует множество эвристических подходов, из которых чаще всего используют схему «Постройки стены». Основной принцип работы этой схемы заключается в том, что контейнер заполняется последовательно по всей его глубине.

Самое первое применение этого подхода было представлено в работе [105]. Авторы использовали эвристический подход для решения промышленных задач о размещении более 800 коробок из 20 типов в контейнере. Схема алгоритма состоит из следующих шагов:

Шаг №1. Разделить заданные коробки по группам, каждая группа содержит коробки одного типа.

Шаг №2. Произвести ранжирование всех групп по следующим критериям:

- По размеру наименьшего измерения коробок: чем больше размер, тем выше рейтинг группы. Обоснование этого критерия заключается в том, что трудно разместить коробки с большими размерами в конце. Поэтому группа коробок, у которых минимальный размер является максимальным среди всех других, имеет выше рейтинг для выбора.

- По количеству коробок в группе: если по первому критерию имеется несколько групп с одинаковым рейтингом, то среди них рейтинг определяется по количеству коробок в группе, чем больше количество коробок, тем выше рейтинг. Авторы предположили, что эффективно заполнить весь слой или его большую часть одним и тем же типом коробок.

- По длине наибольшего измерения: чем больше, тем выше приоритет.

Шаг №3. Заполнить контейнер по слоям, причем коробки выбираются по рейтингу. Коробка расположена таким образом, что она находится ближе к предыдущему слою и глубина слоя равна максимальной глубине его коробок.

Схема расположения коробок по этому подходу изображается на рисунке 1.2, причем W, H, D – это размеры контейнера, d – глубина слоя.

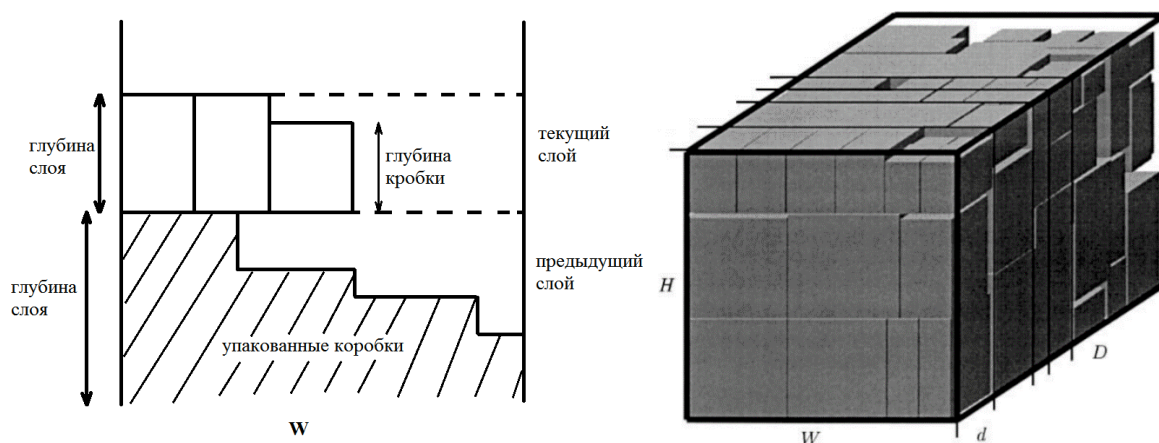


Рисунок 1.2 – Пример расположения коробок по схеме «Постройки стены»

Данный подход использовался в дальнейшем во многих других работах [72,102,119,155]. Отметили, что этот алгоритм хорошо работает в случае, когда коробки имеют одинаковый размер. В случае неоднородных типов существуют различные варианты выбора коробок для размещения, следовательно, выбранный вариант может давать неоптимальное решение.

Метод «Поиск с запретами»

Метод «поиск с запретами» или «табу-поиск» является одним из наиболее эффективных метаэвристических методов, используемых для решения NP-трудных оптимизационных задач. Основа алгоритма заключается в локальном поиске, при котором на каждой итерации в качестве нового решения выбирается лучшее решение в окрестности текущего. Значит, данный алгоритм позволяет переходить от одного локального оптимума к другому для отыскания глобального оптимума [54]. Алгоритм прекращает работу после заданного числа итераций.

Данный алгоритм был предложен Ф. Гловером в работах [106,107]. Главным механизмом алгоритма является составленный список запретов

$Tabu(i_k)$, который строится по предшествующим вычисленным решениям и запрещает часть окрестности текущего решения.

Обозначаем I – множество начальных решений; f – целевая функция задачи; $f(i_k)$ – значение целевой функции при решении i_k ; $N(i_k)$ – окрестность текущего решения i_k . Цель алгоритма заключается в максимизации целевой функции f .

Шаг №1. Применить базовый эвристический алгоритм для определения начального решения i_0 . Положить начальные значения: $f^* := f(i_0)$, $k := 0$, $Tabu(i_0) := \{\emptyset\}$. Задать максимальное число итераций T_l и количество «неизменений» целевой функции T_f .

Шаг №2. Сформировать окрестность $N(i_k)$;

Шаг №3. Найти i_{k+1} такое, что $f(i_{k+1}) = \min \{f(i_j) \mid j \in N(i_k) \setminus Tabu(i_k)\}$;

Шаг №4. Если $f^* > f(i_{k+1})$, то $f^* := f(i_{k+1})$;

Шаг №5. Положить $k = k + 1$ и пересформировать список запретов $Tabu(i_k)$.

Шаги 2-5 повторяются до тех пор, пока не выполнен критерий остановки. Критерий остановки может формулироваться разным способом, но обычно используется комбинация из следующих:

- пустая окрестность $N(i_k) = \emptyset$;
- значение k больше максимального допустимого числа итераций T_l ;
- осуществляется наперед заданное максимальное количество итераций T_f ,

выполненных с момента последнего изменения целевой функции f^* .

Необходимо отметить, что во многих случаях используется список запретов $Tabu_l(i_k)$, который формируется по l последним шагам алгоритма. Константа $l \geq 0$ определяет максимальное количество элементов в списке запретов. При добавлении нового элемента в список необходимо удалить элемент, добавленный раньше всех, если длина списка становится больше заданной. При $l = 0$ список запретов пуст и алгоритм превращается в стандартный алгоритм локального спуска [53].

Достоинства данного алгоритма заключаются в том, что алгоритм легко адаптируется и имеет возможность гибридизации с другими методами. Например, в работе [139] Д. Мак и соавторы использовали алгоритм имитации отжига в качестве базового эвристического алгоритма и далее сформулировали новый гибридный алгоритм.

1.4 Оптико-геометрический подход и бильярдный подход

Оптико-геометрический подход.

Во многих случаях физическое (евклидово) расстояние между точками не является критерием для оценки удаленности исследуемого объекта, например, при перемещении по городу транспорт не всегда может двигаться по кратчайшему расстоянию – прямой. В этих ситуациях, как правило, интересно не столько расстояние между объектами или даже длина пути движения транспортных средств, сколько время перемещения между ними. Таким образом, в качестве меры удаленности объектов используется минимальное время перемещения между ними, что, в свою очередь, означает необходимость учитывать факторы, влияющие на скорость перемещения в каждой точке (качество дороги, узкие места, наличие запрещенных областей, изменение высоты и др.). С математической точки зрения использование времени перемещения вместо обычного расстояния между объектами приводит к необходимости введения неевклидовых метрик. Но при этом известно очень мало публикаций и исследователей, которые рассматривают задачи в неевклидовой метрике.

Это значит, что требуется разработать специальный метод, позволяющий работать в пространстве с неевклидовой метрикой. В данной диссертационной работе автор предлагает использовать оптико-геометрический подход, который базируется на фундаментальных физических принципах Ферма и Гюйгенса [3,33]

и заменяет расстояние между точками временем движения частицы (фотона) из одной точки к другой.

Согласно принципу Ферма, каждый фотон выбирает такой путь движения между двумя точками, на который затрачивается минимальное время. В соответствии с принципом Гюйгенса, каждая точка, которой достигает фронт световой волны, становится новым источником света. Используя эти принципы, процесс измерения «расстояния» от точки a до точки b осуществляется следующим образом: из точки a выпускается световая волна, фотон, который первым достигает точки b , фиксируется, и его траектория движения строится путём попятного движения, начинающегося из точки b . Зная траекторию движения фотона, можно вычислить «расстояние» между этими точками. Иллюстрация процесса распространения света в трехмерном пространстве представлена на рисунке 1.3.

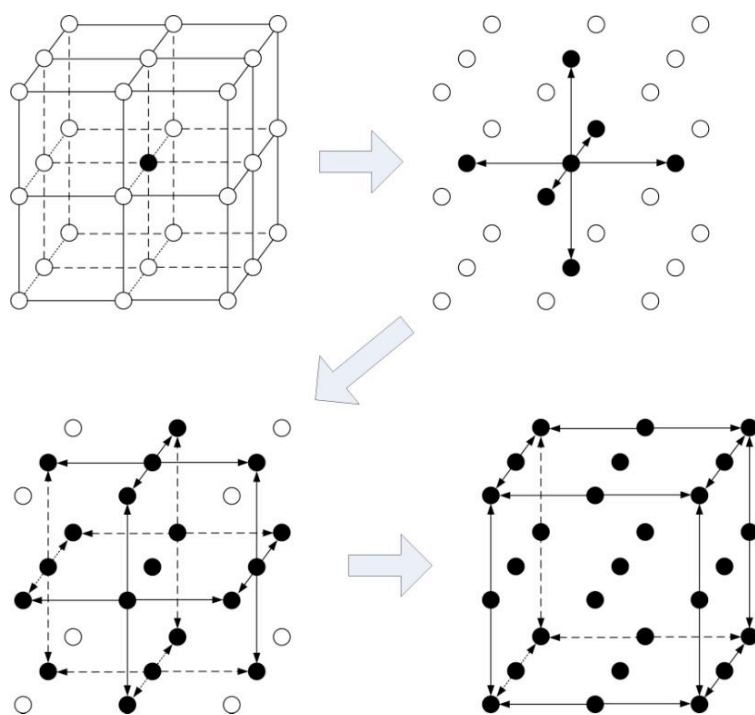


Рисунок 1.3 – Процесс распространения световой волны в трехмерном пространстве

По этим принципам в однородной среде, когда скорость движения фотона одинакова по всему пространству, все фотоны движутся по прямым линиям, и расстояние между двумя точками является евклидовым. Этот оптико-геометрический подход был исследован и впервые применен при решении

различных задач логистики проф. А.Л. Казаковым, и получил дальнейшее развитие в его научной школе. Например, в работе [18] А.Л. Казаков, А.А. Лемперт использовали данный подход и разработали новый алгоритм для решения задачи об оптимальном размещении логистического центра и задач о сегментации логистических зон обслуживания.

А.Л. Казаков, А.А. Лемперт, Г.Л. Нгуен разработали алгоритм для задачи проектирования сети коммуникаций [20]. В работе авторы предложили новую математическую модель сети вида неориентированного графа. В отличие от традиционных моделей, авторы использовали специальную метрику, позволяющую учесть некоторые особенности местности при проектировании.

В работах [21,22] А.Л. Казаков, А.А. Лемперт, Г.Л. Нгуен на основе данного подхода предложили алгоритм для решения задачи упаковки равных кругов и задачи покрытия замкнутого множества равными кругами. Обе задачи решаются в двумерном пространстве со специальной неевклидовой метрикой. Построенные алгоритмы в этих работах потом использованы для реализации программного комплекса «ОТЛП» [23,24] на языке программирования C#.

В работе [19] А.Л. Казаков, А.А. Лемперт, Д.С. Бухаров решили задачи размещения логистических центров при условии непрерывного распределения потребителей в исследуемой области. Представленный численный алгоритм в этой работе построен на основе модификации оптико-геометрического подхода и реализован в рамках программной системы «ВИГОЛТ» [5] на языке программирования Pascal.

В работе [37] П.Д. Лебедев и А.А. Лемперт рассмотрели задачи упаковки равных кругов на плоскости с неевклидовой метрикой и предложили итерационный алгоритм решения на основе оптико-геометрического подхода который авторы реализовали в виде программного комплекса с помощью пакета MATLAB.

В работе [4] В.В. Башуров применил оптико-геометрический подход к решению задачи безопасности объекта. В работах [34,35] производится построение биссектрисы множества, образующего фронт волны. Построение

биссектрисы необходимо для корректного конструирования фронта волны и выявления точек, в которых нарушаются дифференциальные свойства. Численная реализация подхода основывалась на построении множеств достижимости.

В последние годы оптико-геометрический подход используется для решения задачи упаковки различных кругов в двумерном пространстве с неевклидовой метрикой. А.Л. Казаков, А.А. Лемперт и К.М. Ле разработали алгоритмы для исследования проблемы упаковки двух различных типов кругов [129], покрытия различными кругами [133], многократной упаковки равных кругов и многократного покрытия равными кругами [131,132]. Особенность этих алгоритмов состоит в том, что световые волны распространяются из разных источников с разными скоростями. На основе представленных алгоритмов авторы создали программный комплекс КУПОЛ-М [25], который позволяет решить задачи кратных упаковок и покрытий на плоскости с неевклидовым расстоянием. Алгоритмы реализованы с помощью языка программирования C# в средстве разработки Visual Studio 2013.

Бильярдное моделирование.

Большинство исследователей рассматривают задачи трехмерной упаковки шаров в выпуклое множество. В случае невыпуклого и неодносвязного множества опубликовано очень мало работ из-за трудностей в формализации и вычислении. Поскольку при невыпуклом контейнере количество вершин и границ становится больше и, зачастую, не определяется функция их описания, то время и сложность вычисления существенно увеличиваются.

Метод бильярдного моделирования был представлен в работе [136,137] при рассмотрении задачи упаковки кругов в двумерном пространстве. Суть метода заключается в следующем: каждый шар рассматривается как жесткий бильярдный шар, имеющий возможность свободно двигаться внутри заданного множества, но необходимо соблюдать два правила: не перекрывать друг друга и не выходить за границы множества.

Этот подход был использован для нахождения оптимальной упаковки кругов в двумерном пространстве. Например, в работе [108] Р.Л. Грехем и

соавторы использовали его для решения задачи упаковки равных кругов в равносторонний треугольник при числе кругов от 22 до 34; а в работах [109,74] представлены некоторые оптимальные результаты при упаковке равных кругов в квадрат. В работе [138] Б.Д. Любачевский и Р.Л. Грехем использовали этот подход для задачи упаковки равных кругов в круг и улучшили некоторые известные результаты.

В трехмерном пространстве Т. Генсане использовал данный подход для решения задачи упаковки равных шаров в куб и показал, что в некоторых случаях метод позволяет за конечное число шагов найти оптимальное решение [104]. Начальное расположение центров шаров задается случайным образом, а их диаметр выбирается равным минимальному расстоянию между центрами. Автором рассматриваются два типа движения шаров. Первый тип состоит из случайного движения шаров: направления движения шаров выбираются произвольно и фиксируются, шары движутся последовательно, один за другим. В процессе движения радиус шаров не изменяется, и если какой-то шар перекрывает другой, то такое перемещение не осуществляется. Второй тип – это одновременное хаотическое движение всех шаров. Шары хаотично движутся, и их радиус постепенно увеличивается. Амплитуда стохастических движений постепенно уменьшается из-за роста диаметра шаров. При этом различные начальные положения центров могут приводить к разным результатам. Таким образом, полученный результат зависит от выбора стартовых точек [104].

В диссертационной работе автор предлагает модифицированный бильярдный алгоритм. При этом бильярдные шары двигаются не случайным образом, а направление движения каждого шара определяется так, чтобы этот шар двигался как можно дальше от ближайших шаров и от ближайшей границы множества. Это гарантирует, что после каждого шага движения при увеличении радиуса шары друг друга не пересекают и не выходят за границы множества.

Выводы по главе 1

1. Анализ предметной области позволяет сделать вывод о том, что проблемы размещения физических объектов в трехмерном пространстве имеют большую практическую значимость, постоянно модернизируются и усложняются. В этой связи при их изучении появляется необходимость в разработке новых математических моделей и методов, а также в развитии соответствующего программно-алгоритмического инструментария.

2. Среди трехмерных проблем размещения особую роль играет задача об оптимальном размещении шаров: упаковка их в контейнер и покрытие заданного множества сферами. Поскольку эти задачи являются NP-трудными, методы, позволяющие найти глобальное решение для задачи общего вида, не известны и маловероятно, что они когда-либо будут получены. Поэтому задачи об оптимальном размещении шаров обычно решаются в частных случаях с использованием приближенных методов, среди которых можно выделить генетические и эвристические алгоритмы, поиск по дереву, поиск по окрестности с запретами, жадные алгоритмы.

3. Обзор литературы показывает, что известные алгоритмы решения задач о размещении шаров работают преимущественно в пространстве с евклидовым расстоянием. Однако в приложениях возникают задачи, в которых вместо физического расстояния между точками, необходимо использовать иные метрики, характеризующие удаленность объектов. Например, определяющие минимальное время перемещения между ними. В этой связи, для решения задач размещения кругов в двумерном пространстве с неевклидовой метрикой профессор А.Л. Казаков и его коллеги предложили новый метод (оптико-геометрический подход), базирующийся на известных физических принципах Ферма и Гюйгенса. Автор диссертации продолжает указанные исследования: оптико-геометрический подход переносится в трехмерное пространство и применяется для решения задач размещения шаров.

Глава 2 Математические модели размещения трехмерных физических объектов и алгоритмы их исследования

2.1 Математическая формализация задачи размещения трехмерных физических объектов

В данном разделе обсуждаются различные варианты постановок задач из предметной области, которые приводят к необходимости применения различных типов и способов модификации математической модели. Пусть имеется некоторый трехмерный ограниченный полигон обслуживания с известными характеристиками, которые могут оказывать влияние на функционирование размещаемых объектов. К таким характеристикам, в зависимости от вида размещаемых объектов, могут относиться рельеф, тип грунта, наличие растительности и строений, фоновых или искусственных излучений и т.п. Рассмотрим и опишем следующие задачи размещения объектов.

1. Требуется разместить заданное число датчиков наблюдения в системе мониторинга. Здесь ключевым моментом является обеспечение полного покрытия исследуемой области. При этом зоны, покрываемые каждым датчиком, во-первых, могут пересекаться, во-вторых, радиус действия зависит от свойства окружающей среды (оптической плотности) и должен быть минимальным.

Такие требования возникают в задаче размещения сети датчиков мониторинга загрязнения или температуры воздуха и воды [27]; в разработке систем мониторинга состояния окружающей среды в зданиях с помощью современных беспроводных сенсоров, когда нужно обеспечить требуемое состояние среды [115]; при разработке системы видеонаблюдения на складах и производствах, которая позволяет оператору наблюдать все охраняемые объекты [47]; или при построении системы беспроводной сети, когда необходимо обеспечить доступ пользователей к сети из любого места помещения [26]. Кроме

того, большую роль играет размещение датчиков при проектировании «умных» помещений в технологии Smart Grid.

2. Необходимо расположить заданное число устройств, оказывающих физическое воздействие, в системах точечной физической защиты. В данном случае пересечение зон обслуживания не допускается, при этом требуется охватить как можно большую долю полигона обслуживания.

Данные требования возникают, например, при разработке системы физической защиты охраняемого объекта [13]; при проектировании планов оптимального размещения пожароопасных объектов для снижения уровня загрязнения атмосферы аэрозольными продуктами горения [60].

При исследовании данного класса задачи выделяются следующие ситуации:

- Заданный полигон обслуживания с математической точки зрения является либо выпуклым, либо невыпуклым множеством, которое может быть как односвязным, так и неодносвязным. Такая ситуация возможна, например, при разработке системы наблюдения в непустых помещениях [48].

- Заданные устройства имеют различные мощности. Такие требования возникают в случае, когда для обеспечения устойчивости работы системы необходимо использовать устройства различных типов.

Рассмотрим математическую формализацию представленных постановок.

Пусть в трехмерном пространстве имеется некоторая ограниченная область $X \subseteq \mathbb{R}^3$; заданное ограниченное трехмерное множество $P \subset X$ с непрерывной границей ∂P – полигон обслуживания; n – количество датчиков; $O_i(x_i, y_i, z_i)$ – координаты i -ого датчика, $i = 1 \dots n$; $c(x, y, z) \geq 0$ – непрерывная функция, задающая оптическую плотность среды в каждой точке $(x, y, z) \in X$, тогда $f(x, y, z) = 1 / c(x, y, z)$ – местная скорость света, причём, если $f(x_i, y_i, z_i) = 0$, то прохождение сигнала через эту точку невозможно.

Введем следующий функционал:

$$\rho(a, b) = \min_{G \in G(a, b)} \int_G \frac{dG}{f(x, y, z)}, \quad (2.1)$$

где $G(a,b)$ – множество всех непрерывных кривых, соединяющих точки a и b . Решение задачи (2.1) определяет время прохождения сигнала из a в b . В случае $f(x,y,z) \equiv 1$ интеграл в (2.1) легко вычисляется, и выражение (2.1) определяет обычное евклидово расстояние. Фактически, (2.1) определяет минимальное время прохождения сигнала между двумя точками, далее будем использовать его в качестве расстояния. Отметим, что функционал ρ , вообще говоря, не является дифференцируемым.

Постановка 1. Требуется расположить n одинаковых датчиков на полигоне обслуживания P так, чтобы все точки наблюдались с помощью хотя бы одного датчика, и радиус действия датчиков был минимально возможным.

Вариант 1. Пусть R_i – радиус действия датчика, тогда зона его действия определяется формулой

$$D_i = \{p \in X : \rho(p, O_i) \leq R_i\}. \quad (2.2)$$

Здесь все датчики имеют одинаковую мощность, поэтому $R_i = R, i = 1 \dots n$.

Тогда условие, гарантирующее, что все точки области P наблюдаются системой датчиков, можно записать как

$$P \subset \bigcup_{i=1}^n D_i. \quad (2.3)$$

т.е. все точки области P принадлежат множеству, являющемуся объединением зоны действия всех датчиков.

Целевая функция задачи размещения датчиков представляется следующим образом:

$$F_1 = \max_{1 \leq i \leq n} \max_{p \in D_i} \rho(p, O_i) \rightarrow \min \quad (2.4)$$

Фактически, функция (2.4) минимизирует время прохождения сигнала от датчика до границы зоны его действия. Решения задачи с целевой функцией (2.4) эквивалентно решению задачи о покрытии ограниченного множества равными шарами минимального радиуса.

Задача переписывается следующим образом: пусть задано замкнутое множество $P \subset X$; задано n равных шаров с центрами $O_i(x_i, y_i, z_i), i = 1 \dots n$ и

радиусом R . Необходимо разместить данные шары так, чтобы замкнутое множество P полностью покрывалось объединением всех шаров и их радиус был минимальным:

$$R \rightarrow \min, \quad (2.5)$$

$$\forall p \in P, \exists i \mid \rho(O_i, p) \leq R, \quad (2.6)$$

$$O_i \in P, i = 1 \dots n. \quad (2.7)$$

Выражение (2.5) минимизирует радиус шаров. Выражение (2.6) гарантирует, что для любой точки множества P всегда существует шар, который покрывает ее. Выражение (2.7) указывает, что все центры шаров принадлежат множеству P . Данная задача в некоторых случаях может быть записана в виде задачи математического программирования, в частности, когда граница множества является выпуклым многогранником и метрика является евклидовой.

Вариант 2. Предположим, что все рассматриваемые устройства одинаковы, но в области P существуют запретные зоны, в которых невозможно расположить устройства. Такая задача возникает, в первую очередь, при расположении устройств в помещении, поскольку допустимым является их размещение только на части стен и потолка. Введем в рассмотрение множество $W \subset \partial P$ – участки границы множества P , где разрешено размещение устройств. Тогда задача (2.5)–(2.7) примет вид:

$$R \rightarrow \min, \quad (2.8)$$

$$\forall p \in P, \exists i \mid \rho(O_i, p) \leq R, \quad (2.9)$$

$$O_i \in W, i = 1 \dots n, W \subset \partial P. \quad (2.10)$$

Постановка 2. Пусть на полигоне обслуживания P необходимо разместить заданное число n устройств физической защиты таким образом, чтобы, во-первых, доля защищаемой области была максимальной, и, во-вторых, все зоны действия устройств между собой не пересекались и не выходили за границу области P .

Вариант 1. Пусть все устройства одинаковы, а полигон обслуживания P – выпуклое множество. Зона, контролируемая i -м устройством, определяется по формуле (2.2), где R_i – радиус действия устройства, тогда

$$R_i = \max_{p \in D_i} \rho(p, O_i). \quad (2.11)$$

Целевая функция задачи размещения примет вид

$$F_2 = \min_{1 \leq i \leq n} \max_{p \in D_i} \rho(p, O_i) \rightarrow \max. \quad (2.12)$$

Решение задачи с целевой функцией (2.12) эквивалентно решению задачи об упаковке равных шаров с максимальным радиусом в ограниченное выпуклое множество с метрикой (2.1). Тогда задачу можно переформулировать следующим образом.

Требуется расположить в выпуклом множестве P заданное число n одинаковых шаров $S_i(O_i, R)$, где $O_i(x_i, y_i, z_i)$ – центр i -ого шара, R – радиус шаров, $i = 1 \dots n$, так, чтобы все шары полностью находились внутри заданного множества P и радиус шаров был максимальным:

$$R \rightarrow \max, \quad (2.13)$$

$$\rho(O_i, O_j) \geq 2R, \forall i, j = 1 \dots n, i \neq j, \quad (2.14)$$

$$\rho(O_i, \partial P) \geq R, \forall i = 1 \dots n, \quad (2.15)$$

$$O_i \in P, \forall i = 1 \dots n. \quad (2.16)$$

Целевая функция (2.13) максимизирует радиус шаров. Условие (2.14) гарантирует, что шары друг с другом не пересекаются. Условие (2.15) обеспечивает, что шары не пересекают границу множества P . Выражение (2.16) показывает, что все центры шаров находятся внутри множества P .

Вариант 2. Предположим, что все рассматриваемые устройства одинаковы, но в области P существуют запретные зоны, в которых невозможно ни расположить устройства, ни обеспечить условия их работы. Другими словами, заданная область P является невыпуклым и неодносвязным множеством.

Пусть имеются m замкнутых подмножеств $B_k \subset X$, $k = 1 \dots m$, для которых справедливо следующее свойство: $\forall T(x_t, y_t, z_t) \in B_k : f(x_t, y_t, z_t) = 0$. Тогда множество P с вычетами можно представить в виде:

$$P = \text{cl} \left(P \setminus \bigcup_{k=1}^m B_k \right), \quad (2.17)$$

где cl – оператор замыкания. Отметим, что если все B_k находятся на границе множества P , то множество становится невыпуклым. Иначе, если существует хотя бы одно подмножество полностью находится внутри множества P , то множество P является многосвязным.

В этом случае целевая функция также имеет вид (2.12). Данный случай соответствует задаче упаковки равных шаров в ограниченное невыпуклое и неодносвязное множество.

Вариант 3. Предполагается, что устройства физической защиты разделяются на две группы, мощность устройств первой группы в α раз больше, чем второй, где $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Естественно предположить, что размер зоны действия устройства пропорционален его мощности.

Задача формализуется следующим образом: пусть задано замкнутое множество $P \subset X$; задано m шаров S_i с центрами $O_i(x_i, y_i, z_i)$ и радиусом R_1 , n шаров S_j с центрами $O_j(x_j, y_j, z_j)$ и радиусом R_2 , где $i = 1 \dots m$, $j = (1 + m) \dots (n + m)$ и $R_1 = \alpha R_2, \alpha \in \mathbb{R}^+$. Необходимо найти такое расположение центров $O = (O_1, O_2, \dots, O_{m+n}) \in P$, чтобы значение радиуса R_1 (и, следовательно, R_2) достигло максимума. Шары с радиусом R_1 называются базовыми или шарами первого типа. Шары с радиусом R_2 – шарами второго типа.

Целевая функция данной задачи определяется выражением

$$F_3 = \max_{p \in D_1} \rho(p, O_1) \rightarrow \max. \quad (2.18)$$

Данный вариант соответствует задаче упаковки шаров двух разных типов в ограниченное множество с неевклидовыми метриками (2.1):

$$R_1 \rightarrow \max, \quad (2.19)$$

$$R_1 = \alpha R_2, \alpha \in Q^+, \quad (2.20)$$

$$\rho(O_i, \partial P) \geq R_1, \quad i = 1 \dots m, \quad (2.21)$$

$$\rho(O_j, \partial P) \geq \frac{R_1}{\alpha}, \quad j = (m+1) \dots (m+n), \quad (2.22)$$

$$\rho(O_i, O_j) \geq 2R_1, \quad i, j = 1 \dots m, i \neq j, \quad (2.23)$$

$$\rho(O_i, O_j) \geq \frac{2R_1}{\alpha}, \quad i, j = (m+1) \dots (m+n), i \neq j, \quad (2.24)$$

$$\rho(O_i, O_j) \geq R_1 + \frac{R_1}{\alpha}, \quad i = 1 \dots m, j = (m+1) \dots (m+n), \quad (2.25)$$

$$O_i \in P, \quad \forall i = 1 \dots (m+n). \quad (2.26)$$

Целевая функция (2.19) максимизирует радиус шаров. Выражение (2.20) определяет соотношение радиусов. Неравенства (2.21) и (2.22) гарантируют, что шары не пересекаются с границей множества P , а (2.23), (2.24) и (2.25) обеспечивают условие непересечения шаров между собой. Выражение (2.26) показывает, что все центры шаров лежат в множестве P .

Отметим, что:

- если $\alpha < 1$, то шары первого типа меньше шаров второго типа;
- если $\alpha > 1$, то шары первого типа больше шаров второго типа;
- если $\alpha = 1$, то все шары имеют одинаковый радиус.

Вариант 4. Рассмотрим задачу, когда все устройства имеют различные мощности, причём мощность следующего в β раз меньше предыдущего, где $\beta \in \mathbb{Q}^+$. Данная задача не имеет очевидной связи с приложениями, однако интересна с математической точки зрения и рассматривается для полноты исследования. Такой вариант соответствует задаче упаковке шаров различных типов в замкнутое множество.

Перепишем задачу следующим образом: пусть задано замкнутое множество любой границей $P \subset X$; задано n шаров с центрами $O_i(x_i, y_i, z_i)$ и разными радиусами $R_i, i = 1 \dots n$, где $R_i = \frac{1}{\beta} R_{i-1}, \forall i = 2 \dots n, \beta \in Q^+$. Необходимо найти такое

расположение $O = (O_1, O_2, \dots, O_n) \in P$, чтобы значение радиуса R_1 (и следовательно всех $R_i, i = 2 \dots n$) достигло максимума. Шар с радиусом R_1 называется базовым.

$$R_1 \rightarrow \max, \quad (2.27)$$

$$R_i = \frac{1}{\beta^{i-1}} R_1, \beta \in Q^+, \forall i = 1 \dots n, \quad (2.28)$$

$$\rho(O_i, O_j) \geq \left(\frac{1}{\beta^{i-1}} + \frac{1}{\beta^{j-1}} \right) R_1, \quad \forall i = 1 \dots n, \forall j = 1 \dots n, i \neq j, \quad (2.29)$$

$$\rho(O_i, \partial P) \geq \frac{1}{\beta^{i-1}} R_1, \quad \forall i = 1 \dots n, \quad (2.30)$$

$$O_i \in P, \quad \forall i = 1 \dots n. \quad (2.31)$$

Целевая функция (2.27) максимизирует радиус базового шара, и следовательно, радиусы всех шаров. Выражение (2.28) задает соотношение радиусов. Неравенство (2.29) – условие непересечения шаров между собой, а (2.30) – с границей множества P .

2.2 Вычислительные алгоритмы решения задач размещения шаров

2.2.1 Базовые алгоритмы

В этом разделе приводятся разработанные базовые алгоритмы, входящие в структуру всех специализированных алгоритмов решения задач о покрытии и упаковках шаров в трехмерное ограниченное множество.

Метод представления объектов в трехмерном пространстве

При решении задачи в трехмерном пространстве автор использует равномерный сеточный метод с шагом h для аппроксимации множества. Для повышения точности вычисления необходимо уменьшать значение шага сетки h . Однако при малом шаге количество точек в исследуемом пространстве быстро возрастает, следовательно, используемый объем памяти ЭВМ для вычисления

тоже возрастает. Поэтому для снижения затрат памяти обычно используется метод, при котором удаляются все точки внутри исследуемого множества, а сохраняются только точки на границе.

Вторая проблема заключается в сложности работы с поверхностями произвольной формы в трехмерном пространстве. Чтобы преодолеть указанные трудности, автор использует три группы плоскостей. Каждая группа состоит из плоскостей, которые параллельны одной из трех координатных плоскостей, и расстояние между плоскостями равно h . В результате получается набор сечений, и вместо трехмерной поверхности сложной формы мы работаем с набором двумерных сечений более простой формы. Например, на рисунке 2.1б после разреза куба параллельными плоскостями получается множество сечений, являющихся квадратами.

При использовании этого метода поверхность любой формы аппроксимируется набором участков кривых. Тогда расстоянием между точкой и поверхностью будет минимальное расстояние между данной точкой и соответствующим участком кривой.

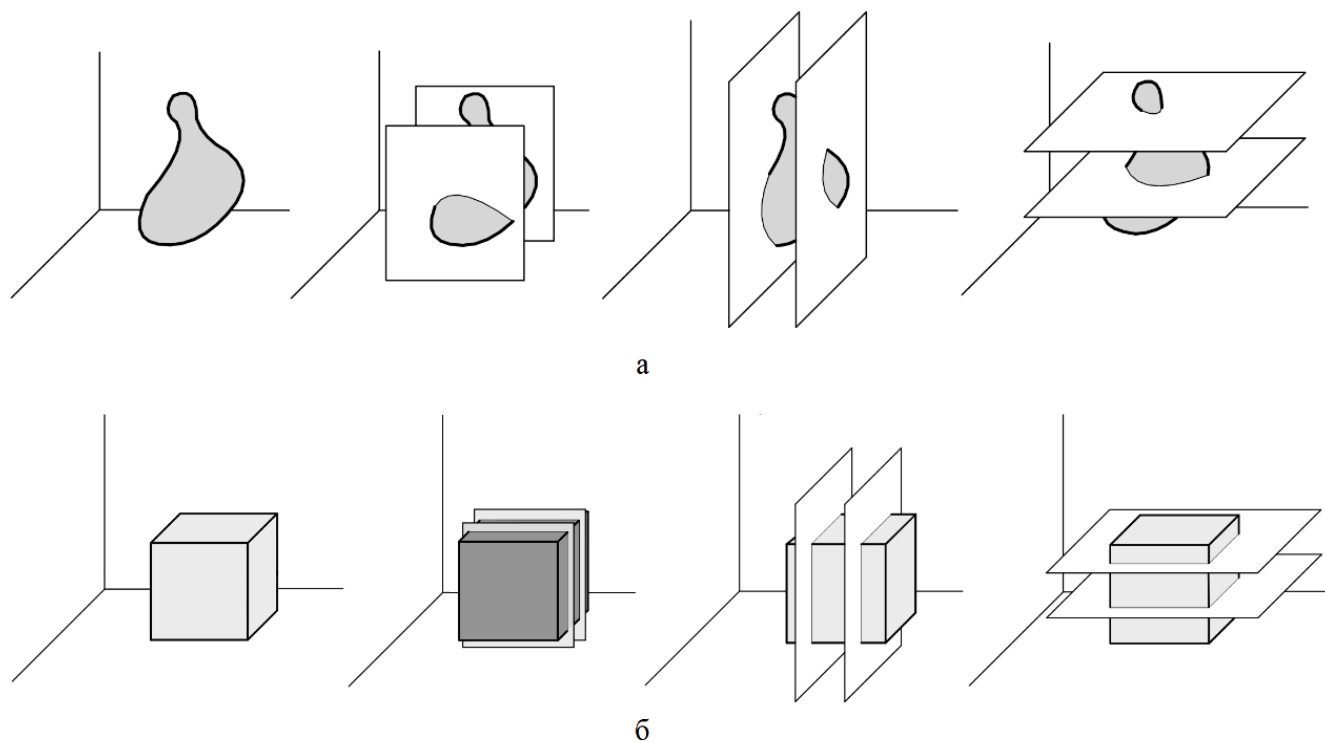


Рисунок 2.1 – Разрез контейнера параллельными плоскостями

Алгоритм РТМП (Разбиения Трехмерного Множества на Подмножества)

Данный алгоритм используется для построения обобщенной трехмерной диаграммы Вороного множества-контейнера относительно набора заданных точек. Данный алгоритм основан на оптико-геометрическом подходе и позволяет разбить задачу покрытия или упаковки n шаров на серию задач покрытия или упаковки одного шара. Суть алгоритма заключается в том, что из всех точек-источников, относительно которых разбивается множество-контейнер, выпускаются световые волны. Это, фактически, означает, что для каждой точки множества, отличной от источника, устанавливается время ее достижения каждой волной. Номер волны, первой достигшей точки, и определяет подмножество, которому она принадлежит.

Пусть задано множество P^* и n точек $\overline{O}_i, i=1...n$. Необходимо разбить множество P^* на n подмножеств $P_i^*, i=1...n$ так, чтобы расстояние от каждой точки i -ого подмножества до соответствующей точки $\overline{O}_i$ было меньше, чем расстояние до любой другой точки $\overline{O}_j, j \neq i$.

Шаг №1. Из каждой заданной точки $\overline{O}_i, i=1...n$ выпускается световая волна.

Шаг №2. Для каждой точки $A \in P^*$ вычисляется время достижения световой волны из каждого источника. Используется массив $t_A = \{t_A^1, t_A^2, \dots, t_A^n\}$ для сохранения время достижения световой волны из всех источников до точки A .

Шаг №3. Вычисляется минимальное значение $\tau_A = \min\{t_A^1, t_A^2, \dots, t_A^n\}$. Если $\tau_A = t_A^i$, то точка A принадлежит подмножеству P_i^* .

Если существуют некоторые значения из массива t_A , которые одновременно равны минимальному значению τ_A , то данная точка принадлежит границе между соответствующими подмножествами.

Алгоритм УОШ (Упаковка Одного Шара)

Данный алгоритм предназначен для нахождения вписанного шара максимального радиуса в замкнутое трехмерное множество. Суть алгоритма

заключается в том, что на каждой итерации центр шара перемещается как можно дальше от границы множества, и радиус шара, соответственно, монотонно увеличивается.

Пусть задано замкнутое множество P^* , необходимо найти вписанный шар $\bar{S}$ с центром $\bar{O}$ и максимальным радиусом $\bar{R}$.

Алгоритм УОШ имеет следующие шаги:

Шаг №1. Методом случайной генерации задается начальный центр $\bar{O}_0$.

Шаг №2. Вычисляется максимальный возможный радиус $\bar{R}_0$ по формуле

$$\bar{R}_0 = \min \rho(\bar{O}_0, \partial P^*).$$

Шаг №3. Определяется множество точек касания

$$\bar{M} = \{m \mid \rho(\bar{O}_0, m) = \bar{R}_0, m \in \partial P^*\}.$$

Шаг №4. Строятся векторы, началом которых является точка $\bar{O}_0$, а концами – точки из множества точек касания $\bar{M}$. Вычисляется вектор суммы:

$$\vec{c} = \sum_{m \in \bar{M}} \vec{\bar{O}_0 m}.$$

Шаг №5. Центр шара сдвигается на расстояние h в направлении, противоположном суммарному вектору $\vec{c}$. Полученная после сдвига точка является центром шара для следующей итерации.

Шаги 2-5 повторяются до сих пор, пока либо радиус увеличивается (не уменьшается), либо длина суммарного вектора не равна нулю.

Для простоты на рисунке 2.2. представлена иллюстрация алгоритма в случае двумерного множества.

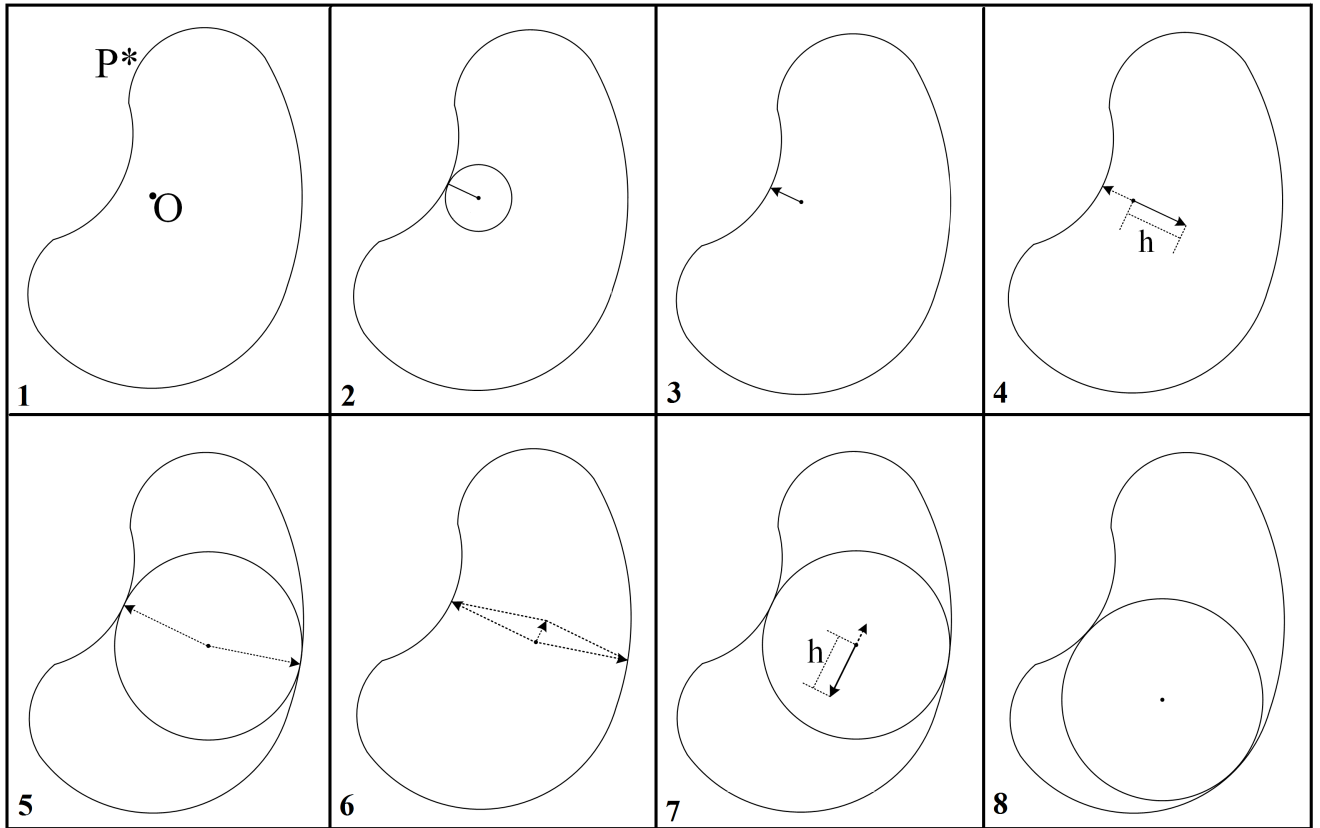


Рисунок 2.2 – Иллюстрация алгоритма УОШ

Алгоритм ПМОШ (Покрытия Множества Одним Шаром)

Данный алгоритм используется для нахождения минимального шара, покрывающего заданное множество. Суть алгоритма заключается в перемещении центра шара в направлении, уменьшения расстояния от центра до вершин множества.

Пусть задано замкнутое трехмерное множество P^* , необходимо найти покрывающий шар $\bar{S}$ с центром $\bar{O}$ и минимальным радиусом $\bar{R}$.

Алгоритм Покрытия Множества Одним Шаром включает следующие шаги:

Шаг №1. Методом случайной генерации задается начальный центр $\bar{O}_0$.

Шаг №2. Вычисляется минимальный возможный радиус $\bar{R}_0$ по формуле

$$\bar{R}_0 = \max \rho(\bar{O}_0, \partial P^*).$$

Шаг №3. Определяется множество точек касания

$$\bar{M} = \{m \mid \rho(\bar{O}_0, m) = \bar{R}_0, m \in \partial P^*\}.$$

Шаг №4. Строятся векторы, началом которых является точка $\overline{O_0}$, и концы – точки из множества точек касания $\overline{M}$. Вычисляется суммарный вектор:

$$\vec{c} = \sum_{m \in \overline{M}} \overrightarrow{O_0 m}.$$

Шаг №5. Центр шара сдвигается на расстояние h в направлении суммарного вектора $\vec{c}$. Полученная точка является центром шара для следующей итерации.

Шаги 2-5 повторяются до тех пор, пока радиус уменьшается или длина суммарного вектора не станет равна нулю. Иллюстрация работы алгоритма представлена на рисунке 2.3.

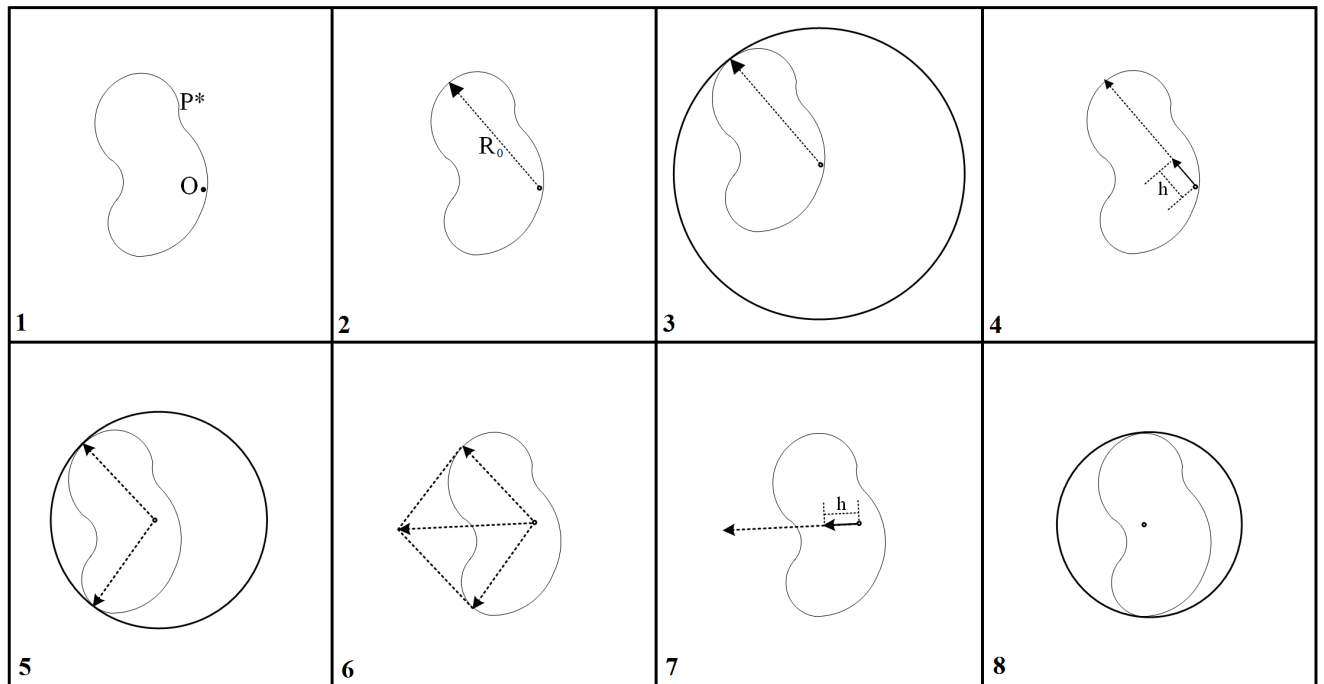


Рисунок 2.3 – Иллюстрация алгоритма ПМОШ

Алгоритм ПШОН (Перемещение Шаров по Определенному Направлению)

Данный алгоритм используется для перемещения шаров внутри заданного множества, причём после каждого шага сдвига радиус шаров не уменьшается. Пусть задано множество P^* и n шаров $\overline{S_i}(\overline{O_i}, \overline{R_i}), i=1...n$, причём значение радиуса определяется из решения задачи:

$$\overline{R_i} = \min \{ \rho(\overline{O_k}, \partial P^*), \rho(\overline{O_i}, \overline{O_j}) - \overline{R_j} \}, \quad k=1...n, \quad i, j=1...n, i \neq j \quad (2.32)$$

Из вида задачи (2.32) нетрудно заметить, что всегда существует хотя бы один шар, который касается либо с границей множества P^* , либо с другими шарами. Если нам удастся отодвинуть этот шар от точки касания, то в результате значение радиуса увеличивается. Этот процесс повторяется до тех пор, пока радиус шаров увеличивается (не уменьшается).

Алгоритм перемещения центров шаров имеет следующие шаги:

Шаг №1. Выделяется множество шаров S^* , имеющих непустое множество точек касания

$$S^* = \{\overline{S}_i \mid \overline{M}_i \neq \emptyset, i = 1 \dots n\},$$

где $\overline{M}_i$ - множество точек касания i -го шара, определяющееся по формуле:

$$\overline{M}_i = \{p : p \in \partial \overline{S}_i, p \in \partial P^*\} \cup \{p : p \in \partial \overline{S}_i, p \in \partial \overline{S}_j\}, \forall i, j = 1 \dots n, i \neq j. \quad (2.33)$$

Шаг №2. Для каждого шара $\overline{S}_i$ из множества S^* строятся векторы с началом в точке $\overline{O}_i$ и концами в точках $m \in \overline{M}_i$. Определяется суммарный вектор

$$\vec{c}_i = \sum_{m \in \overline{M}_i} \overrightarrow{\overline{O}_i m}.$$

Шаг №3. Осуществляется сдвиг центра $\overline{O}_i$ на расстояние h , направление сдвига противоположно вектору $\vec{c}_i$. Полученная после сдвига точка полагается новым временным центром шара $\overline{S}_i$.

Шаг №4. Вычисляется радиус шара $\overline{R}_i^*$ по формуле (2.29). Если $\overline{R}_i^* < \overline{R}_i$, то переходим к шагу 2 с множеством $\overline{S}^* = S^* \setminus \overline{S}_i$; если $\overline{R}_i^* \geq \overline{R}_i$, то находим множество $\overline{M}_i$ по формуле (2.33) и переходим к шагу 1.

Шаги 1–4 повторяются до тех пор, пока $\overline{S}^* \neq \emptyset$. Данный алгоритм гарантирует, что радиус шаров не уменьшается после каждой итерации.

Алгоритм ПШСН (Перемещение Шаров по Случайному Направлению)

Данный алгоритм предназначен для перемещения шаров по произвольному направлению с неизменными радиусами. В равномерной сетке вокруг каждой

точки, кроме точек на границе множества P , находятся 26 соседних. Центр шара имеет возможность переместиться произвольно в одну из них.

Пусть задано замкнутое множество P^* и n шаров $\overline{S}_i(\overline{O}_i, \overline{R}_i), i = 1 \dots n$, алгоритм перемещения шаров имеет следующий вид:

Шаг №1. Задается максимальное количество итераций, значение счетчика количества итераций полагается равным 1.

Шаг №2. Определяется множество S^* из шаров, имеющих непустое множество точек касания

$$S^* = \{\overline{S}_i \mid \overline{M}_i \neq \emptyset, i = 1, n\},$$

где $\overline{M}_i$ - множество точек касания, определяющееся по формуле (2.33).

Шаг №3. Для каждого i -го шара $\overline{S}_i$ из множества S^* выделяется множество C из 26 соседних точек центра $\overline{O}_i$. Осуществляется перемещение центра $\overline{O}_i$ в одну произвольную точку $c_i \in C$, выбранную случайным образом, и получается временный центр $\overline{O}'_i$.

Шаг №4. Определяется величина:

$$d_{\min} = \min\{\rho(\overline{O}'_i, \partial P^*), \rho(\overline{O}'_i, \overline{O}_j) - \overline{R}_j\}, \quad i, j = 1 \dots n, i \neq j.$$

- если $d_{\min} \geq \overline{R}_i$, то временный центр $\overline{O}'_i$ сохраняется в качестве нового центра текущего шара $\overline{S}_i$ и переходим к шагу 3 с множеством $\overline{S}^* = S^* \setminus \overline{S}_i$;

- если $d_{\min} < \overline{R}_i$, то осуществляется переход к шагу 3 с множеством $\overline{C} = C \setminus c_i$. Если $\overline{C} = \emptyset$, т.е. все 26 соседних точек были рассмотрены, то переходим к шагу 3 с множеством $\overline{S}^* = S^* \setminus \overline{S}_i$. Исходный центр сохраняется.

Шаги 3–4 повторяются, пока $\overline{S}^* \neq \emptyset$.

Шаг №5. Вычисляется радиус шара $\overline{R}_i^*$ по формуле (2.32):

- если $\overline{R}_i^* \geq \overline{R}_i$, то значение $\overline{R}_i^*$ и координаты всех шаров сохраняются в качестве приближения решения задачи. Осуществляется переход к шагу 2;

- если $\overline{R_i^*} < \overline{R_i}$, то значение счётчика количества итерации увеличивается на единицу. Если это значение счётчика достигло заданной величины, то работа алгоритма завершается, иначе переходим к шагу 2.

Этот алгоритм позволяет избежать ситуации, когда суммарный вектор равен нулю (в алгоритме **ПШОН**), и, следовательно, шары сдвинуть невозможно, но результат далек от оптимального. Совместное применение обоих бильярдных алгоритмов позволяет повысить эффективность работы основного алгоритма.

2.2.2 Упаковка равных шаров в выпуклое множество

В данном разделе представлен алгоритм решения задачи упаковки n равных шаров в замкнутое выпуклое трехмерное множество, который состоит из следующих этапов: сначала начальное положение центров шаров генерируется случайным образом. Затем заданное множество P разбивается на зоны Дирихле относительно полученного начального положения центров шаров. Для каждой области Дирихле выполняется алгоритм упаковки одного шара, и находится центр шара с максимальным радиусом. Процесс повторяется с новым набором центров.

Алгоритм УРШВМ (Упаковка Равных Шаров в Выпуклое Множество)

Шаг №1. Задается максимальное количество генераций случайных положений. Значение счетчика количества генерации положений $NumIter=1$.

Шаг №2. Методом случайной генерации положений задаётся первые начальные координаты центров $O_i, i=1...n$, при этом совпадения координат не допускаются.

Шаг №3. Производится разбиение заданного множества P на n подмножеств $P_i, i=1...n$ по алгоритму **РТМП**.

Шаг №4. Для каждого подмножества $P_i, i=1...n$ с помощью алгоритма **УОШ** определяется вписанный шар с максимальным радиусом R_i и центром $O_i, i=1...n$.

Шаг №5. Определяется минимальное значение радиуса R среди всех шаров, и это значение сохраняется в качестве приблизительного результата:

$$R = \min_{i=1,n} R_i.$$

Шаги 3-5 повторяются до тех пор, пока значение радиуса R увеличивается (не уменьшается). Значение радиуса и расположение шаров текущей итерации сохраняются в качестве приближения к оптимальному решению, если значение текущего радиуса R больше максимального значения найденных предыдущих итераций.

Шаг №6. Значение счетчика количества генерации случайных положений *NumIter* увеличивается на единицу. Если значение счетчика *NumIter* достигло заданной величины, то работа алгоритма заканчивается. В противном случае осуществляется переход к Шагу №2.

2.2.3 Упаковка равных шаров в невыпуклое множество

В данном разделе опишем алгоритм построения оптимальной упаковки равных шаров в замкнутое невыпуклое либо неодносвязное множество. Алгоритм определения радиуса здесь, как и в предыдущем разделе, основан на оптико-геометрической аналогии, а способ перемещения центров шаров базируется на принципах бильярдного моделирования.

Пусть известны координаты центров всех шаров $O_i, i=1...n$. Тогда максимальный радиус, при котором шары не будут пересекаться, определяется из решения задачи

$$R_0 = \min \left\{ \rho(O_k, \partial P), \frac{\rho(O_i, O_j)}{2} \right\}, k = 1 \dots n, i = 1 \dots (n-1), j = (i+1) \dots n. \quad (2.34)$$

После того, как радиус R_0 найден, можно для каждого шара определить множество точек касания и с помощью бильярдных алгоритмов, описанных в разделе 2.2.1, попытаться раздвинуть касающиеся шары.

Алгоритм УРШНМ (Упаковка Равных Шаров В Невыпуклое Множество)

Шаг №1. Задается максимальное количество генерации начальных положений. Значение счетчика количества случайных генераций $NumIter=1$.

Шаг №2. Методом случайной генерации задаются начальные координаты центров шаров $O_i, i = 1 \dots n$. Определяется максимальный возможный радиус R_0 из решения задачи (2.34).

Шаг №3. Для каждого i -го шара определяется множество точек касания:

$$M_i = \{m \mid \rho(O_i, m) = R_0, m \in \partial P\} \cup \{m \mid m \in \partial S_i, m \in \partial S_j\},$$

где $i = 1 \dots n, j = 1 \dots n, i \neq j$.

Шаг №4. Выполняется алгоритм ПШОН.

Шаг №5. Выполняется алгоритм ПШСН.

Шаги 3-5 повторяются до сих пор, пока радиус шаров увеличивается (не уменьшается). Радиус и координаты шаров сохраняются.

Шаг №6. Значение счетчика $NumIter$ увеличивается на единицу. Если значение $NumIter$ достигло заданной величины, то работа алгоритма заканчивается, иначе осуществляется переход к Шагу 2.

2.2.4 Покрывание множества равными шарами

В данном разделе представлен численный метод решения задачи о покрытии трехмерного множества равными шарами. Суть алгоритма состоит в разбиении заданного множества P на n подмножеств, и покрытии каждого

подмножества минимальным шаром. Набор полученных центров является источником для разбиения множества следующей итерации.

Алгоритм ПТМРШ (Покрывие Трехмерного Множества Равными Шарами)

Шаг №1. Задается максимальное количество генерации начальных положений. Значение счетчика количества случайных генераций $NumIter=1$.

Шаг №2. Методом случайной генерации задаются начальные координаты центров шаров $O_i, i = 1...n$.

Шаг №3. Осуществляется разбиение множества P на n подмножеств $P_i, i = 1...n$ с помощью алгоритма РТМП.

Шаг №4. Для каждого подмножества $P_i, i = 1...n$ выполняется алгоритм ПМОШ для нахождения покрывающего шара минимального радиуса. В результате получаем n шаров $C_i(O_i, R_i), i = 1...n$.

Шаг №5. Поскольку все покрывающие шары должны иметь одинаковые радиусы, то выбирается $R = \max_{i=1...n} R_i$.

Шаги 3-5 повторяются до тех пор, пока значение радиуса R уменьшается (не увеличивается). Если значение текущего радиуса R меньше рекордного значения на предыдущих итерациях, то радиус и координаты всех центров текущей итерации сохраняются в качестве приближения к решению задачи.

Шаг №6. Значение счетчика $NumIter$ увеличивается на единицу. Если значение $NumIter$ достигло заданной величины, то работа алгоритма заканчивается, иначе осуществляется переход к Шагу 2.

2.2.5 Упаковка шаров двух типов

В данном разделе предлагается алгоритм построения оптимальной упаковки шаров двух различных типов. В его основе лежит алгоритм упаковки равных

шаров **УРШВМ** поскольку радиус шаров первого типа R_1 в α раз больше радиуса шаров второго типа, то скорость распространения световой волны из центров первого типа также необходимо увеличить в α раз. Иначе говоря, при разбиении множества на подмножества скорость распространения световых волн будет различна. На рисунке 2.4 показан процесс построения диаграммы Вороного для двух шаров с разными радиусами (для большей наглядности на плоскости). Можно видеть, что в данном случае границы зон не являются прямыми, а состоят из дуг окружностей; сами же зоны могут быть невыпуклыми и неодносвязными.

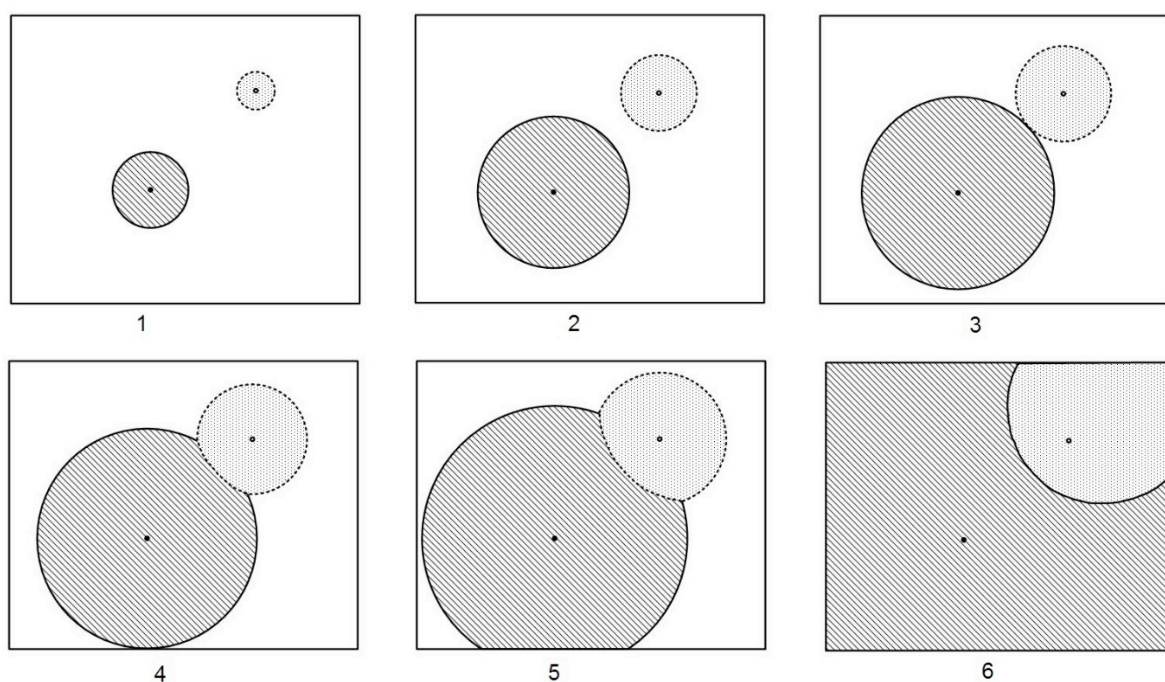


Рисунок 2.4 – Иллюстрация процесса разбиения замкнутого множества на подмножества

Алгоритм упаковки шаров двух типов состоит из двух этапов: сначала используется алгоритм **УРШВМ** с модифицированным процессом разбиения области на подмножества, потом применяется алгоритм бильярдного моделирования для уточнения полученных результатов.

Алгоритм УШДТ (Упаковка Шаров Двух различных Типов)

Шаг №1. Задается максимальное количество генерации случайных начальных положений. Значение счетчика количества генерации $TotalIter=1$.

Шаг №2. Методом случайной генерации положений задаются начальные координаты центров шаров. Они последовательно нумеруются: шары с номерами с 1 по m имеют радиус R_1 , а с $(m+1)$ по $(m+n)$ – радиус R_2 .

Этап 1

Шаг №3. Задается максимальное количество итерации. Число счетчика количества итерации $Iter=1$.

Шаг №4. Из всех центров выпускаются световые волны, причём скорость волны из центров шаров радиуса R_1 в α раз больше скорости волны из центров шаров радиуса R_2 .

Шаг №5. Осуществляется разбиения области P на $(m+n)$ подмножеств $P_i, i=1...(m+n)$ по алгоритму РТМП.

Шаг №6. Для каждого i -го подмножества P_i выполняется алгоритм УОШ находится вписанный шар максимального радиуса R_i с центром O_i .

Шаг №7. Радиус базового шара определяется как

$$R_1 = \min \{ R_i, \alpha R_j \mid i=1...m, j=(m+1)...(m+n) \}.$$

Шаг №8. Значение счетчика $Iter$ увеличивается на единицу. Если значение счетчика $Iter$ достигло максимального значения, то работа алгоритма заканчивается, в противном случае осуществляется переход к Шагу 4.

Этап 2

Шаг №9. Радиус базовых шаров вычисляется по формуле:

$$R_1 = \min \left\{ \rho(O_i, \partial P), \frac{\rho(O_i, O_j)}{2}, \alpha \rho(O_k, \partial P), \frac{\alpha \rho(O_l, \partial P)}{2}, \frac{\alpha \rho(O_i, O_k)}{1+\alpha} \right\},$$

где $i, j=1...m; k, l=(m+1)...(m+n); i \neq j, k \neq l$. В этой формуле O_i, O_j – центры шаров радиуса R_1 , O_k, O_l – центры шаров радиуса R_2 .

Для каждого i -го шара определяется множество точек касания:

$$M_i = \{ m \mid m \in \partial S_i, m \in \partial P \} \cup \{ m \mid m \in \partial S_i, m \in \partial S_j \},$$

где $\forall i, j=1...(m+n), i \neq j$.

Шаг №10. Выполняется алгоритм ПШОН.

Шаг №11. Выполняется алгоритм ПШСН.

Шаги 9-11 повторяются до сих пор, пока радиус базовых шаров увеличивается (не уменьшается). Радиусы и положение центров шаров, полученных на Шаге 11, сохраняются в качестве временных результатов.

Шаг №12. Значение счетчика *TotalIter* увеличивается на единицу. Если значение *TotalIter* достигает наперед заданной величины, то работа алгоритма завершается, в противном случае переходим к Шагу 2.

2.2.6 Упаковка шаров разных радиусов

В этом разделе представлен алгоритм для решения задачи упаковки разных шаров. При этом известно количество шаров и отношение между их радиусами. Метод решения данной задачи основан на применении бильярдного алгоритма, то есть все шары свободно двигаются внутри заданного множества и их радиусы постепенно увеличиваются. Шар с радиусом R_1 назовем базовым.

Алгоритм УШМТ (Упаковка Шаров Многих Типов)

Шаг №1. Задается максимальное количество генераций случайных положений. Значение счетчика количества генерации положений *NumIter*=1.

Шаг №2. Определяются начальные координаты центров шаров методом случайной генерации положений. Центры последовательно нумеруются.

Шаг №3. Вычисляется значение радиуса базового шара:

$$R_0 = \min \{ \beta^{i-1} \rho(O_i, \partial P), (\beta^{i-1} + \beta^{j-1}) \rho(O_i, O_j) \},$$

где $\forall i, j = 1 \dots n, i \neq j$.

Осуществляется построение шаров S_i с радиусом R_i , где $R_i = \frac{R_0}{\beta^{i-1}}, \forall i = 1 \dots n$. Для каждого i -го шара определяется множество точек касания:

$$M_i = \left\{ p \mid \rho(O_i, p) = \frac{R_0}{\beta^{i-1}}, p \in \partial P \right\} \cup \left\{ p \mid p \in \partial S_i, p \in \partial S_j \right\},$$

где $\forall i, j = 1 \dots n, i \neq j$.

Шаг №4. Выполняется алгоритм ПШОН.

Шаг №5. Выполняется алгоритм ПШСН.

Шаги 4-5 повторяются до тех пор, пока радиус базового шара после Шага 5 не уменьшается. В качестве результатов сохраняются радиус и положение центров предыдущей итерации.

Шаг №6. Число счетчика количества генерации случайных начальных положений *NumIter* увеличивается на единицу. Если значение *NumIter* достигло наперед заданной величины, то работа алгоритма завершается, в противном случае осуществляется переход к Шагу 2.

Выводы по главе 2

1. Во второй главе поставлены задачи размещения трехмерных физических объектов, область действия которых имеет форму шара. Предложена математическая формализация указанных постановок в виде задачи о тончайшем (минимальном) покрытии шарами замкнутого множества и двойственной ей задачи о плотнейшей (максимальной) упаковке шаров. Особенность математических моделей заключается во введении специальной неевклидовой метрики, позволяющей использовать в качестве меры удаленности точек время движения световой волны между ними.

2. Для отыскания решений предложенных математических моделей разработаны соответствующие численные алгоритмы на основе оптико-геометрического подхода и метода бильярдного моделирования. Отличием алгоритмов от известных подходов является возможность решения задач упаковки и покрытия в случае невыпуклого многосвязного множества в трехмерном пространстве с неевклидовой метрикой.

Глава 3 Описание программного комплекса «ТУШОЛ»

На основе математических моделей и алгоритмов, предложенных во второй главе, разработан программный комплекс «ТУШОЛ», предназначенный для решения задач упаковки шаров в трехмерное ограниченное множество. В разделе 3.1 приведем его описание, а в разделе 3.2 – результаты вычислительных экспериментов, которые позволяют оценить точность и работоспособность алгоритмов в различных случаях.

3.1 Описание программного комплекса

3.1.1 Общая характеристика

Программный комплекс «ТУШОЛ: Трехмерная упаковка шаров, оптимизация, логистика» зарегистрирован в Реестре программ для электронных вычислительных машин в 2020 г.

Он внедрён в учебный процесс кафедры «Автоматизированных систем» ФГБОУ ВО ИРНИТУ в учебных курсах «Системология». Копии Свидетельства о государственной регистрации программы для ЭВМ и Акта внедрения представлены в Приложении.

Для реализации программного комплекса были выбраны язык программирования C# и среда разработки Visual Studio 2012 по следующим причинам. Во-первых, данная работа является продолжением исследований задач упаковки кругов на плоскости, выполненных в работах А.Л. Казакова, А.А. Лемперт, Г.Л. Нгуена и К.М. Ле [24,25]. Во-вторых, для визуализации результатов упаковки в трехмерном пространстве существуют различные доступные библиотеки, написаны на языке C# и в среде Visual Studio. В-третьих, язык программирования C# является объектно-ориентированным, с помощью которого

в будущем программный комплекс можно легко развивать и добавлять новые возможности.

Программный комплекс «ТУШОЛ» состоит из следующих основных модулей:

1) Модуль «Среда» – позволяет задать размер среды, вычисляет значения оптической проницаемости среды по заданной функции.

2) Модуль «Волна» – для моделирования процесса распространения волны из заданной точки.

3) Модуль «Упаковка» – для решения задач упаковки как равных, так и различных шаров в трехмерное замкнутое множество.

4) Модуль «Параметры» – отображает и хранит настройки программного комплекса, задает замкнутое множество-контейнер, включая барьеры.

Кроме того, программный комплекс «ТУШОЛ» поддерживает возможность сохранения результатов решения в текстовом файле (.txt), загрузки результатов из файла и представления результатов в трехмерной системе координат с помощью компонента визуализации.

Общая архитектура программного комплекса «ТУШОЛ» представлена на рисунке 3.1.

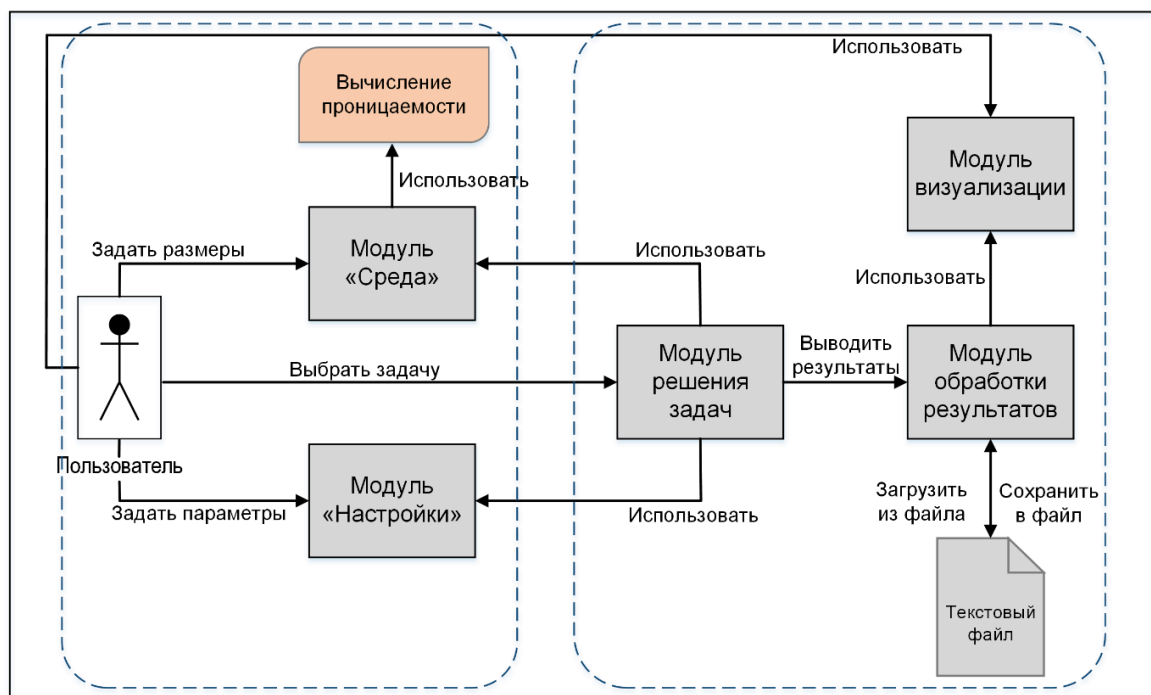


Рисунок 3.1 – Общая архитектура программного комплекса

Для работы с программным комплексом «ТУШОЛ» необходим персональный компьютер, на котором установлены операционная система «Microsoft Windows» версии XP/Vista/7/8/10 и библиотека «Net Framework» версии от 3.5. Программный комплекс «ТУШОЛ» имеет простой, удобный пользовательский интерфейс, который состоит из главного окна, содержащего четыре отдельные вкладки, и дополнительных окон для ввода необходимых параметров. Более подробное описание пользовательского интерфейса программного комплекса представлено в следующих разделах.

3.1.2 Модуль «Среда»

Модуль предназначен для задания характеристик исследуемой области и позволяет задать ее размеры и оптическую плотность в каждой точке. Интерфейс модуля реализован в виде вкладки «Среда» и представлен на рисунке 3.2.

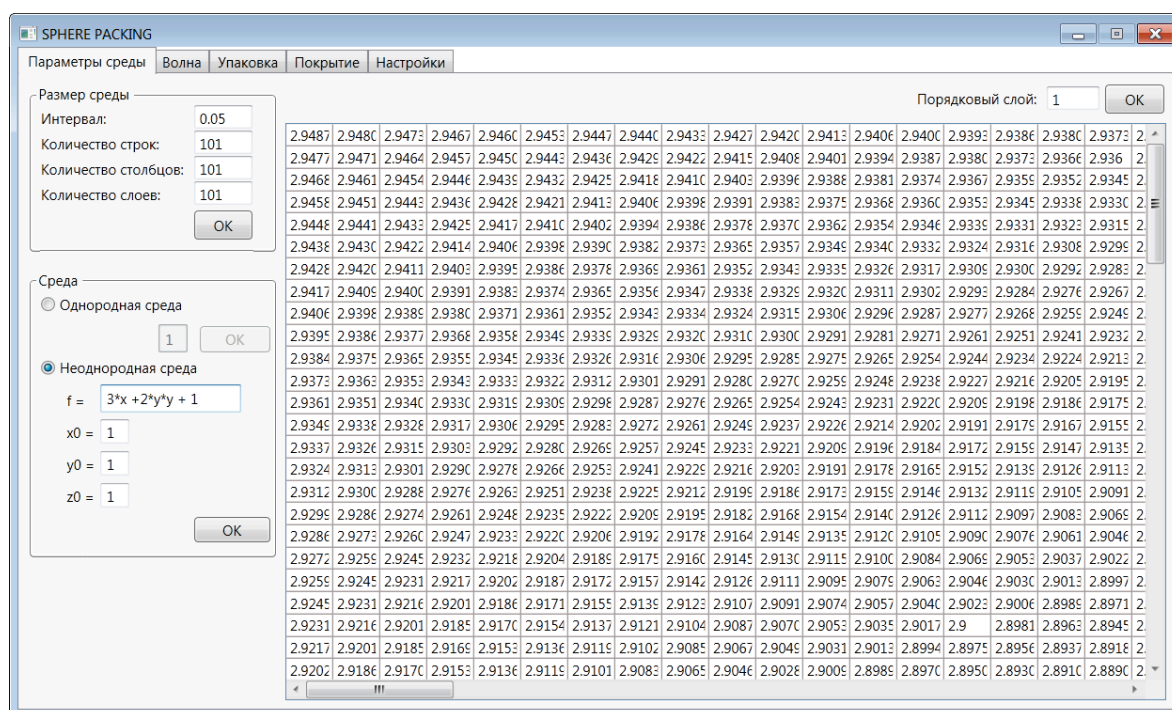


Рисунок 3.2 – Вкладка «Среда»

Размер области задается количеством строк, столбец и слоев. Расстояние между строками, столбцами и слоями определяется значением «интервал».

Правая часть окна отображает оптическую плотность каждого слоя в виде таблицы. Для перехода между слоями необходимо вводить порядковый номер слоя и нажимать кнопку «ОК» во правой верхней части окна.

Пользователь может выбрать тип среды: пункт «Однородная среда» соответствует заданию евклидовой метрики, а пункт «Неоднородная среда» – неевклидовой метрики. В случае неевклидовой метрики пользователь может задать оптическую плотность среды функцией $f(x, y, z)$. При нажатии кнопки «ОК» правая таблица заполняется значениями оптической плотности. Пользователь также имеет возможность вводить оптическую плотность вручную, непосредственно заполняя таблицы.

3.1.3 Модуль «Волна»

Данный модуль реализован в виде вкладки «Волна» и представлен на рисунке 3.3. Модуль позволяет реализовать процесс распространения световой волны, при этом используется заданная в модуле «Среда» оптическая плотность. Координаты источника и интенсивность волны задаются вручную. Для перехода между слоями необходимо ввести порядковый номер слоя и нажать кнопку «ОК» в правой верхней части окна.

При нажатии кнопки «Пуск» моделируется процесс распространения волны из заданного источника в соответствии с принципами Ферма и Гюйгенса. При построении световой волны в программном комплексе реализованы три алгоритма: однослойная аппроксимация (26 направлений), двуслойная аппроксимация (50 направлений), трехслойная аппроксимация (70 направлений). Выбор алгоритма производится во вкладке «Настройки». Необходимо отметить, что точность вычисления волновых фронтов тем выше, чем больше количество направлений.

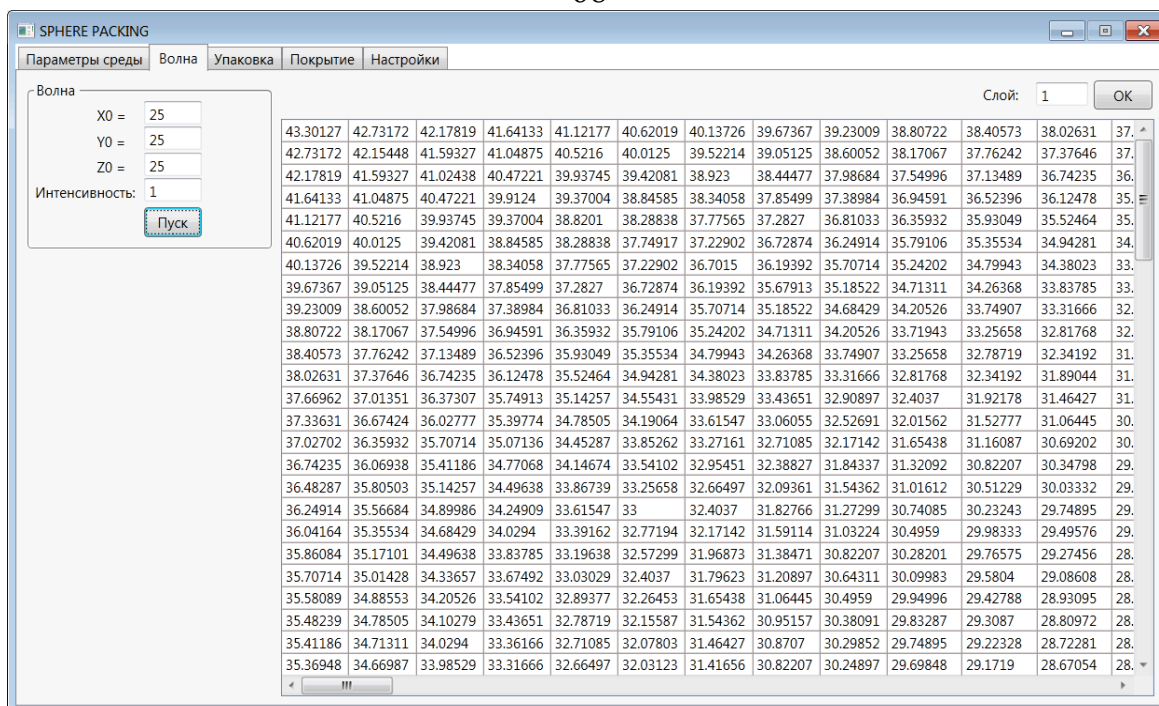


Рисунок 3.3 – Вкладка «Волна»

3.1.4 Модуль «Упаковка»

Интерфейс модуля представлен на рисунке 3.4 (вкладка «Упаковка»). Данный модуль позволяет решать различные задачи упаковки шаров в трехмерном пространстве как с евклидовой, так и с неевклидовой метрикой:

- Построение оптимальных упаковок равных шаров в выпуклое множество на основе алгоритма **УРШВМ** (см. раздел 2.2.2);
- Построение оптимальных упаковок равных шаров в невыпуклое или многосвязное множество на основе алгоритма **УРШНМ**, (см. раздел 2.2.3);
- Построение оптимальных упаковок шаров двух различных типов (алгоритм **УШДТ**, см. раздел 2.2.5);
- Построение оптимальных упаковок шаров разного радиуса (алгоритм **УШМТ**, см. раздел 2.2.6).

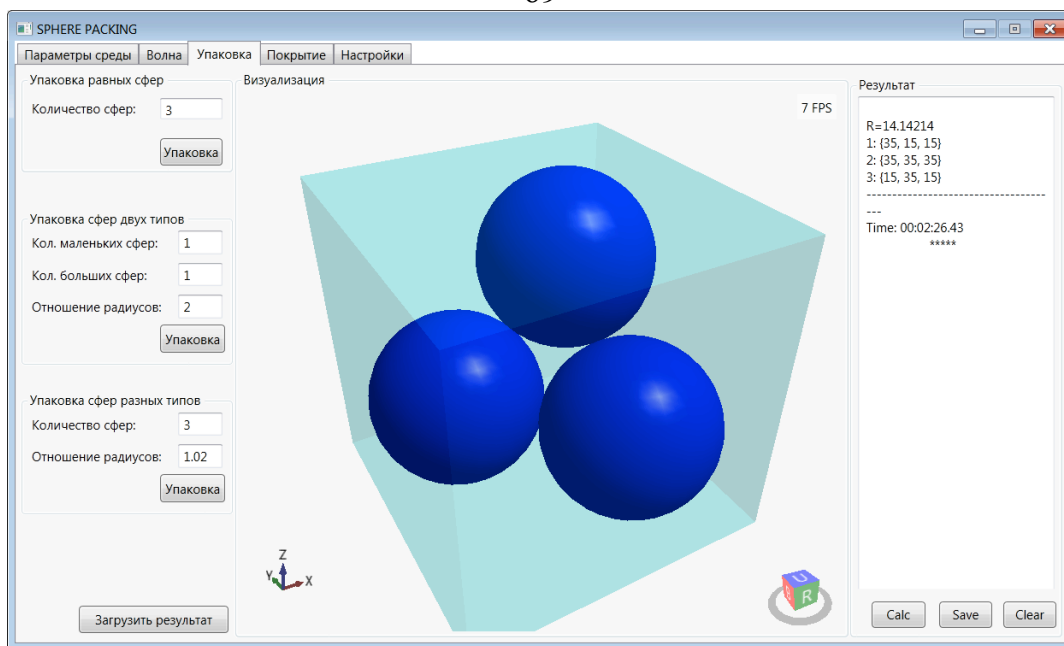


Рисунок 3.4 – Вкладка «Упаковка»

Интерфейс модуля разделен на три функциональные зоны: в левой части размещены компоненты для выбора типа задачи и ввода ее параметров, в правой части – компоненты для вывода и сохранения результатов вычислений, центральная часть предназначена для визуализации результатов расчетов.

Отметим, что для решения задач упаковки, сначала необходимо задать параметры среды (вкладка «Среда»), определить замкнутое множество, в том числе, барьеры (если присутствуют), выбрать метод решения (вкладка «Настройки»), ввести количество шаров, отношение между радиусами шаров. Для начала вычислений необходимо нажать на кнопку «Упаковка». Результаты выводятся как в текстовом, так и в графическом виде:

- Радиусы и координаты центра каждого шара выводятся в текстовом виде в правой части вкладки. Пользователь может сохранить результат текущего расчета в текстовом файле, нажимая кнопку «Save». В случае неевклидовой метрики, модуль позволяет вычислить и сохранить координаты всех точек, аппроксимирующих границу каждого шара, используя кнопку «Calc». При этом данные по каждому шару сохраняются в отдельном файле. Это позволяет использовать внешнее программное обеспечение для визуализации результатов расчетов (например, MatLab).

- Множество-контейнер, барьеры и шары отображаются в центральной зоне вкладки с помощью компонента визуализации. Изменить угла поворота объектов можно с помощью правой кнопки мыши. Изменить масштаб можно с помощью колеса мыши.

Кроме того, модуль позволяет загрузить результаты расчетов из файла и визуализировать их (кнопка «Загрузить результат»).

Для обеспечения работы модуля «Упаковка» реализованы следующие дополнительные алгоритмы:

- Случайная генерация начальных положений центров шаров в заданном множестве.
- Построение трехмерного разбиения Дирихле (трехмерной диаграммы Вороного).
- Перемещение шаров по принципу бильярдного моделирования.
- Вычисление координат точек, находящихся на поверхности шаров, и сохранение результатов в текстовых файлах.
- Визуализация трехмерных объектов.

3.1.5 Модуль «Настройки»

Данный модуль позволяет задавать настроечные параметры для повышения гибкости и удобства использования программного комплекса «ТУШОЛ». Интерфейс модуля представлен на рисунке 3.5.

Модуль включает в себе следующие группы параметров:

- Группа «Тип контейнера» определяет рассматриваемое замкнутое трехмерное множество. Программный комплекс позволяет решить ряд задач упаковки в трехмерное множество базовой формы: прямоугольный параллелепипед, сфера, сферический цилиндр, тетраэдр.

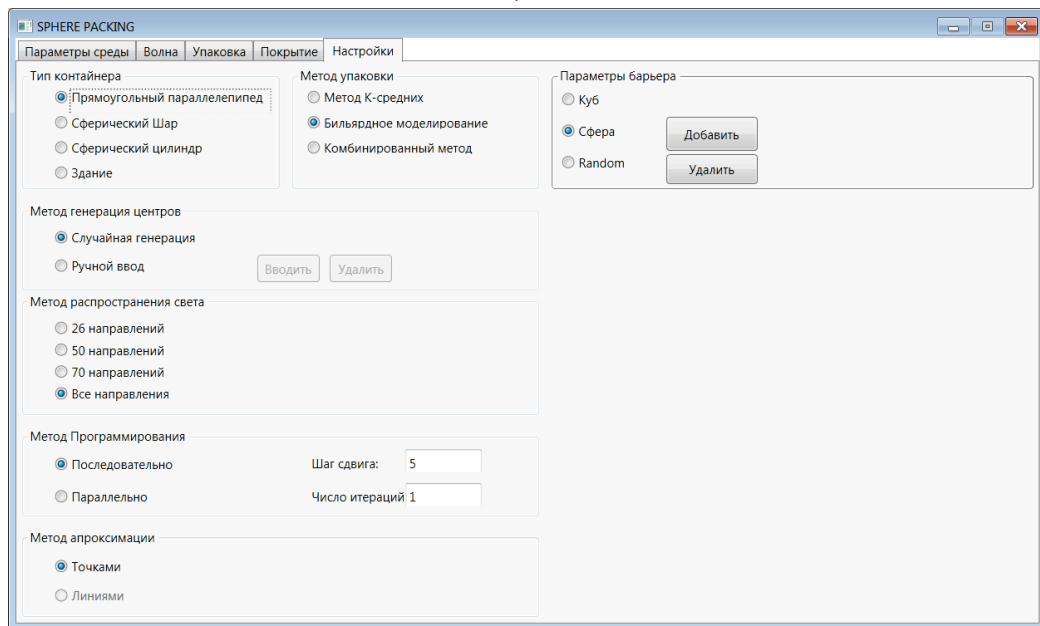


Рисунок 3.5 – Интерфейс модуля «Настройки»

- Группа «Метод упаковки» определяет используемый метод для решения выбранной задачи. В программном комплексе реализуются три метода: метод К-средних (основанный на методе сегментации множества на подмножества и упаковке одного шара в каждое подмножество), метод бильярдного моделирования (основанный на принципе перемещения шаров внутри множества и постепенного увеличения радиуса), комбинированный метод (сначала применяется метод К-средних, после пяти итерации применяется метод бильярдного моделирования для улучшения результатов).

- Группа «Метод генерация центров» выбирает способ определения начальных координат центров. При выборе пункта «Ручной ввод» пользователь может вводить свои значения, нажимая кнопку «Вводить». Интерфейс отдельного окна для ручного ввода координат центров представлен на рисунке 3.6. Пользователь может вводить координаты каждого центра последовательно (нажимая кнопку «Add»), или загрузить существующий файл с данными (нажимая кнопку «Из файла» и выбрать текстовый файл). Кнопка «Удалить» используется для удаления определенной точки из списка. Кнопка «Удал. все», соответственно, для удаления всех точек из списка. Кнопка «ОК» закрывает окно.

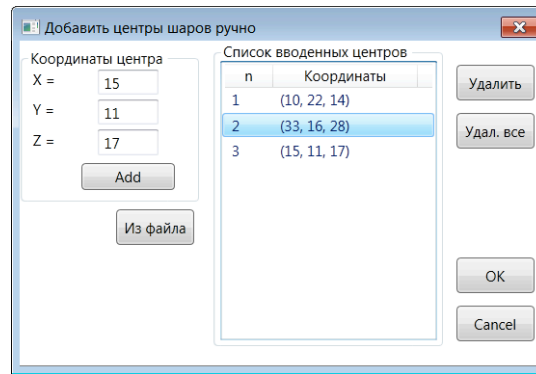


Рисунок 3.6 – Окно для ручного ввода координат центров

- Группа «Метод распространения света» определяет количество направлений при распространении световой волны в трехмерном пространстве. Большое количество направлений позволяет повысить точность вычислений, но требует существенно больше времени.

- Группа «Метод программирования» позволяет выбрать стратегию расчета. В случае применения метода «Последовательно» все процессы выполняются друг за другом. Например, при реализации процесса распространения световой волны из нескольких источников, программа обрабатывает последовательно по одному источнику. В случае применения метода «Параллельно», если процессы друг с другом не взаимодействуют, то они выполняются одновременно (процессы распространения световой волны выполняются одновременно из всех источников). При выборе метода «Параллельно» программа работает быстрее, но использует большинство ресурсов компьютера, следовательно, пользователю трудно работать с другими программами.

- Группа «Параметры барьера» позволяет задать многосвязное множество-контейнер. Программный комплекс позволяет задать несколько барьеров двух видов: сфер или прямоугольных параллелепипедов. При выборе тип барьера и нажатии на кнопку «Добавить» появляется новое окно для ввода параметров барьера (рисунок 3.7). Для барьера-параллелепипеда задаются координаты левого нижнего и правого высшего угла. Барьер-сфера задается с помощью координат центра и величины радиуса. Кнопка «Удалить» используется для удаления всех барьеров.

а)

б)

Рисунок 3.7 – Окна для ввода параметров барьера-параллелепипеда (а) и сферы (б)

3.2 Решение тестовых задач

В данном разделе рассматриваются некоторые примеры, позволяющие проверить точность предложенных алгоритмов и работоспособность созданного программного комплекса. Расчеты проведены с использованием ПК следующей конфигурации: Intel(R) Core(TM) i5-3570K (частота 3,4 ГГц, 8 Гб ОЗУ) и операционной системой Windows 7. Алгоритм реализован на языке программирования C# с помощью пакета Visual Studio 2012.

3.2.1. Упаковка равных шаров в выпуклое множество

Пример 1. В этом примере рассматривается задача упаковки равных шаров в единичный куб с использованием предложенного алгоритма **УРШВМ**. Производится сравнение полученных результатов с известными [104,163].

Результаты вычисления приведены в таблице 3.1. Здесь n – количество упакованных равных шаров, R_{known} – известные результаты из [104,163], R_{max} –

наилучшие радиусы, вычисленные по алгоритму **УРШВМ**, $\Delta R(\%) = \frac{R_{\max} - R_{\text{known}}}{R_{\text{known}}}$,

t_{executed} – время работы алгоритма **УРШВМ** в секундах.

Таблица 3.1 – Упаковка равных шаров в единичный куб с евклидовой метрикой

n	R_{known}	$R_{\max}$	$\Delta R(\%)$	$t_{\text{executed}}(s)$
2	0,31582	0,31699	0,369	98
3	0,28780	0,29289	1,73	112
4	0,28710	0,29289	1,97	138
5	0,25986	0,26393	1,54	152
6	0,25416	0,25736	1,24	193
7	0,24571	0,25014	1,77	243
8	0,24508	0,25000	1,97	321
9	0,22660	0,23205	2,35	392
10	0,20775	0,21429	3,05	497

Из таблицы 3.1 можно видеть, что по сравнению с известными результатами из [104,163], полученные автором результаты несколько хуже, но отклонение наилучшего полученного радиуса шаров от известного не больше 3,05%. Это отклонение зависит от значения шага равномерной сетки h . Отметим, что уменьшение шага равномерной сетки повышает точность вычислений, но при этом время работы алгоритма тоже возрастает. В этом примере и в дальнейшем автор использует шаг $h = 0,001$.

Пример 2. Рассматривается случай неевклидовой метрики с функцией $f(x, y, z) = x + y + 1$, замкнутое множество P является единичным кубом:

$$P = \{(x, y, z) \in R^3 : 0 \leq x, y, z \leq 1\}.$$

В этой метрике функция $f(x, y, z)$ является линейной, и фронт световой волны имеет форму сферы (как в евклидовом пространстве), но центры сферы смещены от начала координат. Результаты вычисления представлены в таблице

3.2. Здесь в дальнейшем плотность упаковки – это отношением суммарного объема шаров к объему контейнера.

Таблица 3.2 – Упаковка равных шаров в единичный куб с неевклидовой метрикой

n	$R_{\max}$	Плотность (%)	$t_{executed}(s)$
1	0,26219	51,30	47
2	0,16706	25,82	95
3	0,15416	24,47	124
4	0,14420	27,11	189
5	0,13400	31,57	247
6	0,12200	28,65	277
7	0,11395	26,59	318
8	0,11112	27,67	391
9	0,10615	29,04	498
10	0,09836	28,34	557

Отметим, что в этом примере радиусы меньше, чем в примере 1 для того же количества сфер. Причина в том, что скорость распространения волны в этой метрике больше, чем в евклидовой. На рисунке 3.8 шары выглядят различными, причем их радиус растет по мере удаления от начала координат, однако в заданной метрике все шары имеют одинаковый радиус.

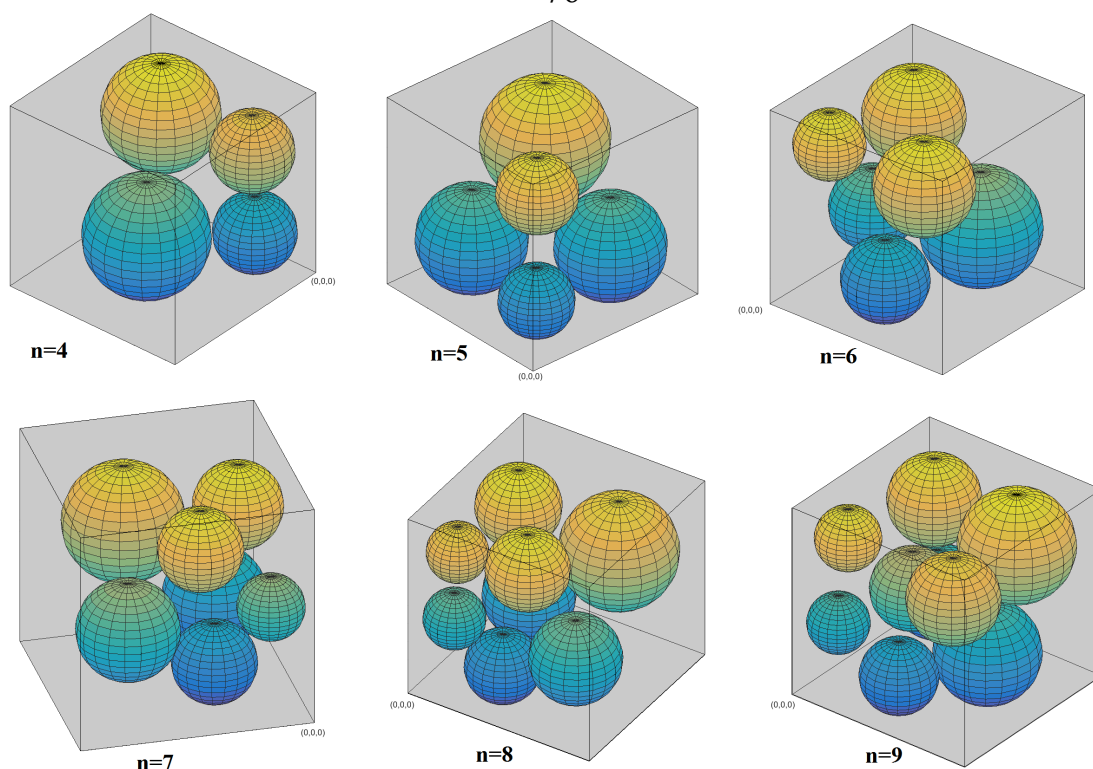


Рисунок 3.8 – Упаковка равных шаров в неевклидовой метрике

Пример 3. В этом примере рассматривается кубический контейнер, который описывается формулой: $P = \{(x, y, z) \in R^3 : 0 \leq x, y, z \leq 1\}$.

Пусть задана функция
$$f(x, y, z) = \frac{(x - 0,5)^2 + (y - 0,75)^2 + 4}{2(x - 0,5)^2 + 2(y - 0,75)^2 + 2}.$$

На рисунке 3.9 показано изображение функции $f(x, y, z)$ в области контейнера, максимум достигается в точке $[x = 0,5; y = 0,75]$. Иначе говоря, скорость распространения световой волны достигает максимума в точке $[x = 0,5; y = 0,75]$.

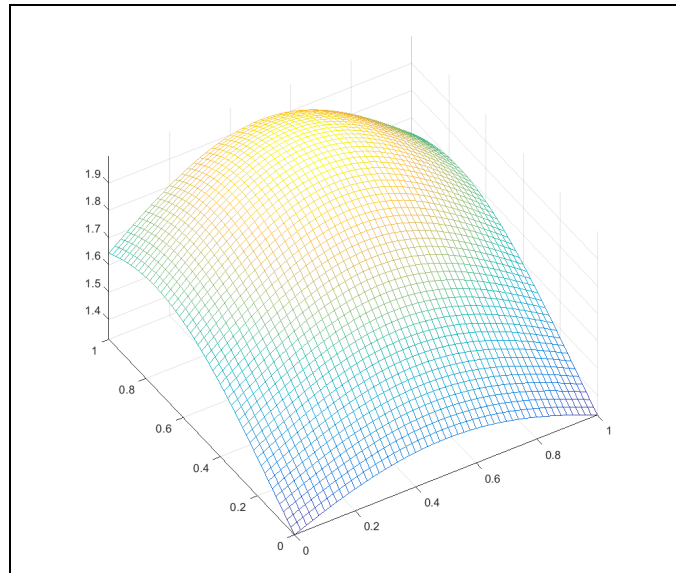


Рисунок 3.9 – Изображение функции $f(x, y, z)$

Результаты вычисления представляются в таблице 3.30 и на рисунке 3.10.

Таблица 3.3 – Результаты упаковки равных шаров в куб с неевклидовой метрикой

n	$R_{\max}$	Плотность (%)	$t_{\text{executed}}(s)$
2	0,15268	30,15	92
3	0,14006	34,04	115
4	0,13843	43,24	217
5	0,12521	40,11	311
6	0,12168	43,93	427
7	0,11851	47,30	497
8	0,11696	52,04	598
9	0,10302	40,82	712
10	0,09872	39,47	857
15	0,08968	44,17	1414
20	0,08407	48,23	2018
25	0,07827	48,89	2887

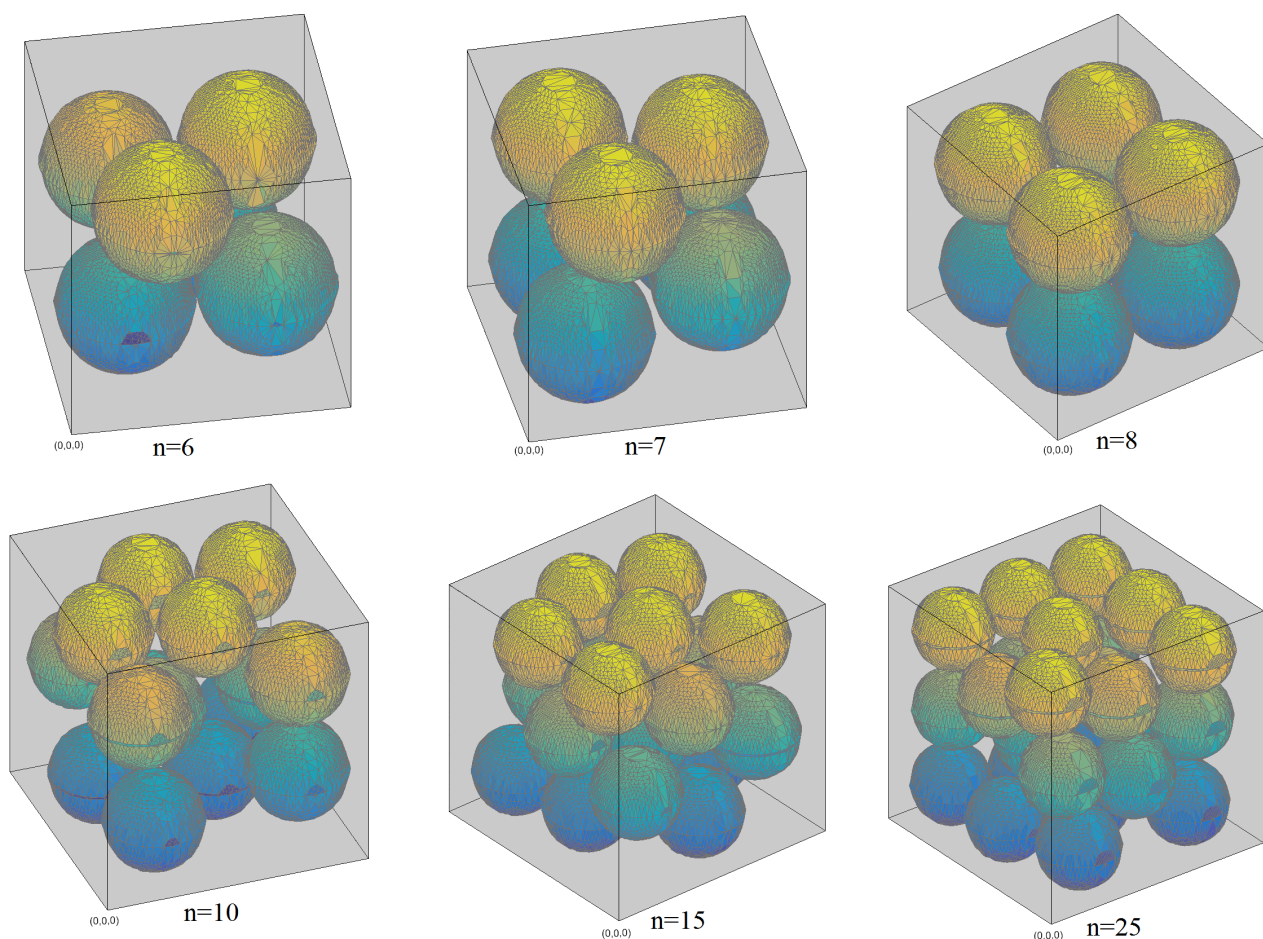


Рисунок 3.10 – Упаковки равных шаров в куб с неевклидовой метрикой

Из таблицы 3.3 видно, что плотность упаковки достигает максимума в случае $n=8$. Необходимо отметить, что в этом примере шары имеют одинаковый радиус, но выглядят больше, если их центры расположены ближе к точке $(x=0,5; y=0,75)$.

Пример 4. В данном примере рассмотрим неевклидовое пространство, в котором метрика порождается следующей функцией:

$$f(x, y, z) = \frac{2 + (x - 2,5)^2 + (y - 3,5)^2}{1 + (x - 2,5)^2 + (y - 3,5)^2}.$$

Множество P является половиной сферы и задается формулой:

$$P = \{(x, y, z) \in R^3 \mid (x - 2,5)^2 + (y - 2,5)^2 + z^2 \leq 2,5^2; 0 \leq x, y \leq 5; 0 \leq z \leq 2,5\}.$$

Результаты вычисления представлены в таблице 3.4 и изображены на рисунке 3.11.

Таблица 3.4 – Упаковка равных шаров в полусферу с неевклидовой метрикой

n	$R_{\max}$	Плотность(%)	$t_{executed}(s)$
2	0,41006	29,64	45
3	0,37160	34,97	67
4	0,33823	37,70	87
5	0,31845	37,59	118
6	0,30608	41,70	249
7	0,28517	39,89	447
8	0,27773	40,56	738
9	0,26778	40,12	962
10	0,25517	38,41	1277
15	0,22644	41,52	1918
20	0,20761	42,58	2935

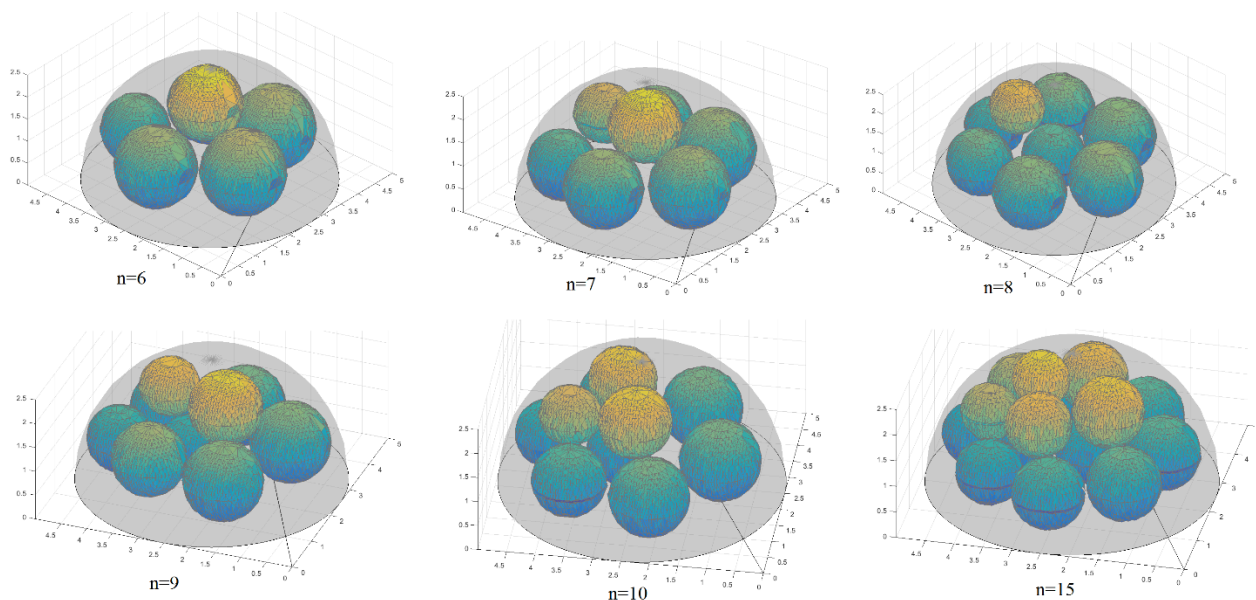


Рисунок 3.11 – Упаковки равных шаров в полусферу с неевклидовой метрикой

Отметим, что в этом случае фронты световой волны заранее неизвестны, и шары не имеют сферическую форму. На основе анализа плотности можно сделать вывод, что с помощью разработанного алгоритма удастся построить хорошие упаковки (упаковка считается приемлемой, если плотность составляет более

35%). Кроме того, с ростом числа шаров плотность имеет тенденцию к росту, что также свидетельствует о корректной работе алгоритма.

3.2.2. Упаковка равных шаров в невыпуклое множество

Пример 5. Для проверки точности и работоспособности алгоритма **УРШНМ** проведем решение задачи упаковки равных шаров в единичный шар и выполним сравнение полученных результатов с известными из [153].

Вычисляемые результаты при использовании алгоритма **УРШНМ** представлены в таблице 3.5, здесь R_{known} – известный радиус из работы [153].

Таблица 3.5 – Упаковка равных шаров в единичную сферу с евклидовой метрикой

n	R_{known}	R_{max}	$\Delta R (\%)$	$t_{executed} (s)$
2	0,25000	0,25000	0	134
3	0,46410	0,46394	0,035	227
4	0,44948	0,44922	0,060	304
5	0,41421	0,41354	0,162	524
6	0,41421	0,41348	0,184	688
7	0,38591	0,38439	0,394	857
8	0,37802	0,37651	0,400	984
9	0,36603	0,36455	0,403	1378
10	0,35305	0,35157	0,419	1712
15	0,31830	0,31482	1,094	2487
20	0,28789	0,28458	1,149	3515

Из таблицы 3.5 можно видеть, что при сравнении с известными результатами из [153], отклонение вычисляемых результатов не превосходит 1,15%. То есть алгоритм **УРШНМ** оказывается более точным по сравнению с

алгоритмом **УРШВМ** (пример 1). Однако время работы алгоритма **УРШНМ** быстро возрастает с увеличением количества шаров.

Пример 6. В этом примере решается задача упаковки равных шаров в невыпуклое множество с евклидовой метрикой. Множество P является единичным шаром без положительного сектора и задается следующим образом:

$$P = \text{cl}(D \setminus B),$$

где $D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$, $B = \{(x, y, z) \in R^3 : 0 < x, y, z \leq 1\}$ и cl – оператор замыкания.

Результаты вычисления представляются в таблице 3.6.

Таблица 3.6 – Упаковка равных шаров в единичный шар без сектора

n	$R_{\max}$	Плотность (%)	$t_{\text{executed}}(s)$
1	0,49998	16,6647	226
2	0,47778	29,0839	464
3	0,41526	28,6431	627
4	0,41428	37,9210	1558
5	0,41209	46,6536	1342
6	0,37776	43,1259	1728
7	0,35556	41,9542	2575
8	0,35157	46,3508	2902
9	0,33778	46,2502	3509
10	0,32064	43,9533	4102
15	0,27857	43,2338	5873
20	0,24754	40,4487	7742

Результаты вычисления показываются на рисунке 3.12 при числе шаров $n = 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Максимальная плотность упаковки получается при числе шаров $n = 5$.

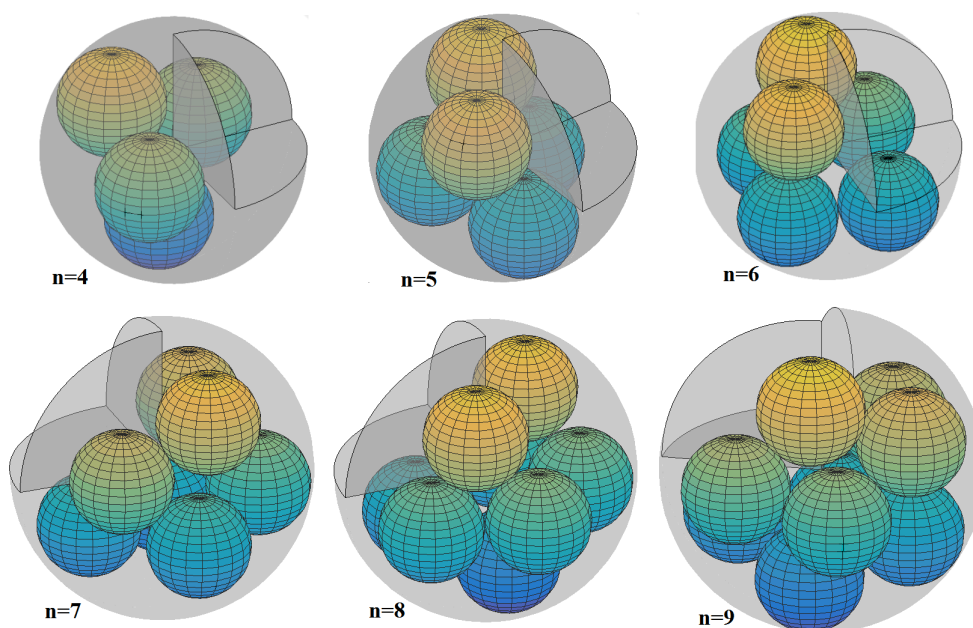


Рисунок 3.12 – Результаты упаковки равных шаров в невыпуклое множество

Пример 7. Рассмотрим случай, когда заданное множество P является неодносвязным. Для тестирования автор выбрал кубический контейнер с 3 произвольными барьерами и евклидовую метрику. Изображение контейнера представлен на рисунке 3.13, а некоторые результаты отображены на рисунке 3.14.

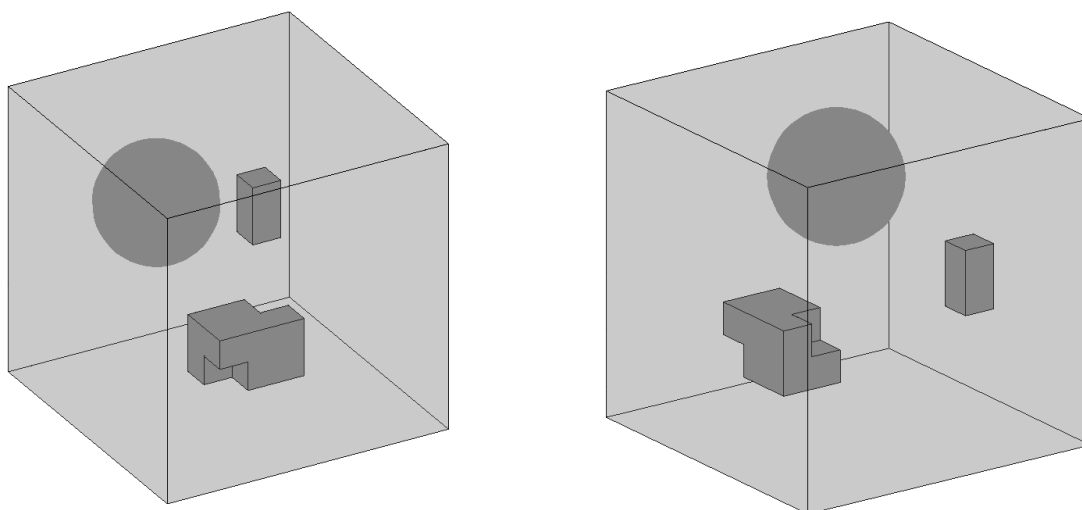


Рисунок 3.13 – Контейнер с барьерами

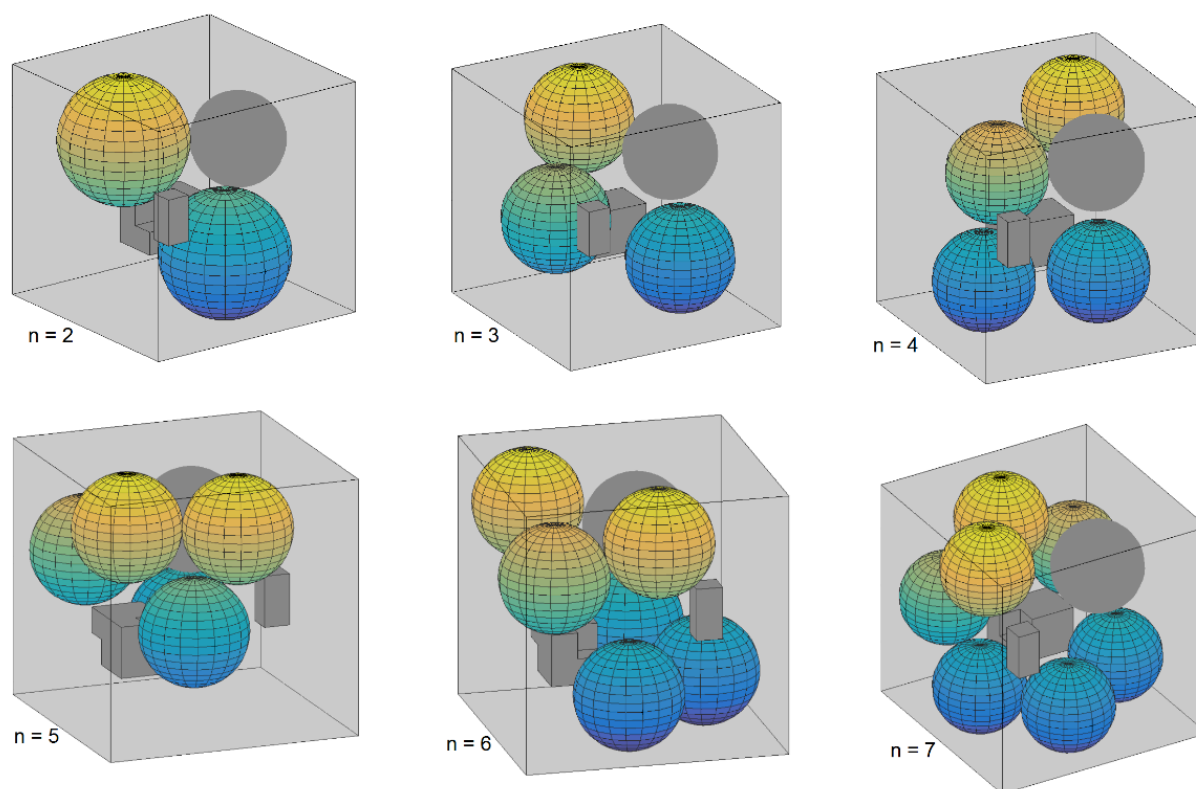


Рисунок 3.14 – Упаковка равных шаров в неодносвязное множество

Результаты расчетов показали, что алгоритм **УРШНМ** позволяет найти хорошие упаковки, даже в случае неодносвязного множества. Однако при увеличении количества шаров и при сложных контейнерах время вычисления быстро возрастает.

3.2.3. Покрытие множества равными шарами

Пример 8. В этом примере рассмотрим эффективность алгоритма **ПТМРШ** для решения задачи покрытия в трехмерном пространстве равными шарами.

Пусть задан единичный кубический контейнер и наперед задано количество равных шаров. Необходимо найти минимальный радиус шаров и их расположение, чтобы они полностью покрывали рассмотренный куб. Результаты вычислений при использовании алгоритма **ПТМРШ** представлены в таблице 3.7 и на рисунке 3.15.

Таблица 3.7 – Результаты оптимальных покрытий куба равными шарами

n	$R_{\min}$	$t_{executed}(s)$
2	0,7513	152
3	0,7125	187
4	0,6160	225
5	0,5898	288
6	0,5438	375
7	0,5212	411
8	0,4409	518
9	0,4243	703
10	0,4191	827
15	0,3643	1478
20	0,3475	2687

Результаты вычислений показывают, что с увеличением количества размер шаров уменьшается, однако не так быстро, как в задаче упаковки равных шаров. Время работы алгоритма **ПТМРШ** тоже большое, в сравнении с временем работы алгоритма **УРШВМ** при одинаковом количестве шаров.

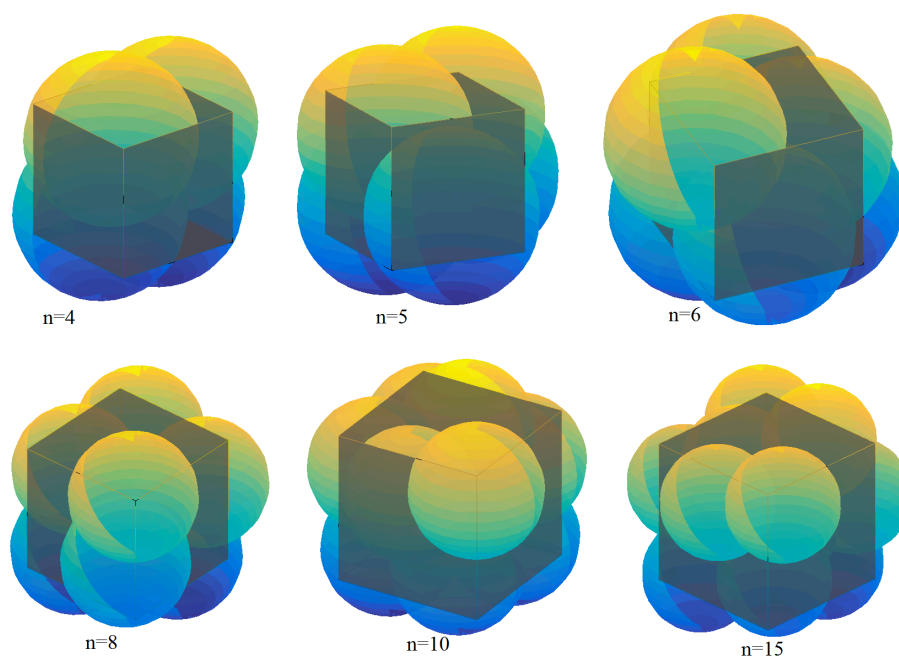


Рисунок 3.15 – Покрытие куба равными шарами

3.2.4. Упаковка шаров двух типов

Пример 9. Рассматривается задача упаковки шаров двух различных типов в невыпуклое множество с евклидовой метрикой. Невыпуклое множество P задается формулой $P = \text{cl}(D \setminus B)$, где $D = \{(x, y, z) : x + y + z \leq 2, 0 \leq x, y, z \leq 1\}$ и $B = \{(x, y, z) \in R^3 : 0 < x, y, z \leq 1\}$. Визуализация множества P представлена на рисунке 3.16.

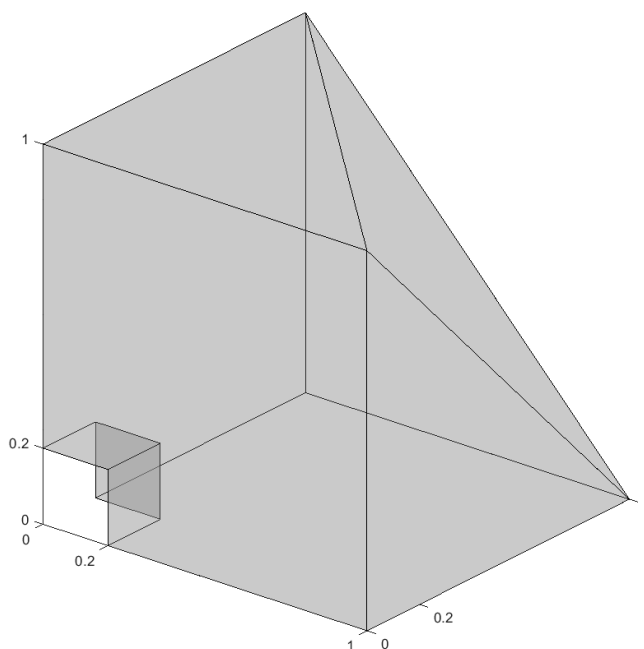


Рисунок 3.16 – Невыпуклое множество P

Пусть известны количество шаров первого типа $m = 2$ и второго типа $n = 5$. Необходимо найти отношение радиусов $\alpha = \frac{R_1}{R_2}$, чтобы плотность упаковки достигала максимума. Для вычислений используется алгоритм УШДТ при изменении отношения α от 0,5 по 2, полученный результат представлен в таблице 3.8

Таблица 3.8 – Упаковка шаров двух типов в невыпуклое множество

α	R_1	R_2	Плотность (%)
0,5	0,1210	0,2420	37,76
0,74	0,1791	0,2420	41,79
0,90	0,2061	0,2291	39,36
0,95	0,2175	0,2290	40,92
0,98	0,2224	0,2269	40,86
1,00	0,2256	0,2256	40,79
1,02	0,2287	0,2242	40,74
1,05	0,2331	0,2220	40,63
1,10	0,2398	0,2183	40,29
1,20	0,2496	0,2084	38,62
1,50	0,2838	0,1892	40,39
1,70	0,2992	0,1760	41,02
2,00	0,2992	0,1496	35,68

Из таблицы 3.8 можно видеть, что плотность упаковки достигает максимальной величины при значении $\alpha = 0,74$, тогда радиус шаров второго типа тоже достигает максимального значения.

Если $\alpha < 0,74$, то R_2 остается неизменным и равен максимальному значению, R_1 увеличивается с увеличением значения α .

Если $\alpha > 0,74$, то R_2 начинает уменьшаться, R_1 увеличивается и достигает максимальной величины при $k = 1,7$.

При $\alpha > 1,7$, R_1 остается неизменным, R_2 продолжает уменьшаться.

Результаты упаковки при различных значениях α представляются на рисунке 3.17.

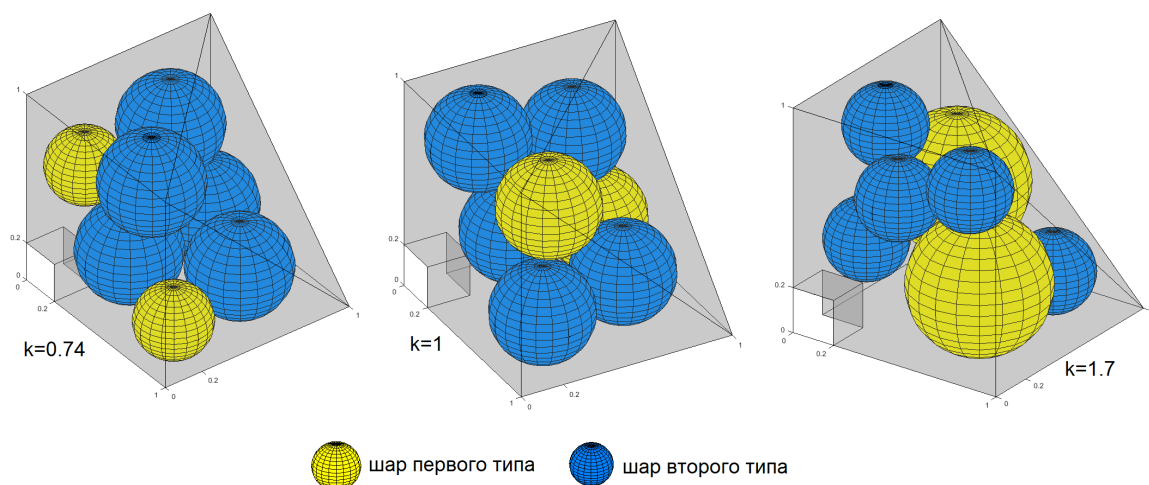


Рисунок 3.17 – Упаковка шаров двух типов в невыпуклое множество

Пример 10. В этом примере рассматривается задача упаковки шаров двух различных типов в цилиндр при неевклидовой метрике. Пусть функция имеет следующий вид: $f(x, y, z) = \frac{1}{1 + (x - 0,5)^2}$. Изображение данной функции представлено на рисунке 3.18.

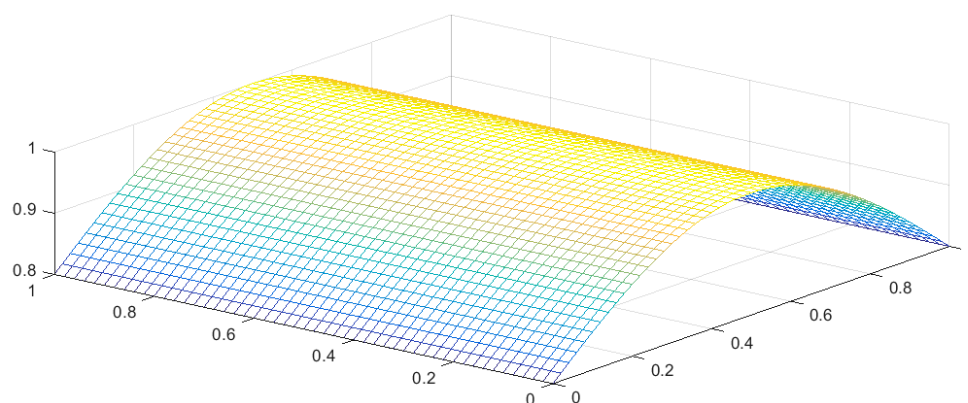


Рисунок 3.18 – Изображение функции

Замкнутое множество P является цилиндром:

$$P = \{(x, y, z) \in R^3 \mid (x - 0,5)^2 + (y - 0,5)^2 \leq 0,5^2; 0 \leq x, y, z \leq 1\}.$$

Результаты вычислений при различных коэффициентах α представлены в таблице 3.9.

Таблица 3.9 – Упаковка шаров двух типов в цилиндр при неевклидовой метрике

		$\alpha = 1,2$		$\alpha = 1,5$		$\alpha = 2$	
m	n	R_1	$D(\%)$	R_1	$D(\%)$	R_1	$D(\%)$
1	6	0,27649	42,05	0,32285	43,77	0,36870	42,33
	7	0,26828	42,91	0,32079	43,28	0,36539	39,67
	8	0,25994	41,17	0,30992	44,05	0,36314	44,92
	9	0,24675	43,31	0,29898	44,40	0,36078	46,55
	10	0,24378	43,73	0,29331	44,30	0,36073	46,08
2	6	0,23832	42,91	0,28684	44,69	0,35046	36,39
	7	0,26130	42,38	0,29013	45,64	0,31289	41,68
	8	0,25222	42,68	0,28855	42,23	0,31137	42,84
	9	0,24546	43,32	0,28540	41,41	0,31072	39,21
	10	0,23748	42,96	0,27172	44,93	0,30944	41,46

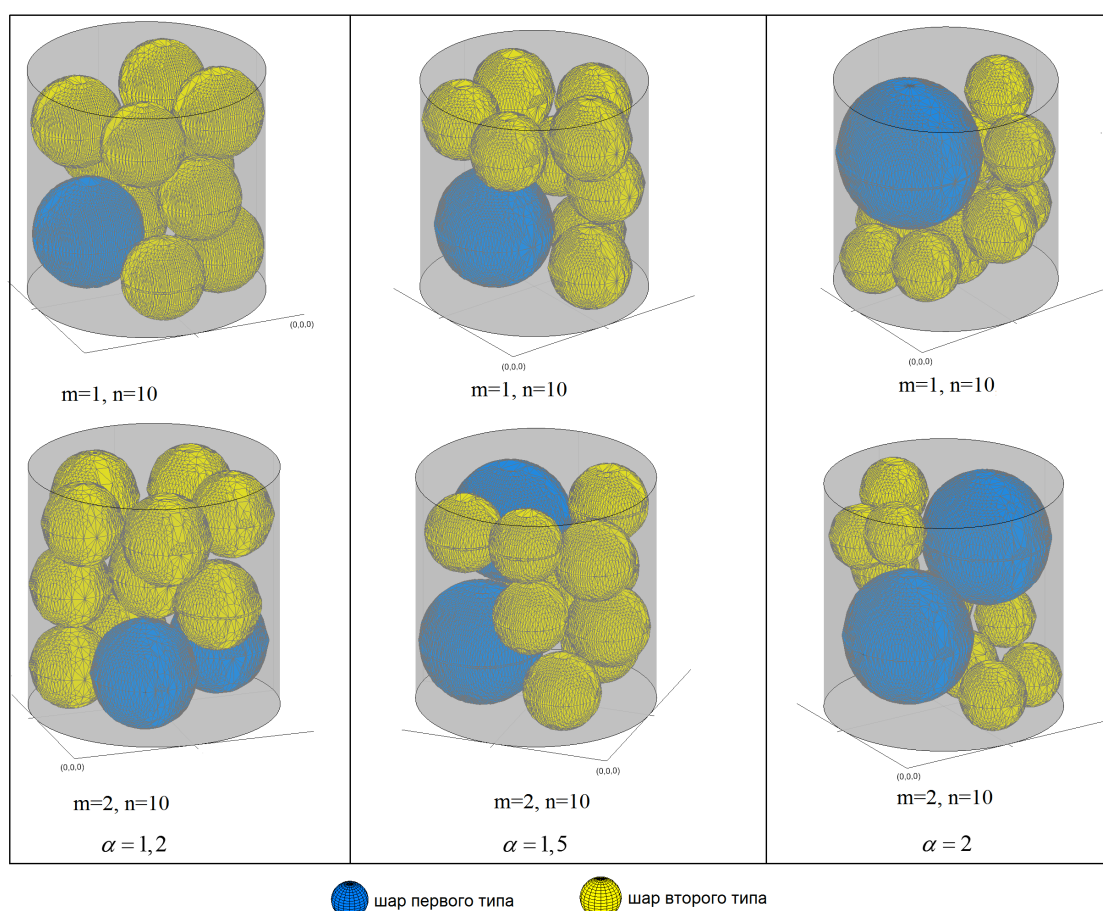


Рисунок 3.19 – Упаковка шаров двух типов в цилиндр при неевклидовой метрике

Из таблицы 3.9 видно, что при одинаковом количестве шаров каждого типа значение радиуса базовых шаров увеличивается с увеличением коэффициента α . Это объясняется тем, что с увеличением коэффициента α шары второго типа становятся меньше и занимают меньше места, следовательно, появляется пустое пространство для увеличения радиуса первого типа. При постоянном значении коэффициента значение радиуса уменьшается с увеличением количества шаров.

3.2.5. Упаковка шаров разного радиуса

Пример 11. В данном примере представлены результаты вычисления при использовании алгоритма УШМТ. Результаты получены при кубическом контейнере и в евклидовой метрике, количество шаров изменяется от 2 до 25, коэффициент отношения между радиусами шаров изменяется от 1 (все шары одинаковые) до 1,5 (радиус каждого следующего шара в 1,5 раза больше предыдущего). В таблице 3.10 представлены результаты изменения плотности упаковки при заданных условиях.

Таблица 3.10 – Упаковка различных шаров в куб

n	$\beta = 1$	$\beta = 1.02$	$\beta = 1.05$	$\beta = 1.1$	$\beta = 1.2$	$\beta = 1.5$
	D (%)	D (%)	D (%)	D (%)	D (%)	D (%)
2	26,684	26,781	26,801	27,334	27,582	29,795
3	31,575	31,061	29,815	27,592	30,135	31,813
4	42,099	38,344	37,172	34,523	33,187	32,411
5	38,507	38,392	38,137	37,423	34,954	32,588
10	41,216	42,542	41,559	46,394	37,222	32,662
15	44,686	44,991	42,718	48,539	37,369	32,663
20	47,572	45,313	42,818	45,329	37,378	—
25	49,481	46,304	45,899	45,442	—	—

Некоторые результаты решения представлены на рисунке 3.20. Из рисунка видно, что с увеличением значения коэффициента β ключевую роль в упаковке играют шары с большими радиусами, остальные же (маленькие) шары мало влияют на максимальный радиус упаковки (см., например, рис. 3.20, центральный нижний).

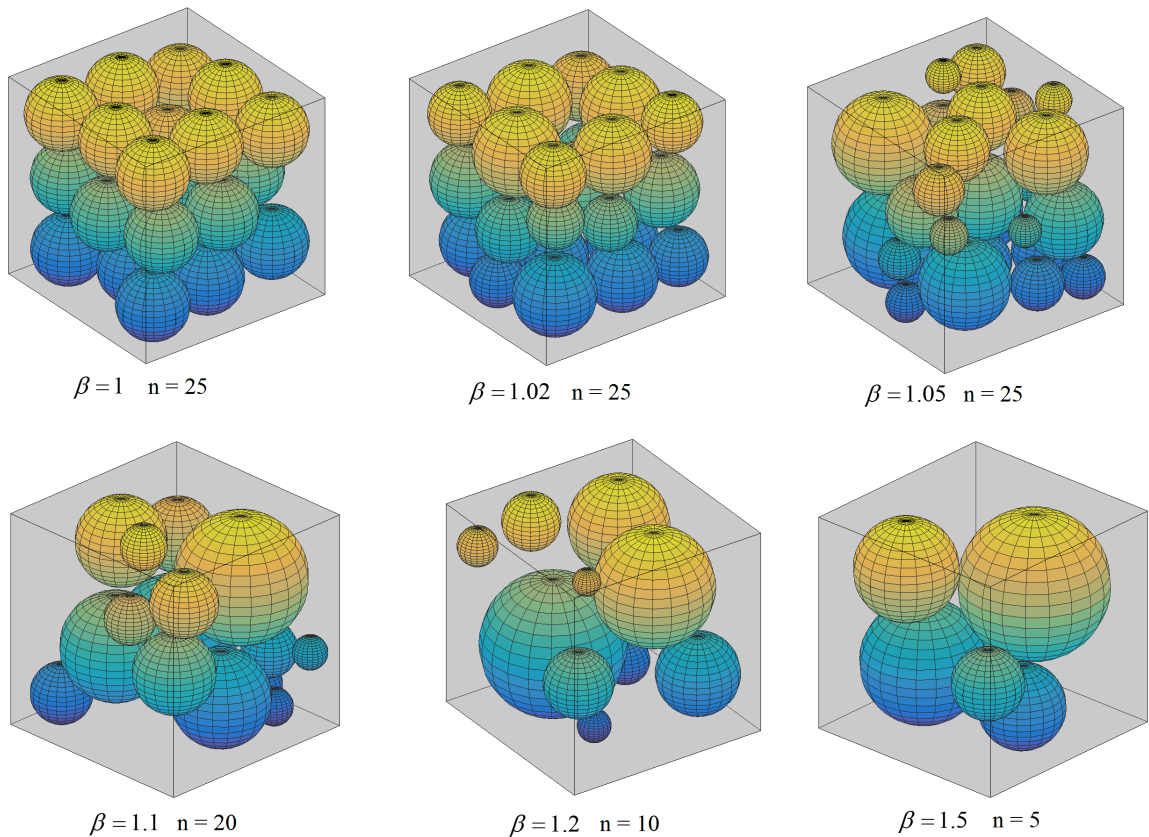


Рисунок 3.20 – Упаковка шаров много разных типов в куб при евклидовой метрике

Пример 12. Рассмотрим решение задачи упаковки при неевклидовой метрике, функция $f(x, y, z)$ задается формулой

$$f(x, y, z) = 0,1 + \frac{(x-0,2)^2 + (y-0,2)^2}{(x-0,2)^2 + (y-0,2)^2 + 1}.$$

Замкнутое трехмерное множество является сферическим цилиндром и описывается формулой

$$P = \{(x, y, z) \in R^3 : (x-0,5)^2 + (y-0,5)^2 \leq 0,5^2; 0 \leq x, y, z \leq 1\}.$$

График функции $f(x, y, z)$ показан на рисунке 3.21. Отметим, что она имеет минимум в точке $(x=0,2; y=0,2)$. В таблице 3.11 представлены наилучшие результаты вычисления при заданном коэффициенте $\beta=1,1$.

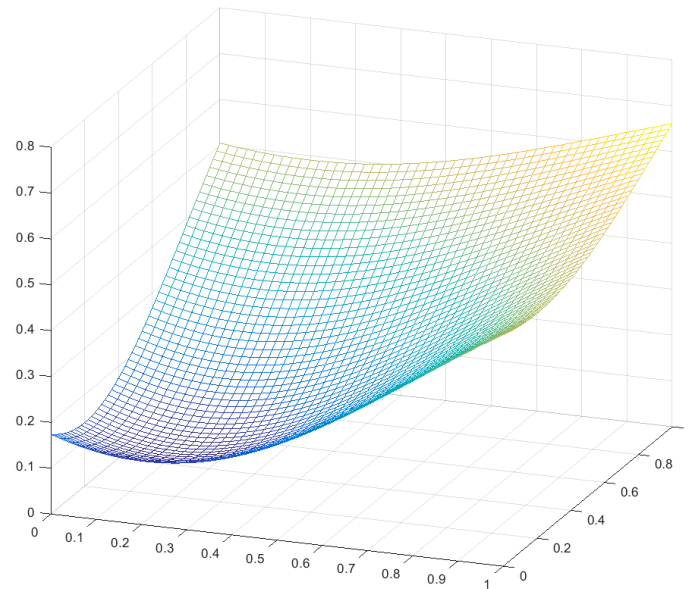


Рисунок 3.21 – Изображения функция $f(x, y, z)$

В данном примере рассматривается неевклидова метрика, следовательно форма волнового фронта заранее неизвестна. Некоторые наилучшие результаты представлены на рисунке 3.22.

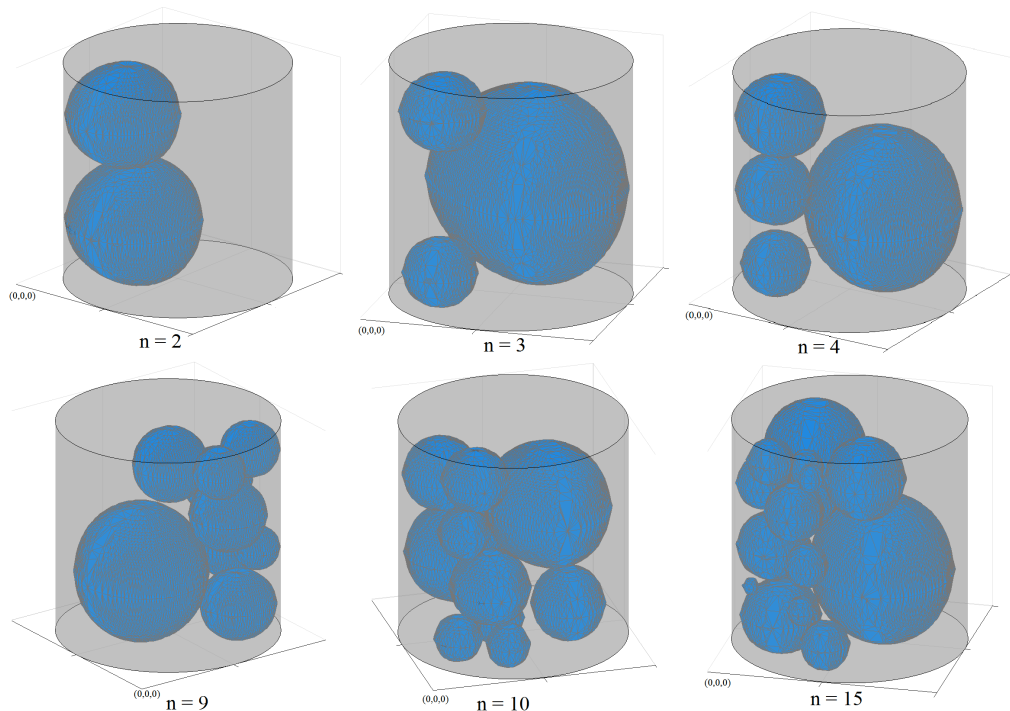


Рисунок 3.22 – Результаты решения задачи упаковки шаров в цилиндр при неевклидовой метрике

Таблица 3.11 – Упаковка различных шаров в куб

n	R_1	Плотность (%)	$t_{executed}(s)$
2	2,0615	24,96	195
3	1,6717	48,11	348
4	1,5998	35,41	567
5	1,5486	38,36	986
6	1,5249	31,23	1276
7	1,5080	27,93	1848
8	1,4963	37,38	2562
9	1,4824	34,85	2758
10	1,4732	33,73	3153
15	1,4619	39,98	4379

Результаты из таблицы 3.11 показывает, что плотность упаковки достигает максимальной величины при числе шаров $n=3$. Отметим, что объекты, показанные на рисунке 3.22, визуально (в евклидовой метрике) не являются шарами, и их радиусы быстро возрастают с увеличением расстояния до точки $(x=0,2; y=0,2)$.

Выводы по главе 3

1. В третьей главе представлено подробное описание интерфейса и функций программного комплекса «ТУШОЛ». В состав программного комплекса входят четыре модуля: «Среда», «Волна», «Упаковка», «Настройки». Модуль «Среда» позволяет задать (вручную или вычислить по известному закону) оптическую плотность среды, шаг и количество точек аппроксимации. Модуль «Волна» используется для моделирования процесса распространения световой волны в трехмерном пространстве. Модуль «Упаковка» предназначен для решения основных задач упаковки шаров в замкнутое трехмерное множество. Модуль «Настройки» позволяет задать настроечные параметры для работы с программой, характеристики исследуемого множества-контейнера, а также задавать непроходимые барьеры.

2. Проведено тестирование разработанного программного комплекса. Результаты вычислительного эксперимента показывают, что, во-первых, представленные алгоритмы находят решения, близкие к оптимальным, поскольку отклонение полученных результатов от наилучших известных (если таковые имеются) незначительно. Во-вторых, представленные алгоритмы позволяют решать задачи упаковки шаров в множества как с евклидовой метрикой, так и с неевклидовой метрикой. В-третьих, время работы алгоритмов возрастает с увеличением количества шаров и размеров множества-контейнера.

4.1 Размещение датчиков движения при проектировании «умных» помещений в технологии Smart Grid

В последние годы проблема энергосбережения является одной из наиболее обсуждаемых во всем мире. Во Вьетнаме данная проблема становится более актуальной, поскольку спрос на электроэнергию быстро возрастает, при этом мощности существующих электростанций в скором времени может оказаться недостаточно для его полного удовлетворения.

Вьетнам – это страна находится в субэкваториальной зоне, где климат очень жаркий и влажный круглый год. Например, в центральной и южной зонах страны температура относительно высокая и стабильная (около +29-35 С). В этих местах использование кондиционеров становится необходимостью. Данное устройство требует значительного расхода электроэнергии, особенно при использовании в большом помещении. Таким образом, для экономии электроэнергии необходимо, во-первых, оптимально расположить кондиционеры в помещении, и во-вторых, управлять работой кондиционеров.

Развитие информационных технологий, особенно появление технологии «Интернета вещей» позволяет сделать здание не только удобным, но и «умным». Использование различных датчиков, подключенных к контроллерам, обеспечивает возможность автоматического управления работой электрического оборудования в помещении. Среди большого разнообразия датчиков наиболее широко используются датчики движения и датчики присутствия. В настоящее время, в первую очередь, они используются для включения и выключения электроосветительных приборов, однако эту технологию можно адаптировать и для вентиляционного оборудования, в частности, кондиционеров.

Кроме того, современное здание, оснащенное устройством связи с коммуникационной сетью Smart Grid, может в будущем автоматически выбрать

режим работы наиболее энергозатратного оборудования (освещение, кондиционирование и приводная вентиляция) в течение недели, с точностью до часа, с учетом оптимального коммерческого тарифа (и потребностей арендаторов).

В данном разделе рассматривается задача размещения датчиков движения и присутствия в общественном административном центре, расположенном в городе Вунгтау ($10^{\circ}22'00''$ с. ш. $107^{\circ}05'00''$ в. д.) во Вьетнаме. Данный центр является большим пятиэтажным зданием, вид которого показан на рисунке 4.1. Необходимо найти расположение заданного числа датчиков так, чтобы здание полностью наблюдалось. Кроме того, необходимо определить координаты работника, чтобы включить только ближайший кондиционер.



Рисунок 4.1 – Внешний вид здания и план нижнего этажа

Для обнаружения присутствия человека используется ультразвуковой датчик движения, который генерирует звуковые волны в окружающей среде и принимает обратные волны, отражающиеся от окружающих объектов. При обнаружении изменения частоты отраженного сигнала из-за движения объекта (эффекта Доплера), датчик запускает заложенную в нем функцию. Данный датчик выпускает звуковую волну по всему направлению, так что его зона действия имеет вид сферы.

Здание состоит из пяти этажей, два первых этажа объединены в один большой зал, имеющий размеры $30 \times 30 \times 9$ м. Датчики необходимо расположить так, чтобы зал полностью покрывался объединением их сигналов, и при этом радиус действия был минимально возможным. В указанных условиях проблема

размещения датчиков эквивалентна задаче о покрытии множества равными шарами. Если предполагается размещение датчиков только на стенах или полу, то возникает задача о покрытии множества равными шарами с ограничением на расположение их центров.

Три следующие этажа разделяются по кабинетам, конструктивная схема каждого этажа представлена на рисунке 4.2. Причем на третьем этаже расположены отдельные кабинеты с индивидуальными кондиционерами, следовательно в каждом кабинете требуется установить один датчик, позволяющий обнаружить, находится ли человек в кабинете. Таким образом, получаем задачу о покрытии множества одним шаром.

На верхних этажах внутренние перегородки не достигают потолка и установлена общая потолочная система кондиционирования. В указанных условиях проблема размещения датчиков упрощается и вырождается в задачу о покрытии множества равными кругами.

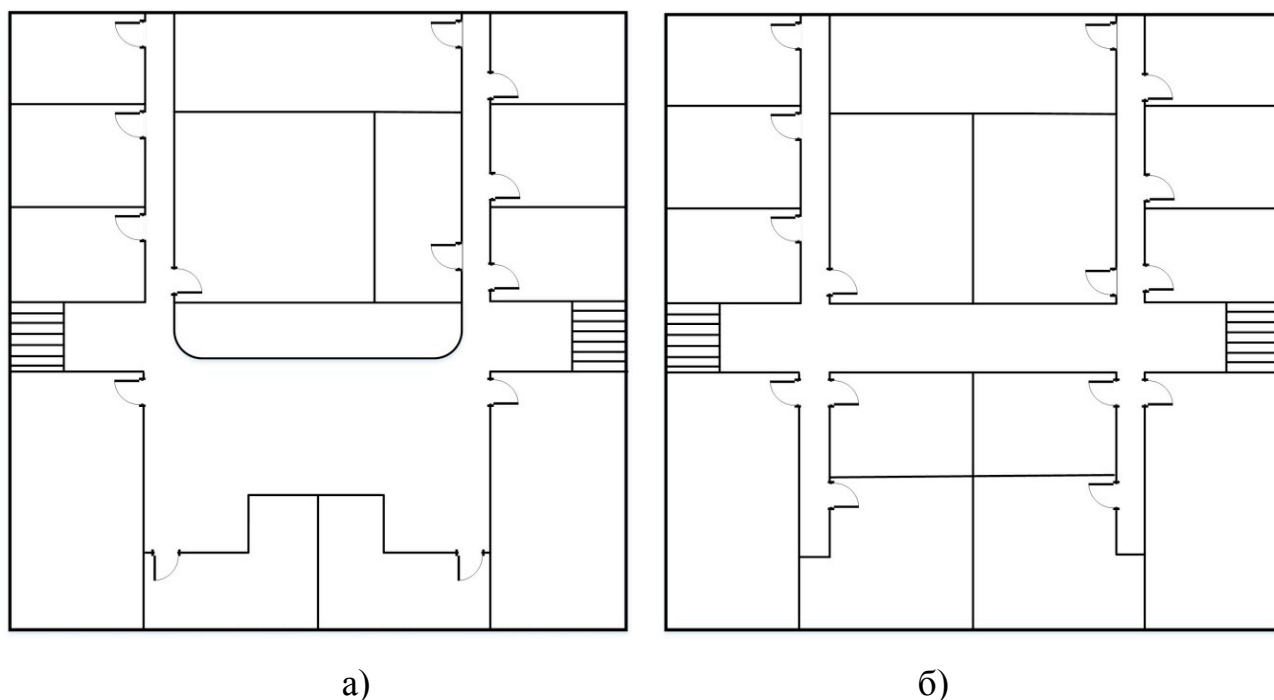


Рисунок 4.2 – Конструктивный план третьего этажа (а) и верхних этажей (б)

Результаты вычисления представлены в таблице 4.1.

Нетрудно видеть, что с увеличением количества датчиков необходимый радиус действия датчика уменьшается, следовательно, уменьшаются мощность датчиков и их цена. Однако отметим, что значительный выигрыш от увеличения

количества датчиков получается лишь при незначительном их числе (до 8). Следовательно, при принятии решения о добавления нового датчика следует учитывать его стоимость. Визуализация результатов для 6,7 и 8 датчиков представлена на рисунках 4.3 и 4.4.

Таблица 4.1 - Результаты покрытия двух первых этажей равными шарами

Количество датчиков	Радиус зоны покрытия (м)	Радиус зоны покрытия с ограничением (м)
4	11,9065	13,9866
5	10,9765	12,6219
6	10,4790	12,2678
7	9,6630	11,8348
8	9,0455	11,1838
9	8,9197	10,4103
10	8,7873	9,6209
15	7,6403	8,5146
20	6,9910	7,3569

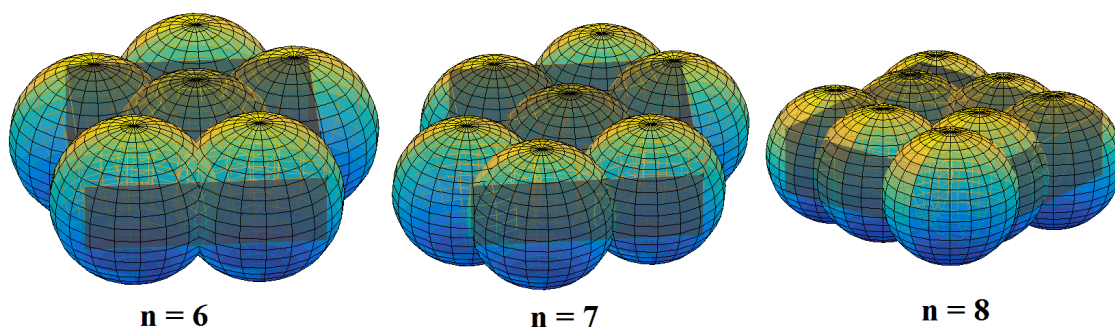


Рисунок 4.3 – Схема размещения датчиков на первом этаже здания при количестве датчиков равных 6,7 и 8.

Схема размещения датчиков на третьем этаже представлена на рисунке 4.5, на четвертом и пятом этажах - на рисунке 4.6. Результаты вычисления представлены в таблице 4.2.

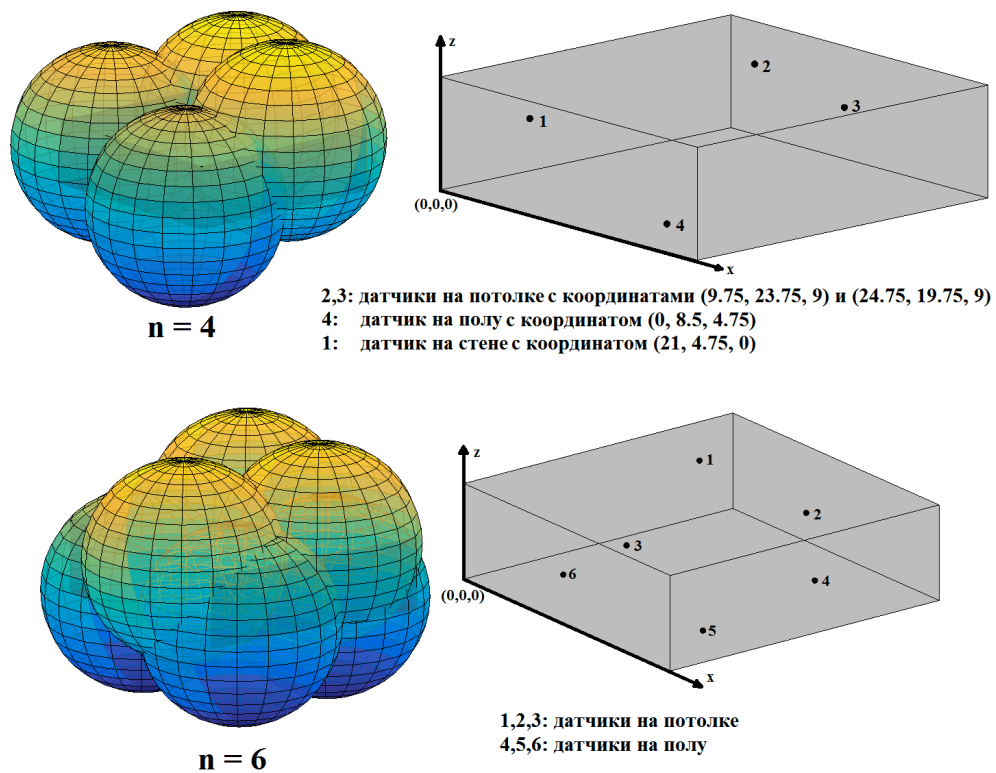


Рисунок 4.4 – Схема размещения датчиков на границе первого этажа здания при количестве датчиков равных 4 и 6.

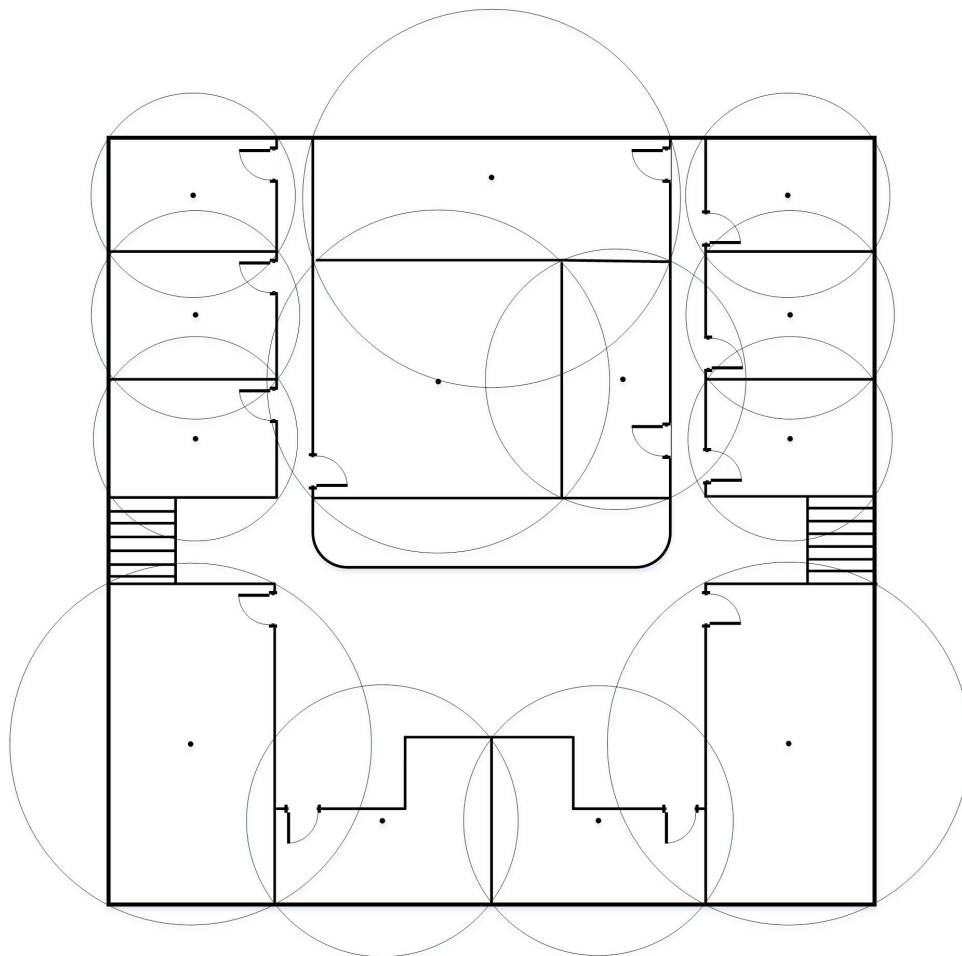


Рисунок 4.5 – Схема размещения датчиков на третьем этаже здания.

Таблица 4.2 - Результаты покрытия верхних этажей равными шарами

Количество датчиков	Радиус зоны покрытия (м)
4	10,8942
5	10,0185
6	9,7146
7	8,7464
8	8,2953
9	7,9411
10	7,4288
15	6,2349
20	5,6236

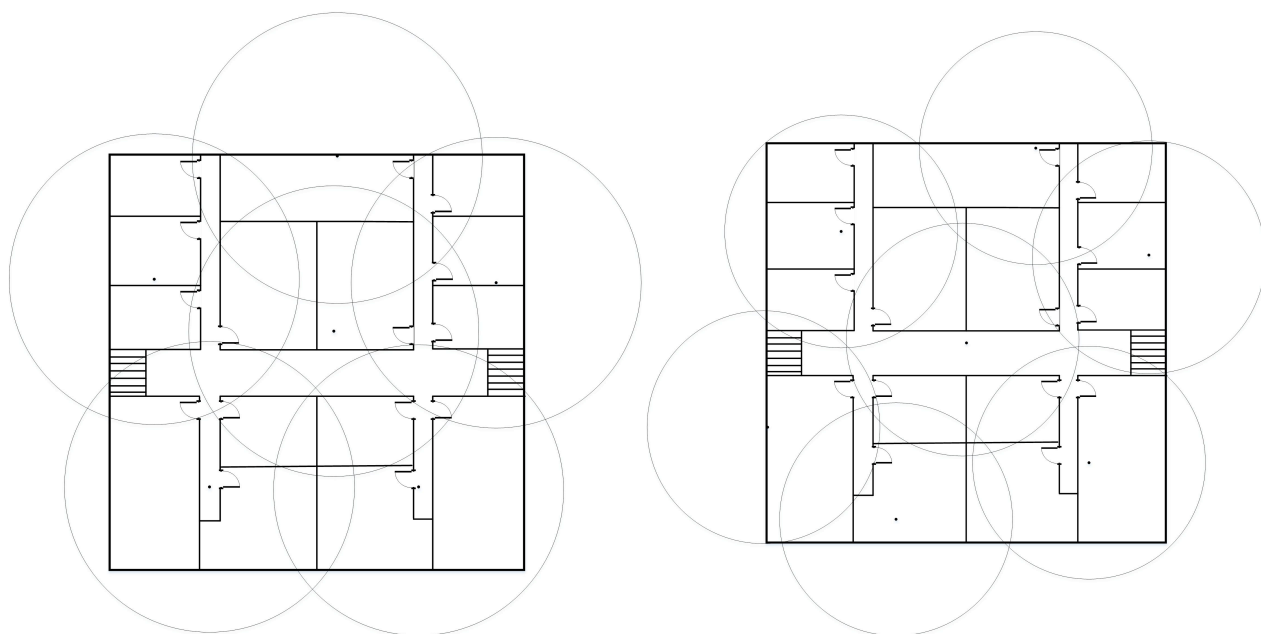


Рисунок 4.6 – Схема размещения 6 и 7 датчиков на верхних этажах здания.

4.2 Размещение беспроводных устройств в крупном здании

В процессе развития современной экономики требование обеспечения постоянного доступа ко всем ресурсам для большинства сотрудников становится необходимостью каждой компании. Однако в большинстве случаях

использование существующей кабельной сети оказывается недостаточно (например, при использовании мобильных устройств), иногда по разным причинам реализовать такие кабельные сети невозможно. В таких ситуациях решением проблемы становятся использование беспроводных систем связи.

В настоящее время использование беспроводной сети становится популярным в области телекоммуникаций из-за многих преимуществ, такие как: простота и скорость развертывания сети, низкая стоимость развертывания, минимум строительно-монтажных работ, и т.д.

При создании беспроводной сети в большинстве случаев используются точки доступа, поскольку эти устройства являются более простой версией маршрутизатора. Каждая точка доступа передает сигнал Wi-Fi от роутера-маршрутизатора пользовательскому компьютеру или смартфону. Как известно, в беспроводных сетях для передачи сигнала используются радиоволны, и область действия источника имеет вид сфероида с центром в точке доступа. В маленьком офисе достаточно одной точки доступа, которая расположена в «центре» помещения, но в больших зданиях нужно установить несколько точек доступа.

Отсюда задачу можно сформулировать следующим образом: необходимо построить систему беспроводной сети с заданным количеством точек доступа в бизнес-компании, расположенной на нескольких этажах здания.

При построении системы беспроводной сети посмотрим два случая:

- найти оптимальное размещение точек доступа такое, чтобы беспроводный сигнал охватывал максимальное пространство здания.
- найти оптимальное размещение точек доступа такое, чтобы беспроводный сигнал охватывал пространство здания целиком.

Задача оптимального размещения точек доступа – это одна из основных задач инженеров и сетевых администраторов. Она рассматривается в различных публикациях (см., например, [26]), но как проблема размещения на карте, т.е. в двумерном пространстве.

Рассмотрим конкретный пример. Пусть бизнес-компания работает в пятиэтажном здании, конструктивный план каждого этажа которого представлен на рисунке 4.7.

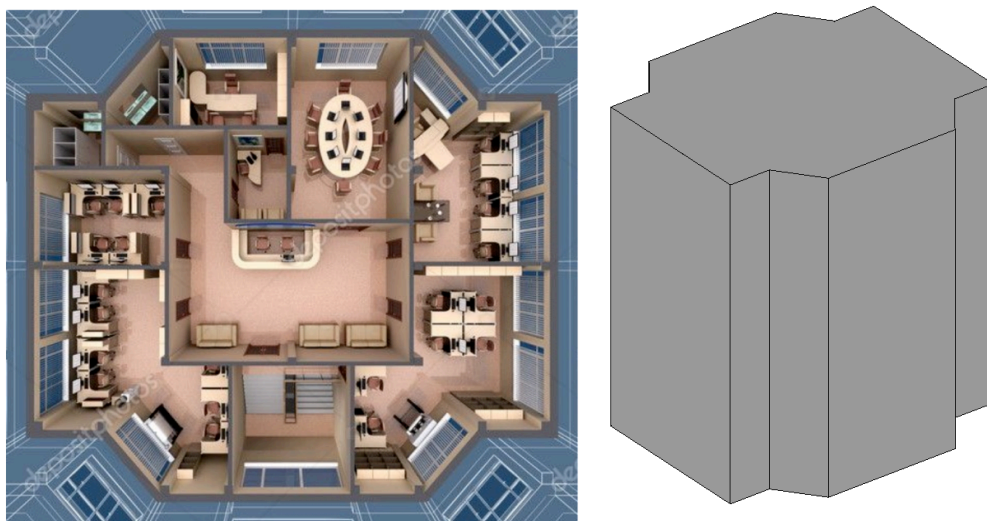


Рисунок 4.7 – Конструктивный план этажа и внешний вид здания
Выделяем два случая:

- Пользователи расположены «равномерно» по всему зданию. Иначе говоря, беспроводная сеть построена таким образом, чтобы пользователи имеют одинаковую возможность подключить к сети в любом месте.

- В компании существуют некоторые зоны, которые пользователи часто посещают и используют сети наиболее активно. К таким зонам относятся, в первую очередь, рабочие места (на плане столы и стулья). Схема расположения пользователей представлена на рисунке 4.8.

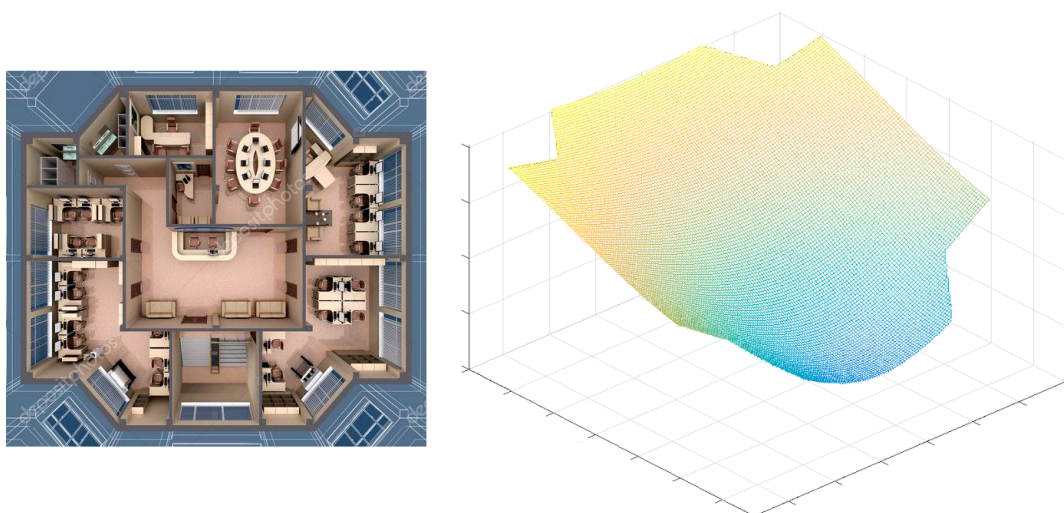


Рисунок 4.8 – Расположение пользователей по местам работы

Беспроводный сигнал охватывает максимальное пространство здания

Данное условие приводит к задаче оптимальной упаковки шаров в трехмерное пространство. В первом случае результаты вычисления представлены в таблице 4.3 при одинаковом расположении пользователей, и в таблице 4.4 при расположении пользователей по местам работы.

Таблица 4.3 – Радиус беспроводного сигнала при максимальной охватке здания и одинаковом расположении пользователей

Число точек доступа	Радиус зона сигнала (м)	Плотность покрытия сигнала (%)
5	6,410	41,042
6	6,330	47,439
7	5,926	45,264
8	5,624	43,788
9	5,368	43,194
10	5,292	45,877
11	5,292	50,464
12	5,292	55,052
13	5,066	52,491
14	4,834	48,861
15	4,756	50,390

На рисунке 4.9 представляются наилучшие варианты расположения точек доступа при одинаковом расположении пользователей.

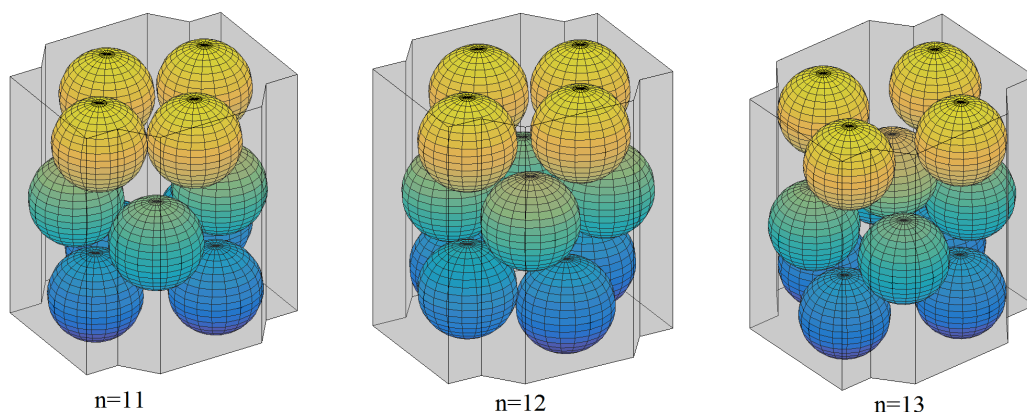
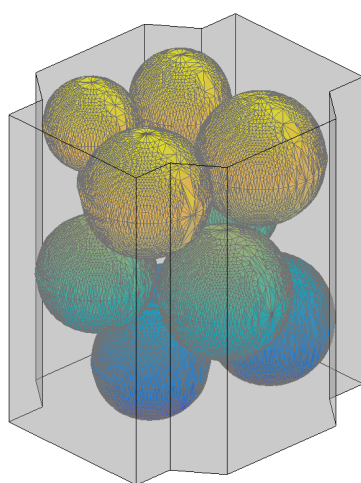


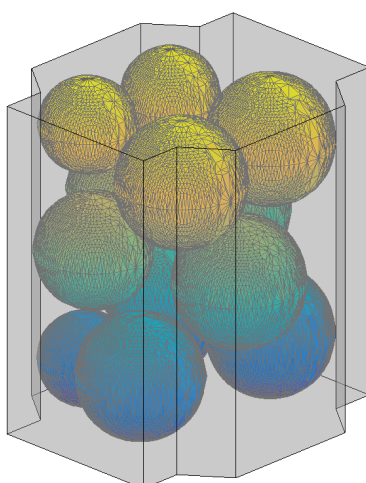
Рисунок 4.9 – Оптимальное размещение беспроводных точек доступа в случае одинакового расположения пользователей

Таблица 4.4 – Радиус беспроводного сигнала при максимальной охватке здания и расположении пользователей по местам работы

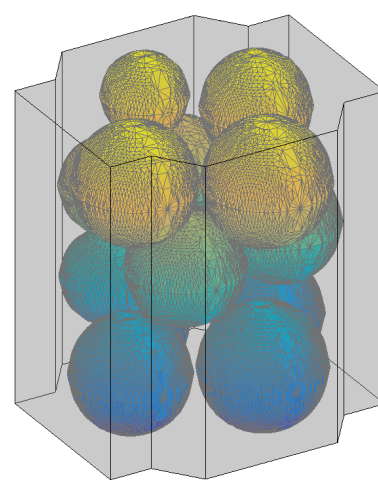
Число точек доступа	Радиус зона сигнала (м)	Плотность покрытия сигнала (%)
5	5,054	38,32
6	4,972	45,13
7	4,738	44,98
8	4,178	45,68
9	4,042	46,96
10	3,846	45,34
11	3,736	44,19
12	3,702	47,37
13	3,616	48,13
14	3,478	48,07
15	3,418	46,86



n=12



n=13



n=14

Рисунок 4.10 – Оптимальное размещение беспроводных точек доступа в случае расположения пользователей по местам работы

На рисунках 4.10 представляются наилучшие варианты расположения точек доступа при расположении пользователей по местам работы.

Беспроводный сигнал покрывает все пространство здания

Данное условие приводит к задаче оптимального покрытия трехмерного множества. Результаты вычисления представлены в таблице 4.5 при одинаковом расположении пользователей.

Таблица 4.5 – Радиус беспроводного сигнала при покрытии здания

Число точек доступа	Радиус зона сигнала (м)
2	17,848
3	16,612
4	15,148
5	14,802
6	14,268
7	12,758
8	11,882
9	11,388
10	11,118

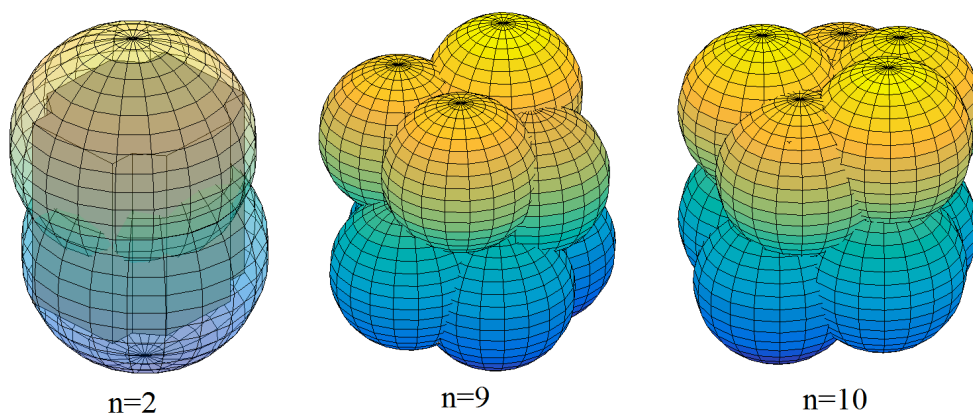


Рисунок 4.11 – Размещения беспроводных точек доступа для покрытия здания

Видно, что в случае покрытия здания, чем больше количество точек доступа, тем меньше необходимый радиус беспроводного сигнала. Сделав вычисления, разработчик может выбрать нужный вариант, определить подходящий тип точек доступа и построить систему по плану размещения.

4.3 Задачи размещения устройств точечной физической защиты

Для государств, имеющих протяженной морское побережье, к которым относится Социалистическая Республика Вьетнам, проблема использования подводных пространств для развития экономики имеет высокую значимость. В частности, во многих случаях необходимо разместить подводные объёмные средства физической защиты, позволяющие защитить подводные средства от внешних воздействий (например, в процессе выращивания жемчуга), кроме того, актуальной является задача защиты побережья в туристических зонах от морских хищников.

Таким образом, необходимо построить схему размещения подводных объёмных средств физической защиты (ПОСФЗ) на заданной территории, чтобы объединенная зона защиты всех установленных ПОСФЗ либо полностью покрывала исследуемую территорию, либо была максимальной.

Пусть исследуемая территория имеет вид вертикальной призмы с квадратной трапецевидной основой. Изображение территории представлено на рисунке 4.12.

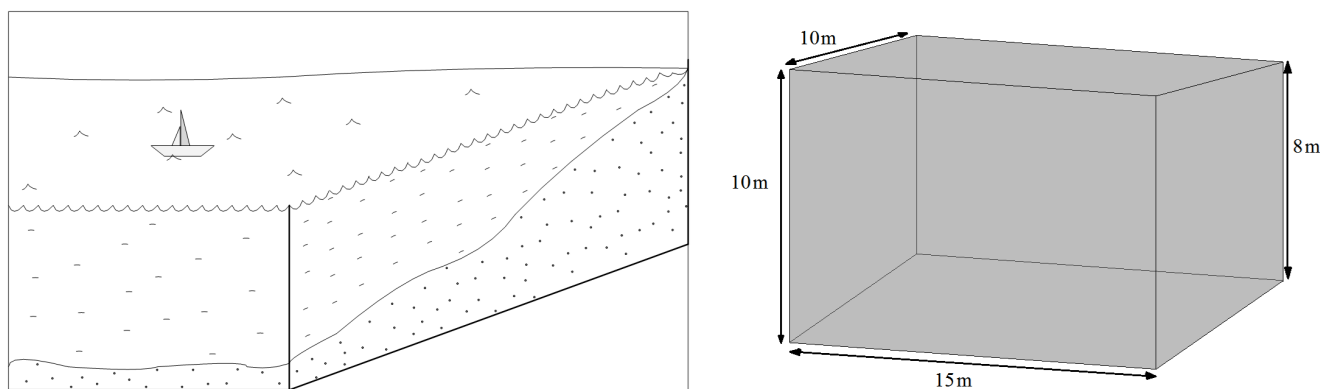


Рисунок 4.12 – Территория для размещения ПОСФЗ

Рассматриваются два следующие задачи размещения ПОСФЗ:

а) Размещение ультразвуковых ПОСФЗ.

В этой задаче применяются ПОСФЗ, которые используют ультразвук для обнаружения морских хищников, поскольку ультразвук хорошо распространяется в морской воде. При работе ПОСФЗ создает и посылает ультразвуковые

импульсы в воде, регистрирует отраженные импульсы от препятствий, возникающих на пути их распространения. В результате обработки этих импульсов ПОСФЗ создает соответствие предупреждения о возникновении морских хищников.

Скорость распространения ультразвука и диапазон обнаружения ПОСФЗ изменяются в зависимости от свойства окружающей среды. При этом с увеличением глубины гидростатическое давление увеличивается, следовательно, скорость распространения ультразвука увеличивается, т.е., диапазон обнаружения ПОСФЗ увеличивается. Цель задачи размещения ультразвуковых ПОСФЗ заключается в том, что необходимо разместить отдельные элементы так, чтобы их объединённая зона обнаружения полностью покрывала заданную территорию. Таким образом, задача размещения ультразвуковых ПОСФЗ эквивалентна задаче о тончайшем покрытии шарами в неевклидовой метрике.

Ниже в таблице 4.6 представляются решения представленной практической задачи с использованием алгоритма **УРШВМ**.

Таблица 4.6 – Наилучшие радиусы ультразвуковых ПОСФЗ

Количество мин	Радиус зоны обнаружения (м)
1	84,04
2	61,23
3	56,82
4	51,58
5	45,76
6	42,87
7	41,22
8	39,84
9	38,03
10	36,87

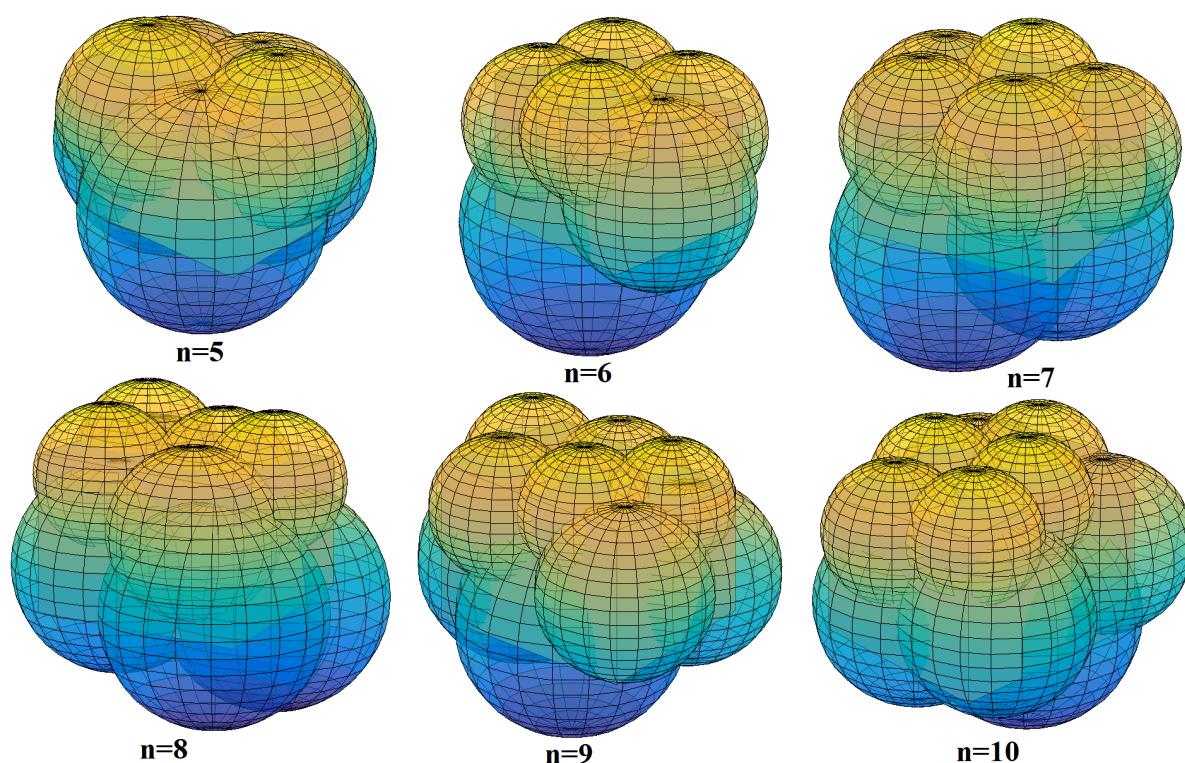


Рисунок 4.13 – Наилучшие варианты размещения ультразвуковых ПОСФЗ

Из таблицы 4.4 можно ожидаемо видеть, что с увеличением количества установленных ПОСФЗ их радиус уменьшается. Однако отметим, что при малом количестве шаров радиус уменьшается быстро, а при большом – скорость убывания радиуса снижается. Некоторые схемы размещения ПОСФЗ показаны на рисунке 4.13.

б) Размещение ПОСФЗ взрывного типа.

При защите побережья в туристических зонах от морских хищников в ряде случаев ставится задача их физического поражения. Тогда целесообразно использовать ПОСФЗ взрывного типа.

При срабатывании ПОСФЗ взрывного типа создается взрывное заграждение, и энергия взрыва распространяется от источника в виде ударной волны, имеющей сферическую форму. Принцип воздействия основан на том, что вода практически не сжимается и имеет высокую плотность, исходная мощность взрывной волны не теряется при распространении на больших расстояниях. Но при значительном расстоянии от эпицентра энергия взрыва распределяется на большую площадь, соответственно, радиус поражения ограничен.

Плотность морской воды изменяется в зависимости глубины, и поэтому размер области, защищаемой ПОСФЗ, также изменяется с изменением глубины. Увеличение глубины размещения приводит к увеличению плотности воды и к увеличению давления, следовательно, размер ПОСФЗ уменьшается. Задача размещения этих ПОСФЗ эквивалентна задаче упаковки шаров в неевклидовой метрике.

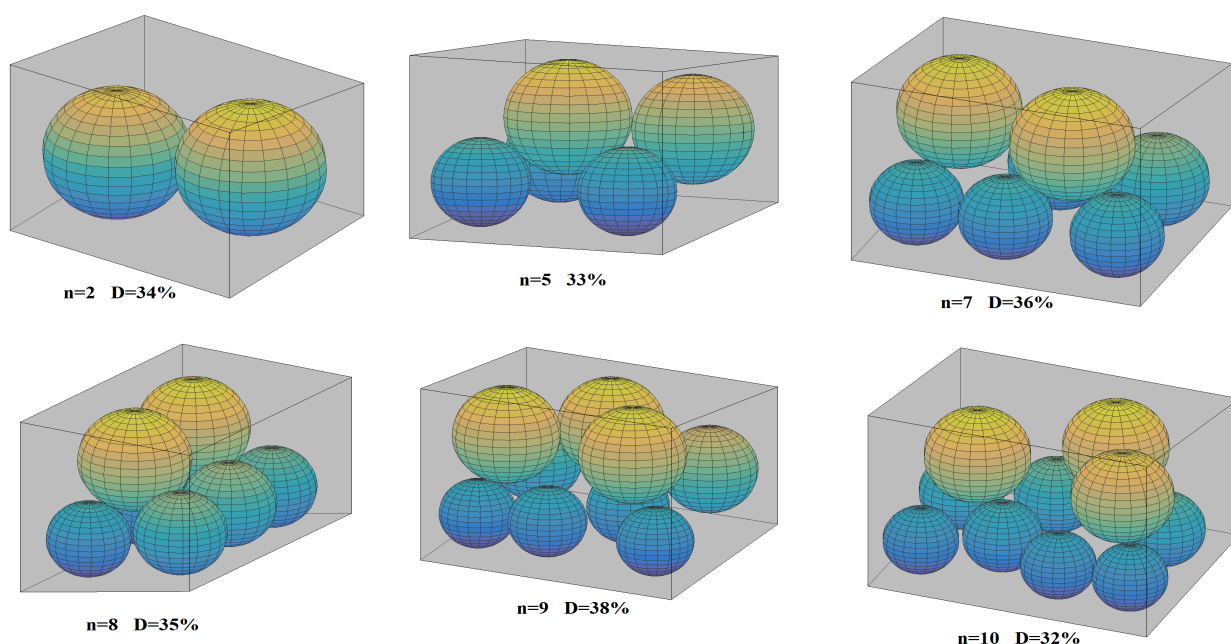


Рисунок 4.14 – Варианты размещения ПОСФЗ взрывного типа

Таблица 4.7 – Наилучшие радиусы ПОСФЗ взрывного типа

Количество мин	Радиус зоны поражения (м)	Плотность покрытия зоны поражения (%)
1	30,08	28,34
2	26,44	34,07
3	21,75	24,10
4	20,46	29,49
5	19,05	33,30
6	18,04	29,94
7	17,97	36,18
8	17,05	35,48
9	16,38	37,95
10	15,53	32,24

Результаты вычисления из таблицы 4.7 показывает, что в отличие от предыдущего случая, максимальная плотность зон защиты достигается при количестве ПОСФЗ равном 9. На рисунке 4.14 изображаются наилучшие варианты размещения ПОСФЗ.

Выводы по главе 4

В данной главе представлено описание решения трех прикладных задач: о размещении датчиков движения при проектировании «умных» помещений в технологии Smart Grid; о размещении беспроводных точек доступа при построении системы беспроводной сети, и о построении схемы размещения устройств точечной физической защиты двух типов.

Для первой задачи выделены три постановки, которые соответствуют поэтажному плану здания. Так, для нижнего этажа датчики необходимо расположить так, чтобы зал полностью покрывался объединением их сигналов, и при этом радиус действия был минимально возможным. Для третьего этажа требуется установить один датчик в каждом кабинете, а для верхних этажей располагать датчики разрешается только на потолке. Данные постановки формализованы в виде задач о покрытии множества равными шарами с ограничением на расположение их центров, о покрытии одним шаром и о покрытии плоского множества равными кругами, соответственно.

Для второй задачи рассмотрены четыре постановки: обеспечение связью максимально возможной доли здания и полное покрытие здания, при этом пользователи могут располагаться либо равномерно по всему зданию, либо в заранее определенных местах. Данные постановки формализованы в виде задач об оптимальной упаковке и оптимальном покрытии соответственно, при этом используется евклидова метрика для равномерного распределения пользователей и неевклидова, для учета заданных мест размещения пользователей.

Для третьей задачи рассмотрены два типа устройств. Зоны действия первых могут пересекаться, поэтому в качестве модели выбрана задача об оптимальном покрытии шарами. Зоны действия устройств второго типа не должны пересекаться, следовательно, задача их размещения ставится в форме оптимальной упаковки шаров. Радиус действия устройств обоих типов зависит от глубины их расположения, поэтому в качестве метрики выбрана «линейная», т.е. порождаемая линейной по z функцией $f(x, y, z)$.

Для численного решения применен программный комплекс «ТУШОЛ».

В ходе проведённого диссертационного исследования получены следующие основные результаты:

1. Выполнена формализация трехмерных задач оптимального размещения в виде задач о покрытиях и упаковках шаров в ограниченное множество в трехмерном пространстве с неевклидовыми метриками.

2. Разработаны численные алгоритмы решения задач о покрытиях и упаковках равных шаров в ограниченное множество на основе оптико-геометрического подхода, позволяющие, в отличие от созданных ранее, выполнять решение задач в трехмерном пространстве.

3. Разработаны новые алгоритмы решения задач об упаковках равных и различных шаров в ограниченное трехмерное множество с произвольной границей на основе метода бильярдного моделирования, отличающиеся от известных тем, что их можно применять для невыпуклых многосвязных множеств.

4. Создан программный комплекс «ТУШОЛ: трехмерные упаковки шаров, оптимизация, логистика», в котором реализованы разработанные численные алгоритмы. Выполнены расчеты тестовых и модельных задач, показавшие эффективность предложенного программно-алгоритмического инструментария.

5. Решена с использованием программного комплекса «ТУШОЛ» прикладная задача размещения датчиков контроля движения и температуры в "умном здании", являющемся частью интеллектуальной энергетической системы, для конкретного офисного здания в г. Вунгтау (Вьетнам).

6. Решены другие прикладные задачи: об оптимальном размещении заданного количества точек доступа при построении беспроводной сети; об оптимальном размещении заданного количества устройств точечной физической защиты при решении проблемы использования подводного пространства.

1. Аверьянов, В.К. Теплоснабжение городов в контексте развития активных потребителей интеллектуальных энергетических систем Academia / В.К. Аверьянов, Ю.В. Юферев, А.А. Мележик, А.С. Горшков // Архитектура и строительство. – 2018. – № 1. – С. 78–87.
2. Алдыноол, Т.А. Покрытие плоской области случайно распределенными сенсорами / Т.А. Алдыноол, А.И. Ерзин, В.В. Залюбовский // Вестник НГУ. – Серия Математика, механика, информатика. – 2010. – Т.10, № 4. – С. 7–25.
3. Арнольд, В.И. Математические методы классической механики / В.И. Арнольд. – Москва: Эдиториал УРСС, 2000. – 408 с.
4. Башуров, В.В. Применение методов геометрической оптики для решения задач безопасности объекта / В.В. Башуров // Вычислительные технологии. – 2006. – № 4. – С.23–28.
5. Бухаров, Д.С. Программная система «ВИГОЛТ» для решения задач оптимизации, возникающих в транспортной логистике / Д.С. Бухаров, А.Л. Казаков // Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии. – 2012. – Т.13, № 2 (26). – С. 65–74.
6. Верхотуров, М.А. Управление размещением трехмерных геометрических объектов в системах компоновки / М.А. Верхотуров, Г. Н. Верхотурова, Р.Р. Ягудин // Вестник Уфимского государственного авиационного технического университета. – 2012. – Т. 16, № 8(53). – С. 45–51.
7. Верхотуров, М.А. Упаковка сложных трёхмерных объектов в прямоугольный контейнер на базе дискретно-логического представления информации / М.А. Верхотуров, Г.Н. Верхотурова, К.В. Данилов, Р.Р. Ягудин // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. – 2014. – Т. 16, № 4-2. – С. 378–383.
8. Верхотуров, М. А. Упаковка 3D-объектов в прямоугольный контейнер на базе «No fit polyhedron» в объектном пространстве и с использованием воксельного представления информации / М.А. Верхотуров, Г.Н. Верхотурова,

К.В. Данилов // Перспективные информационные технологии (ПИТ 2017) [Электронный ресурс]: Междунар. науч.-техн. конф., 14 – 16 марта 2017 г.: сб. науч. тр. / М-во образования и науки РФ, Самар. гос. аэрокосм. ун-т им. С. П. Королева (нац. исслед. ун-т), Междунар. обществ. орг. Акад. навигации и упр. движением (Самар. отд-ние), Самар. регион. отд-ние науч. – 2017. – С. 56–62.

9. Воропай, Н.И. Инновационные технологии и направления развития систем энергоснабжения мегаполисов / Н.И. Воропай, В.А. Стенников // В сборнике: Электроэнергетика глазами молодежи - 2017. Материалы VIII Международной научно-технической конференции. – 2017. – С. 49–52.

10. Воропай, Н. ИТ-инфраструктура для построения интеллектуальных систем управления развитием и функционированием систем энергетики на основе цифровых двойников и цифровых образов / Н. Воропай, Л. Массель, И. Колосок, А. Массель // Известия Российской академии наук. Энергетика. – 2021. – №. 1. – С. 3–13.

11. «Дорожная карта» «Энерджинет» НТИ по реализации национального проекта «Интеллектуальная энергетическая система России» [Электронный ресурс] / Одобрено 28 сентября 2016 г. на заседании президиума Совета при Президенте Российской Федерации по модернизации экономики и инновационному развитию России // Официальный сайт Минэнерго России. – Режим доступа <https://minenergo.gov.ru/node/8916> (дата обращения 16.03.2021).

12. Галиев, Ш.И. Численный метод оптимизации упаковок правильных выпуклых многоугольников / Ш.И. Галиев, М.С. Лисафина // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2016. – Т. 56, № 8. – С. 1416–1427.

13. Гарсия М.Л. Проектирование и оценка систем физической защиты / М.Л. Гарсия. Пер. с англ. – М.: Мир. – 2003. – 386 с.

14. Гладков, Л.А. Генетические алгоритмы: учебник / Л.А. Гладков, В.В. Курейчик, В.М. Курейчик; под ред. В.М. Курейчик. – Москва: Физматлит, 2010. – 317 с.

15. Гладков, Л.А. Решение задачи трехмерной упаковки разногабаритных объектов с использованием бионических методов / Л.А. Гладков, Н.В. Гладкова, Е.С. Скубрияева // Известия Южного федерального университета. Технические науки. – Таганрог: Изд-во ТТИ ЮФУ. – 2013. – Т. 144, № 7. – С. 35–41.

16. Гудман, С. Введение в разработку и анализ алгоритмов / С. Гудман, С. Хидетниими. – М.: Мир, 1981. – 368 С.

17. Заруба, Д.В. Использование методов эволюционной оптимизации для решения задач трехмерной упаковки / Д.В. Заруба, Д.Ю. Запорожец, Ю.А. Кравченко // Информатика, вычислительная техника и инженерное образование. – 2012. – № 2 (9). – С. 1–9.

18. Казаков, А.Л. Об одном подходе к решению задач оптимизации, возникающих в транспортной логистике / А.Л. Казаков, А.А. Лемперт // Автоматика и телемеханика. – 2011. – № 7. – С. 50–57.

19. Казаков, А.Л. К вопросу о сегментации логистических зон для обслуживания непрерывно распределенных потребителей / А.Л. Казаков, А.А. Лемперт, Д.С. Бухаров // Автоматика и телемеханика. – 2013. – Т. 74, № 6. – С. 87–100.

20. Казаков, А.Л. Оптимизация системы коммуникаций с учетом региональных особенностей: математическая модель и численный метод / А.Л. Казаков, А.А. Лемперт, Г.Л. Нгуен // Вестник ИрГТУ. – 2014. – № 12(95). – С. 17–22.

21. Казаков, А.Л. Об одном алгоритме построения упаковки конгруэнтных кругов в неодносвязное множество с неевклидовой метрикой / А.Л. Казаков, А.А. Лемперт, Г.Л. Нгуен // Вычислительные методы и программирование. – 2016. – Т. 17, Вып. 2. – С. 177–188.

22. Казаков, А.Л. Алгоритм построения оптимальных покрытий равными кругами невыпуклых многоугольников с неевклидовой метрикой / А.Л. Казаков, А.А. Лемперт, Г.Л. Нгуен // Вестник ИрГТУ. – 2016. – № 5(112). – С. 45–55.

23. Казаков, А.Л. Программный модуль оптимального размещения логистических центров / А.Л. Казаков, Г.Л. Нгуен, А.А. Лемперт // Свидетельство

о гос. регистрации программы для ЭВМ. № 2015616554 от 15 июня 2015 г. Москва: Федеральная служба по интеллектуальной собственности, 2015.

24. Казаков, А.Л. Программный модуль построения оптимальных покрытий и упаковок в оптически неоднородной среде / А.Л. Казаков, Г.Л. Нгуен, А.А. Лемперт // Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ. № 2016614997 от 13 мая 2016 г. М.: Федеральная служба по интеллектуальной собственности, 2016.

25. Казаков, А.Л. «КУПОЛ-М»: кратные упаковки и покрытия, оптимизация, логистика / А.Л. Казаков, А.А. Лемперт, К.М. Ле // Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ. № 2018666830 от 21 ноября 2018 г. Москва: Федеральная служба по интеллектуальной собственности. 2018.

26. Казаковцев, Л.А. Задача выбора оптимального размещения элементов беспроводной сети / Л.А. Казаковцев, М.Н. Гудыма, А.А. Ступина, Ю.И. Кириллов // Научное обозрение. Технические науки. – 2014. – № 1. – С. 176–176. – URL: <https://science-engineering.ru/ru/article/view?id=259> (дата обращения: 20.01.2020).

27. Казаковцев, Л.А. Постановка задачи оптимального размещения сети датчиков мониторинга загрязнения воздуха и воды / Л.А. Казаковцев, М.Н. Гудыма // Перспективы развития информационных технологий. – 2013. – № 13. – С. 19–24.

28. Карпенко, А.П. Современные алгоритмы поисковой оптимизации. Алгоритмы, вдохновленные природой / А.П. Карпенко – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014. – 446 с.

29. Конвей, Дж. Упаковки шаров, решетки и группы / Дж. Конвей, Н. Слоэн. – В 2-х томах. Пер. с англ. – М.: Мир, 1990. – 791с.

30. Курейчик, В.В. Применение генетического алгоритма решения задачи трехмерной упаковки / В.В. Курейчик, Д.В. Заруба, Д.Ю. Запорожец // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2012. – Т. 132, № 7. – С. 8-14.

31. Курейчик, В.В. Биоинспирированные методы в оптимизации / В.В. Курейчик, В.М. Курейчик, П.В. Сороколетов – М.: Физматлит, 2009. – 384 с.

32. Курейчик, В.В. Гибридный подход для решения задачи 3-х мерной упаковки / В.В. Курейчик, А.Е. Глущенко, А.Н. Орлов // Известия Южного федерального университета. Технические науки. – 2016. – №. 6(179). – С. 45–53.

33. Ланцош, К. Вариационные принципы механики / К. Ланцош. – Москва: Физматгиз, 1965. – 408 с.

34. Лебедев, П.Д. Геометрия и асимптотика волновых фронтов / П.Д. Лебедев, А.А. Успенский // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2008. – № 3. – С. 27–37.

35. Лебедев, П.Д. Построение минимаксного решения уравнения типа эйконал / П.Д. Лебедев, А.А. Успенский, В.Н. Ушаков // Труды института математики и механики. – 2008. – № 2. – С. 182–191.

36. Лебедев, П.Д. Алгоритмы построения оптимальных упаковок в трехмерном евклидовом пространстве / П.Д. Лебедев, А.А. Успенский // Proceedings of the 47th international youth school-conference «Modern problems in mathematics and its applications» (MPMA 2016). – 2016. – Vol. 1662. – С. 84–93. – URL: <http://ceur-ws.org/Vol-1662/opt5.pdf> (дата обращения: 24.01.2020).

37. Лебедев, П.Д. Итерационные алгоритмы построения оптимальных упаковок в неоднородной метрике / П.Д. Лебедев, А.А. Лемпер // Труды Международной (48-й Всероссийской) молодежной школы-конференции, Екатеринбург, 2017. – С. 98–108.

38. Лебедев, П.Д. Алгоритмы построения оптимальных упаковок шаров в эллипсоиды / П.Д. Лебедев, Н.Г. Лавров // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. – 2018. – Т. 52. – С. 59–74.

39. Липницкий, А.А. Применение генетических алгоритмов к задаче о размещении прямоугольников / А.А. Липницкий // Кибернетика и систем. анализ. – 2002. – № 6. – С. 180–184.

40. Луцан, М.В. Решение задачи трехмерной упаковки с палетированием контейнеров / М.В. Луцан, Е.В. Нужнов // Известия Южного федерального университета. Технические науки. – 2014. – № 7 (156). – С. 196–204.

41. Матвийчук, А.Р. Численные методы решения некоторых задач управления с фазовыми ограничениями / А.Р. Матвийчук, А.Г. Малев, А.А. Зимовец // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – 2011. – № 4, часть 2. – С. 228–229.

42. Матюшок, В.М. Энергоэффективность и развитие умных сетей в регионах России / В.М. Матюшок, С.А. Балашова, С.Ю. Ревина, К.Г. Гомонов // Региональная экономика и управление: электронный научный журнал. – 2019. – № 1(57). – С. 5702.

43. Михайленко, И.М. Оптимальное управление системами централизованного теплоснабжения / И.М. Михайленко // Санкт-Петербург: Стройиздат. – 2003. – 240 с.

44. Мухачева, Э.А. Генетический алгоритм блочной структуры в задачах двумерной упаковки / Э.А. Мухачева, А.С. Мухачева, А.В. Чиглинец // Информационные технологии. – 1999. – № 11. – С. 13–18.

45. Нужнов, Е.В. Трёхмерная упаковка на основе эвристических процедур / Е.В. Нужнов, А.В. Барлит // Известия Южного федерального университета, Технические науки. – 2002. – Т. 26, № 3. – С. 95–101.

46. Образцов, А.А. Разработка алгоритмов автоматизированной компоновки оборудования / А.А. Образцов, С.В. Панченко // Известия высших учебных заведений. Проблемы энергетики. – 2008. – №. 3–4. – С. 41–50.

47. Пескин, А.Е. Системы видеонаблюдения. Основы построения, проектирования и эксплуатации [Электронный ресурс] / А.Е. Пескин. – М.: Горячая линия – Телеком. – 2013. – 257 С.

48. Печенкин, В.В. Оптимизация размещения средств наблюдения в трехмерной сцене с целью минимизации «слепых зон» / В.В. Печенкин, М.С. Королёв // Компьютерная оптика. – 2017. – Vol. 41, № 2. – С. 245–253. DOI: 10.18287/2412-6179-2017-41-2-245-253.

49. Плотников, П.В. Решение минимаксной задачи размещения в трехмерном пространстве с прямоугольной метрикой / П.В. Плотников, Н.К. Кривулин // Компьютерные инструменты в образовании. – 2018. №. 1. – С. 31–50.

50. Подлазова, А.В. Генетические алгоритмы на примерах решения задач раскроя / А.В. Подлазова // Проблемы управления. – 2008. – №. 2. – С. 57–63.

51. Псиола, В.В. О приближенном решении 3-х мерной задачи об упаковке на основе эвристик / В.В. Псиола // Интеллектуальные системы. – 2007. – Т. 11, № 1. – С. 83–100.

52. Псиола, В.В. Особенности программной реализации алгоритма Packer3d / В.В. Псиола // МГУ им. М.В. Ломоносова – Москва. – 2009. – 16 с. Деп. в ВИНТИ 01.04.09, № 181-B2009.

53. Руднев, А.С. Вероятностный поиск с запретами для задачи упаковки кругов и прямоугольников в полосу / А.С. Руднев // Дискретн. анализ и исслед. опер. – 2009. – Т. 16, №4. – С. 61–86.

54. Скаков, Е.С. Метод поиска с запретами для решения оптимизационных задач / Е.С. Скаков // Сборник материалов XV Международной научно-практической конференции «Новое слово в науке и практике: гипотезы и апробация результатов исследований», Новосибирск. – 2015. – С. 166–171.

55. Стефани, Е.П. Основы расчета настройки регуляторов теплоэнергетических процессов / Е.П. Стефани // Москва: Энергия. – 1972. – 376с.

56. Стоян, Ю.Г. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования / Ю.Г. Стоян, С.В. Яковлев // – Киев: Наук, Думка. – 1986. – 286 с.

57. Тимофеева, О.П. Генетический алгоритм в оптимизации упаковки контейнеров / О.П. Тимофеева, Э.С. Соколова, К.В. Милов // Труды НГТУ им. Р.Е. Алексеева. – 2013. – №4 (101). – С. 167–172.

58. Тимофеева, О.П. Генетический алгоритм в оптимизации трехмерной упаковки блоков в контейнер / О.П. Тимофеева, Т.Ю. Чернышева, О.Н. Корелин, А.В. Волков // Труды НГТУ им. Р.Е. Алексеева. – 2017. – № 2 (117). – С. 21–27.

59. Ху, Т.Ч. Комбинаторные алгоритмы / Т.Ч. Ху, М.Т. Шинг. – Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского, 2004. – 330 с.

60. Чуб И.А. Математическая модель оптимизационной задачи размещения пожароопасных объектов с учетом рельефа области размещения / И.А. Чуб // Радіоелектроніка, інформатика, управління. – 2013. – № 1. – С. 88–93.

61. Юдаков, П.В. Задача о трехмерной упаковке и методы ее решения. Обзор / П.В. Юдаков // Инженерный вестник. – 2015. № 06.

62. Ягудин, Р.Р. Оптимизация компоновки трехмерных геометрических объектов на основе годографа вектор-функции плотного размещения / Р.Р. Ягудин // Инженерный вестник Дона. – 2012. – Т. 21, № 3. – С. 206–217.

63. Ягудин, Р.Р. Решение задачи оптимизации упаковки многогранников в параллелепипедную область на основе построения годографа вектор-функции плотного размещения / Р.Р. Ягудин // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Информатика, телекоммуникации и управление. – 2012. – № 5(157). – С. 58–62.

64. Akeb, H. A Look-Forward Heuristic for Packing Spheres into a Three-Dimensional Bin / H. Akeb // 2014 Federated Conference on Computer Science and Information Systems. – 2014. – P. 397–404.

65. Akeb, H. A Two-Stage Look-Ahead Heuristic for Packing Spheres into a Three-Dimensional Bin of Minimum Length / H. Akeb // Recent Advances in Computational Optimization: Results of the Workshop on Computational Optimization WCO 2014. – 2016. – P. 127–144.

66. Alamdari, S. Smart-Grid Electricity Allocation via Strip Packing with Slicing / S. Alamdari, T. Biedl, T. Chan, E. Grant, K. Jampani, S. Keshav, et al. // Algorithms and Data Structures, Berlin Heidelberg:Springer. – 2013. – Vol. 8037. – P. 25–36

67. Alkandari, A. 3D packing of balls in different containers by VNS / A. Alkandari // Brunel University, School of Information Systems, Computing and Mathematics. – 2013.

68. Araya, I. A beam search approach to the container loading problem / I. Araya, M.-C. Riff // Computers & Operations Research. – 2014. – Vol. 43. – P. 100–107.

69. Bansal, N. Harmonic algorithm for 3-dimensional strip packing problem / N. Bansal, X. Han, K. Iwama, M. Sviridenko, G. Zhang // Proceedings of the eighteenth ACM-SIAM symposium on Discrete algorithm (SODA 2007). – 2007. – P. 1197–1206.
70. Bansal, N. A Harmonic Algorithm for the 3D Strip Packing Problem / N. Bansal, X. Han, K. Iwama, M. Sviridenko, G. Zhang // SIAM Journal on Computing. – 2013. – Vol. 42, № 2. – P. 579–592.
71. Birgin, E.G. Minimizing the object dimensions in circle and sphere packing problems / E.G. Birgin, F.N.C. Sobral // Computers & Operations Research. – 2008. – Vol. 35. – P. 2357–2375.
72. Bischoff, E.E. A comparative evaluation of heuristics for container loading / E.E. Bischoff, M.D. Marriott // European Journal of Operational Research. – 1990. – Vol. 44, Is. 2. – P. 267–276.
73. Benjamin Sendama, N. New renewable energy allocation algorithms based on bin packing in a smart home / N. Benjamin Sendama, M. Laraki, A. Hayar, Y. Rifi // 2016 5th International Conference on Smart Cities and Green ICT Systems (SMARTGREENS), Rome, Italy, – 2016, – P. 1–7.
74. Boll, D.W. Improving dense packings of equal disks in a square / D.W. Boll, J. Donovan, R.L. Graham, B.D. Lubachevsky // The Electronic Journal of Combinatorics. – 2000. – Vol. 7, № 1, R46. – P. 1–9.
75. Bortfeldt, A. Applying Tabu Search to Container Loading Problems [Электронный ресурс] / A. Bortfeldt, H. Gehring – Operations Research Proceedings 1997. – URL: http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-58891-4_84 (дата обращения: 15.01.2020).
76. Bortfeldt, A. A hybrid genetic algorithm for the container loading problem / A. Bortfeldt, H. Gehring // European Journal of Operational Research. – 2001. – Vol. 131, Iss. 1. – P. 143–161.
77. Bortfeldt, A. A parallel tabu search algorithm for solving the container loading problem / A. Bortfeldt, H. Gehring, D. Mack // Parallel Computing. – 2003. – Vol. 29, № 5. – P. 641–662.

78. Bortfeldt, A. A genetic algorithm for the two-dimensional strip packing problem with rectangular pieces / A. Bortfeldt // *Eur. J. Oper. Research.* – 2006. – Vol. 172. – P. 814–837.
79. Bortfeldt, A. A heuristic for the three-dimensional strip packing problem / A. Bortfeldt, D. Mack // *European Journal of Operational Research.* – 2007. – Vol. 183, № 3. – P. 1267–1279.
80. Burtseva, L. Packing of monosized spheres in a cylindrical container: Models and approaches / L. Burtseva, B. Valdez Salas, F. Werner, V. Petranovskii // *Revista Mexicana de Fisica.* – 2015. – Vol. 61. – P. 20–27.
81. Chen, D.Z. Algorithms for congruent sphere packing and applications / D.Z. Chen, Y. Huang, Y. Li, J. Xu // *Proceedings of Symposium on Computational Geometry'2001*, Medford, MA, USA. – 2001. – P. 212–221.
82. Campbell, M.I. Optimal Three-Dimensional Placement of Heat Generating Electronic Components / M.I. Campbell, C.H. Amon, J. Cagan // *ASME. Journal of Electronic Packaging.* – 1997. – Vol. 119(2). – P. 106–113.
83. Caprara, A. Packing 2-dimensional bins in harmony / A. Caprara // *Proceeding of the 43rd Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS).* – 2002. – P. 490–499.
84. Ceschia, S. Local search for a multi-drop multi-container loading problem / S. Ceschia, A. Schaerf // *Journal of Heuristics.* – 2013. – Vol. 19, Iss. 2. – P. 275–294.
85. Cetinay, H. Optimal siting and sizing of wind farms / H. Cetinay, F.A. Kuipers, A.N. Guven // *Renewable Energy.* – 2017. – Vol. 101. – P. 51–58.
86. Chen, C.H. The multiple container loading cost minimization problem / C.H. Che, W. Huang, A. Lim, W. Zhu // *European Journal of Operational Research.* – 2011. – Vol. 214, № 3. – P. 501–511.
87. Chernov, N. Mathematical model and efficient algorithms for object packing problem / N. Chernov, Yu. Stoyan, T. Romanova // *Computational Geometry.* – 2010. – Vol. 43, № 5. – P. 535–553.

88. Coffman, E.G. Performance bounds for level-oriented two-dimensional packing algorithms / E.G. Coffman, M.R. Garey, D.S. Johnson, R.E. Tarjan // *SIAM Journal on Computing*. – 1980. – Vol. 9. – P. 808–826.

89. Correcher, J.F. Solving a large multicontainer loading problem in the car manufacturing industry / J.F. Correcher and M.T. Alonso and F. Parreño and R. Alvarez-Valdes / *Computers & Operations Research*. – 2017. – Vol. 82. – P. 139–152.

90. Dereli, T. A hybrid ‘bee(s) algorithm’ for solving container loading problems / T. Dereli, G.S. Das // *Applied Soft Computing*. – 2011. – Vol. 11, № 2. – P. 2854–2862.

91. Egeblad, J. Heuristic approaches for the two- and three-dimensional knapsack packing problem / J. Egeblad, D. Pisinger // *Computers & Operations Research*. – 2009. – Vol. 36(4). – P. 1026–1049.

92. Elistratov, V.V. Optimization of wind-diesel power plants parameters and placement for power supply of Russia’s northern regions consumers / V.V. Elistratov, I.V. Bogun, V.I. Kasina // *16th Conference on Electrical Machines, Drives and Power Systems (ELMA)*, Varna, Bulgaria. – 2019. – P. 1–5.

93. European Smart Grid technology platform: Vision and strategy for Europe’s networks of the future // *European Commission*. – Brussels. – 2006. – P. 23.

94. Fanslau, T. A Tree Search Algorithm for Solving the Container Loading Problem / T. Fanslau, A. Bortfeldt // *INFORMS Journal on Computing*. – 2010. – Vol. 22, № 2. – P. 222–235.

95. Fodor, F. The densest packing of 12 congruent circles in a circle / F. Fodor // *Contributions to Algebra and Geometry*. – 2000. – Vol. 43. – P. 401–409.

96. Fodor, F. The densest packing of 13 congruent circles in a circle / F. Fodor // *Contributions to Algebra and Geometry*. – 2003. – Vol. 40, № 2. – P. 431–440.

97. Fodor, F. The densest packing of 19 congruent circles in a circle / F. Fodor // *Contributions to Algebra and Geometry*. – 1999. – Vol. 74, № 2. – P. 139–145.

98. Fredriksson, H. Optimal placement of charging stations for electric vehicles in large-scale transportation networks / H. Fredriksson, M. Dahl, and J. Holmgren // *Procedia Computer Science*. – 2019. – Vol. 160. – P. 77–84.

99. Fu, L. Hard sphere packings within cylinders / L. Fu, W. Steinhardt, H. Zhao, J. Socolar, P. Charbonneau // *Soft Matter*. – 2016. – Vol. 12. – P. 2505–2514.
100. Gaines, J.C. Random close packing in protein cores / Gaines, Jennifer C. and Smith, W. Wendell and Regan, Lynne and O'Hern, Corey S. // *Phys. Rev. E*. – 2016. – Vol. 93, № 3. – URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.93.032415> (дата обращения: 10.01.2020).
101. Gan, M. Predicting packing characteristics of particles of arbitrary shapes / M. Gan, N. Gopinathan, X. Jia, and R.A. Williams // *KONA Powder & Particle Journal*. – 2004. – Vol. 22. – P. 82–93.
102. Gehring, H. A computer-based heuristic for packing pooled shipment containers / H. Gehring, K. Menschner, M. Meyer // *European Journal of Operational Research*. – 1990. – Vol. 44, Is. 2. – P. 277–288.
103. Gensane, T. Dense packings of equal spheres in a larger sphere: a list of result / T. Gensane // *Les Cahiers du LMPA J. Liouville*. – 2003. – Vol. 188. – URL: <https://oeis.org/A084829/a084829.txt> (дата обращения: 24.12.2019).
104. Gensane, T. Dense packings of equal spheres in a cube / T. Gensane // *Electronic Journal of Combinatorics*. – 2004. – Vol. 11, № 1. – R33.
105. George, J.A. A heuristic for packing boxes into a container / J.A. George, D.F. Robinson // *Computers & Operations Research*. – 1980. – Vol. 7, № 3. – P. 147–156.
106. Glover, F. Tabu search – part I / F. Glover // *ORSA Journal on computing*. – 1989. – T. 1, № 3. – P. 190–206.
107. Glover, F. Tabu search – part II / F. Glover // *ORSA Journal on computing*. – 1990. – T. 2, № 1. – P. 4–32.
108. Graham, R.L. Dense Packings of Equal Disks in an Equilateral Triangle: From 22 to 34 and Beyond / R.L. Graham, B.D. Lubachevsky // *The Electronic Journal of Combinatorics*. – 1995. – Vol. 2.
109. Graham R.L. Repeated patterns of dense packings of equal disks in a square / R.L. Graham, B.D. Lubachevsky, // *The Electronic Journal of Combinatorics*. – 1996. – Vol. 3, № 1, R16. – P. 1–17.

110. Grid 2030: A national vision for electricity's second 100 years // Office of Electric Transmission and Distribution, US State Department of Energy. Washington. – 2003. – P. 36.

111. Grosso, A. Solving the problem of packing equal and unequal circles in a circular container / A. Grosso, A.R. Jamali, M. Locatelli, F. Schoen // Journal of Global Optimization. – 2010. – Vol. 47, № 1. – P. 63–81.

112. Guasque, A. Energy efficient partition allocation in mixed-criticality systems / A. Guasque, P. Balbastre, A. Crespo, S. Peiró // Public Library of Science ONE. – 2019. – Vol. 14(3).

113. Hales, T. Cannonballs and honeycombs / T. Hales // Notices of the American Mathematical Society. – 2000. – Vol. 47. – P. 440–449.

114. Hales, T. A formal proof of the Kepler conjecture / T. Hales, M. Adams, G. Bauer, T. Dang, J. Harrison, L. Hoang // Forum of Mathematics, Pi. – 2017. – Vol. 5, № 2. – URL: <http://dx.doi.org/10.1017/fmp.2017.1> (дата обращения: 14.12.2018).

115. Hayat, H. The State-of-the-Art of Sensors and Environmental Monitoring Technologies in Buildings / H. Hayat, T. Griffiths, D. Brennan, et al. // Sensors (Basel, Switzerland). – 2019. – Vol. 19(17):3648. DOI:10.3390/s19173648.

116. He, D. Computer Simulation of the Random Packing of Unequal Particles / D. He, N.N. Ekere, L. Cai // Physical review E. – 2000. – Vol. 60, № 6. – P. 7098–7104.

117. He, K. Solving the single-container loading problem by a fast heuristic method / K. He, W. Huang // Optimization Methods and Software. – 2010. – Vol. 25, № 2. – P. 263–277.

118. He, K. An efficient placement heuristic for three-dimensional rectangular packing / K. He, W. Huang // Computer & Operations Research – 2011. – Vol. 38, № 1. – P. 227–233.

119. Hemminki, J. Container Loading with Variable Strategies in Each Layer / J. Hemminki // Institute for Applied Mathematics, University of Turku, Turku, Finland. – 1994.

120. Hengeveld, D.W. Optimal Placement of Electronic Components to Minimize Heat Flux Nonuniformities / D.W. Hengeveld, J.E. Braun, E.A. Groll, A.D. Williams // *Journal of Spacecraft and Rockets*. – 2011. – Vol. 48(4). – P. 556–563.
121. Hermann, G. Parallel genetic algorithm for solving the container loading problem / A. Bortfeldt, G. Hermann // *Internat. Trans. in Operat. Research*. – 2002. – V. 9, № 4. – P. 497–511.
122. Hifi, M. Width beam and hill-climbing strategies for the three-dimensional sphere packing problem / M. Hifi, L. Yousef // *2014 Federated Conference on Computer Science and Information Systems*. – 2014. – P. 421–428.
123. Holland J.H. *Adaptation in Natural and Artificial Systems* / J.H. Holland – The University of Michigan Press, University of Michigan, Ann Arbor, 1975.
124. Huang, W. Greedy algorithms for packing unequal circles into a rectangular container / W. Huang, L. Yu // *Journal of the Operational Research Society*. – 2005. – Vol. 56. – P. 539–548.
125. Huang, W.Q. A caving degree approach for the single container loading problem/ W.Q. Huang, K. He // *European Journal of Operational Research*. – 2009. – Vol. 196(1). – P. 93–101.
126. Huang, W. Serial symmetrical relocation algorithm for the equal sphere packing problem / W. Huang, L. Yu // *CoRR*. – 2012. abs/1202.4149.
127. Ismail, F.S. Optimization of electronics component placement design on PCB using self organizing genetic algorithm (SOGA) / F.S. Ismail, R. Yusof, M. Khalid // *Journal of Intelligent Manufacturing - Intel Manuf.* – 2012. – Vol. 23(3). – P. 883–895.
128. Iwasawa, H. A heuristic algorithm for the container loading problem with complex loading constraints / H. Iwasawa, Y. Hu, H. Hashimoto, S. Imahori, M. Yagiura // *Journal of Advanced Mechanical Design Systems and Manufacturing*. – 2016. – Vol. 10(3). – P. 1–12.
129. Kazakov, A.L. An algorithm for packing circles of two types in a fixed size container with Non-Euclidean metric / A.L. Kazakov, A.A. Lempert, Q.M. Le // *CEUR-Workshop Proceedings*. – 2017. – Vol. 1975. – P. 281–292.

130. Kubach, T. Greedy algorithms for packing unequal spheres into a cuboidal strip or a cuboid / T. Kubach, A. Bortfeldt, T. Tilli, H. Gehring // *Asia-Pacific Journal of Operational Research*. – 2011. – Vol. 28, № 06. – P. 739–753.

131. Lempert, A.A. Multiple covering of a closed set on a plane with non-Euclidean metrics / A.A. Lempert, Q.M. Le // *IFAC-PapersOnLine*. – 2018. – Vol. 51, № 32. – P. 850–854.

132. Lempert, A.A. On reserve and double covering problems for the sets with non-Euclidean metrics / A.A. Lempert, A.L. Kazakov, Q.M. Le // *Yugoslav Journal Operation Research*. – 2019. – Vol. 29, № 1. – P. 69–79.

133. Lempert, A.A. On the thinnest covering of fixed size containers with Non-Euclidean metric by incongruent circles / A.A. Lempert, A.L. Kazakov, Q.M. Le // Сборник тезисов международной конференции «Теория математической оптимизации и исследование операций – MOTOR 2019». Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2019. – С. 113.

134. Liu, J. A novel hybrid tabu search approach to container loading / J. Liu, Y. Yue, Z. Dong, C. Maple, M. Keech // *Computers & Operations Research*. – 2011. – Vol. 38, №4. – P. 797–807.

135. Lodi, A. Heuristic algorithms for the three-dimensional bin packing problem / A. Lodi, S. Martello, D. Vigo // *European Journal of Operational Research*. – 2002. – Vol. 141. – P. 410–420.

136. Lubachevsky, B.D. Geometric properties of random disk packings / B.D. Lubachevsky, F.H. Stillinger // *J. Statistical Physics*. – 1990. – Vol. 60. – P. 561–583.

137. Lubachevsky, B.D. How to simulate billiards and similar systems / B.D. Lubachevsky // *Journal of Computational Physics*. – 1991. – Vol. 94. – P. 255–283.

138. Lubachevsky, B.D. Curved hexagonal packings of equal disks in a circle / B.D. Lubachevsky, R.L. Graham // *Discrete & Computational Geometry*. – 1997. – Vol. 18. – P. 179–194.

139. Mack, D. A parallel hybrid local search algorithm for the container loading problem / D. Mack, A. Bortfeldt, H. Gehring // *International Transactions in Operational Research*. – 2004. – Vol. 11, № 5. – P. 511–533.

140. Markót, M.Cs. A new verified optimization technique for the «packing circles in a unit square» problems / M.Cs. Markót, T.A. Csendes // *SIAM Journal on Optimization*. – 2005. – V. 16. – P. 193–219.

141. Marmidis, G. Optimal placement of wind turbines in a wind park using Monte Carlo simulation / G. Marmidis, S. Lazarou, E. Pyrgioti // *Renewable Energy*. – 2008. – Vol. 33(7). – P. 1455–1460.

142. Melissen, J.B.M. Densest packing of eleven congruent circles in a circle / J.B.M. Melissen // *Geometriae Dedicata*. – 1994. – Vol. 50. – P. 15–25.

143. M'Hallah, R. Packing unit spheres into a cube using VNS / R. M'Hallah, A. Alkandari // *Electronic Notes in Discrete Mathematics*. – 2012. – Vol. 39C. – P. 201–208.

144. M'Hallah, R. Packing unit spheres into the smallest sphere using VNS and NLP / R. M'Hallah, A. Alkandari, N. Mladenovic // *Computers Operations Research*. – 2013. – Vol. 40. – P. 603–615.

145. Mueller, G.E. Numerically packing spheres in cylinders / G.E. Mueller // *Powder Technology*. – 2005. – Vol. 159. – P. 105–110.

146. Mughal, A. Dense packings of spheres in cylinders: Simulations / A. Mughal, H. Chan, D. Weaire, S. Hutzler // *Physical Review E*. – 2012. – Vol. 85.

147. Murata, H. VLSI module placement based on rectangle-packing by the sequence-pair / H. Murata, K. Fujiyoshi, S. Nakatake, Y. Kajitani // *IEEE Trans. on CAD of Integrated Circuits and Systems*. – 1996. – Vol. 15. – P. 1518–1524.

148. Nurmela, K.J. Packing up to 50 equal circles in a square / K.J.Nurmela, P.R.J. Ostergard // *Discrete and Computational Geometry*. – 1997. – Vol. 18. – P. 111–120.

149. Nurmela, K.J. More Optimal Packings of Equal Circles in a Square / K.J.Nurmela, P.R.J. Ostergard // *Discrete & Computational Geometry*. – 1999. – Vol. 22. – P. 439–457.

150. Ogunjuyigbe, A.S.O. Optimal placement of wind turbines within a wind farm considering multi-directional wind speed using two-stage genetic algorithm. /

A.S.O. Ogunjuyigbe, T.R. Ayodele, O.D. Bamgboje // *Frontiers in Energy*. – 2017. – P. 1–16.

151. Parreno, F. Neighborhood structures for the container loading problem: a VNS implementation / F. Parreno, R. Alvarez-Valdes, J.F. Oliveira, J.M. Tamarit // *Journal of Heuristics*. – 2010. – Vol. 16, № 1. – P. 1–22.

152. Paul, S. Optimal placement of wind power plant in a radial distribution network considering plant reliability / S. Paul, H. Karbouj, Z.H. Rather // 2018 International Conference on Power System Technology (POWERCON), Guangzhou, China. – 2018 – P. 2021–2026.

153. Pfoertner, H. Densest packings of n equal spheres in a sphere of radius 1 / H. Pfoertner // – 2008. – URL: <http://www.randomwalk.de/sphere/insphr/spisbest.txt> (дата обращения: 03.12.2019).

154. Phonrattanasak, P. Optimal placement of EV fast charging stations considering the impact on electrical distribution and traffic condition / P. Phonrattanasak, N. Leeprechanon // 2014 International Conference and Utility Exhibition on Green Energy for Sustainable Development (ICUE), Pattaya, Thailand. – 2014. – P. 1–6.

155. Pisinger, D. Heuristics for the container loading problem / D. Pisinger // *European Journal of Operational Research*. – 2002. – Vol. 141, Is. 2. – P. 382–392.

156. Pisinger, D. Using decomposition techniques and constraint programming for solving the two-dimensional bin-packing problem / D. Pisinger, M. Sigurd // *INFORMS Journal on Computing*. – 2007. – Vol. 19. – P. 36–51.

157. Ranjan, A. Smart grid power scheduling via bottom left decreasing height packing / A. Ranjan, P. Khargonekar, S. Sahni // 2016 IEEE Symposium on Computers and Communication (ISCC), Messina, Italy. – 2016. – P. 1128–1133.

158. Reddy, M.S.K. Optimal Placement of Electric Vehicle Charging Stations in Radial Distribution System along with Reconfiguration / M.S.K. Reddy, K. Selvajyothi // 2019 IEEE 1st International Conference on Energy, Systems and Information Processing (ICESIP), Chennai, India. – 2019. – P. 1–6.

159. Ren, J. A tree search method for the container loading problem with shipment priority / Jidong Ren and Yajie Tian and Tetsuo Sawaragi // *European Journal of Operational Research*. – 2011. – Vol. 214, № 3. – P. 526–535.

160. Ren, J. A priority-considering approach for the multiple container loading problem / J. Ren, Y. Tian, T. Sawaragi // *International Journal of Metaheuristics*. – 2011. – Vol. 1. – P. 298–316.

161. Satomi, Y. Thermal placement on PCB of components including 3D ICs / Y. Satomi, K. Hachiya, T. Kanamoto, R. Watanabe, A. Kurokawa // *IEICE Electronics Express*. – 2020, – Vol. 17, Iss. 3. – P. 20190737.

162. Silva, J.L. Castro. A greedy search for the three-dimensional bin packing problem: the packing static stability case / J.L. Castro Silva, N.Y. Soma, N. Maculan // *International Transactions in Operational Research*. – 2003. – Vol. 10(2). – P. 141–153.

163. Specht, E. Packomania [Электронные ресурс]. – 2019. – URL: <http://www.packomania.com> (дата обращения: 03.02.2019).

164. Stoyan, Y.G. Packing of convex polytopes into a parallelepiped / Y.G. Stoyan, N.I. Gil, G. Scheithauer, A. Pankratov, I. Magdalina // *Optimization*. – 2005. – Vol. 54, № 2. – P. 215–235.

165. Stoyan, Y.G. Packing identical spheres into a rectangular parallelepiped / Y.G. Stoyan, G. Yaskov // In: Bortfeldt A., Homberger J., Kopfer H., Pankratz G., Strangmeier R. (eds) *Intelligent Decision Support*. Gabler, Germany, 2008. – P. 47–67.

166. Stoyan, Y.G. Packing identical spheres into a cylinder / Y.G. Stoyan, G. Yaskov // *International Transactions in Operational Research*. – 2010. – Vol. 17. – P. 51–70.

167. Stoyan, Y.G. Packing congruent spheres into a multi-connected polyhedral domain / Y.G. Stoyan, G. Yaskov // *International Transactions in Operational Research*. – 2013. – Vol. 20.

168. Stoyan Y. Optimized Packings in Space Engineering Applications: Part I / Y. Stoyan et al. // *Modeling and Optimization in Space Engineering*. – Cham: Springer Optimization and Its Applications, 2019. – P. 395–437.

169. Sutou, A. Global Optimization Approach to Unequal Global Optimization Approach to Unequal Sphere Packing Problems in 3D / A. Sutou, Y. Dai // *Journal of Optimization Theory and Applications*. – 2002. – Vol. 114, № 3. – P. 671–694.

170. Szabo, P.G. New approaches to circle packing in square with program codes / P.G. Szabo, M.Cs. Markot, T. Csendes, E. Specht, L.G. Casado, I. Garcia. – N.Y.: Springer Verlag, 2007. – 390 p.

171. Tian, T. The multiple container loading problem with preference / T. Tian, W. Zhu, A. Lim, L. Wei // *European Journal of Operational Research*. – 2016. – Vol. 248(1). – P. 84–94.

172. Toffolo, T. A.M. A two-dimensional heuristic decomposition approach to a three-dimensional multiple container loading problem / T. A.M. Toffolo, E. Esprit, T. Wauters, G.V. Berghe // *European Journal of Operational Research*. – 2017. – Vol. 257, № 2. – P. 526–538.

173. Toth, G.F. Packing and covering [Электронный ресурс] / G.F. Toth // *Handbook of Discrete and Computational Geometry*. – URL: <https://pdfs.semanticscholar.org/affb/ce2b9b2260f72d65e21b9d22bf88a4a231e7.pdf> (дата обращения: 20.12.2019).

174. Wang, J. Packing of unequal spheres and automated radiosurgical treatment planning / J. Wang // *Journal of Combinatorial Optimization*. – 1999. – Vol. 3. – P. 453–463.

175. Wang, Z. A heuristic for the container loading problem: A tertiary-tree-based dynamic space decomposition approach / Z. Wang, K.W. Li, J.K. Levy // *European Journal of Operational Research*. – 2008. – Vol. 191. – P. 86–99.

176. Webb, M.D. Random particle packing with large particle size variations using reduced-dimension algorithms / M.D. Webb, I. Lee Davis // *Powder Technology*. – 2006. – Vol. 167, № 1. – P. 10–19.

177. Yamada, S. Multi-sized Sphere Packing in Containers: Optimization Formula for Obtaining the Highest Density with Two Different Sized Spheres / S. Yamada, J. Kanno, M. Miyauchi // *IPSJ Online Transactions*. – 2011. – Vol. 4. – P. 126–133.

178. Zhu, W. A new iterative-doubling Greedy–Lookahead algorithm for the single container loading problem / W. Zhu, A. Lim // European Journal of Operational Research. – 2012. – Vol. 222, № 3. – P. 408–417.

Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2020611192

**ТУШОЛ (Трехмерные Упаковки Шаров, Оптимизация,
Логистика)**

Правообладатель: *Федеральное государственное бюджетное
учреждение науки Институт динамики систем и теории
управления имени В.М. Матросова Сибирского отделения
Российской академии наук (RU)*

Авторы: *Казаков Александр Леонидович (RU), Лемперт Анна
Ананиевна (RU), Та Чунг Тхань (VN)*



Заявка № 2020610238

Дата поступления 20 января 2020 г.

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ 27 января 2020 г.

Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности

Г.Н. Ивалиев

 А.А. Засядко