На правах рукописи

ТА ЧУНГ ТХАНЬ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ ЗАДАЧ РАЗМЕЩЕНИЯ НА ОСНОВЕ ОПТИКО-ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ПОДХОДА

Специальность 05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Иркутск – 2021

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Иркутский национальный исследовательский технический университет» (ФГБОУ ВО «ИРНИТУ»)

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор, профессор РАН **Казаков Александр Леонидович**
Официальные оппоненты:	**Аргучинцев Александр Валерьевич**, доктор физико-математических наук, профессор, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Иркутский государственный университет», Институт математики и информационных технологий, кафедра Вычислительной математики и оптимизации, заведующий кафедрой
	Зароднюк Максим Сергеевич, кандидат физико-математических наук, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева Сибирского отделения Российской академии наук, отдел теплосиловых систем, научный сотрудник
Ведущая организация:	Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина», г. Екатеринбург

Защита состоится «29» июня 2021 г. в 14.00 на заседании диссертационного совета Д 003.017.01, созданного на базе Федерального государственного бюджетного учреждения науки Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева Сибирского отделения Российской академии наук (ИСЭМ СО РАН) по адресу: 664033, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 130, каб. 355.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИСЭМ СО РАН по адресу: г. Иркутск, ул. Лермонтова, 130, каб. 407, и на сайте: https://isem.irk.ru/dissert/case/DIS-2021-6/

Отзывы на автореферат в двух экземплярах с подписью составителя, заверенные печатью организации, просим направлять по адресу: 664033, г. Иркутск, ул. Лермонтова 130, на имя ученого секретаря диссертационного совета.

Автореферат разослан «___» ___________ 2021 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 003.017.01,
доктор технических наук, профессор **Клер Александр Матвеевич**

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность исследования.

В современных технических системах важное место занимают задачи компоновки и размещения трехмерных объектов с известными свойствами. Помимо непосредственно задачи упаковки товаров в контейнеры, такие постановки возникают в медицине при планировании автоматизированного радиохирургического лечения, в материаловедении при изучении и моделировании структуры молекул вещества, в логистике при проектировании сети обслуживающих центров.

В современной энергетике в последние годы большую популярность получила концепция Smart Grid, под которыми понимаются интеллектуальные сети электроснабжения, которые, работая в автоматическом режиме, позволяют повышать эффективность, надёжность, экономическую выгоду, а также устойчивость производства и распределения электроэнергии. В США, Европейском Союзе данная концепция развивается уже около 15 лет, в России – более 10 лет. Большой вклад в развитие и применение в российских условиях концепции Smart Grid внесли и продолжают вносить Н.И. Воропай, В.А. Стенников, Л.В. Массель, И.Н. Колосок, В.К. Аверьянов. В ходе проведенных исследований была выявлена важность решения проблемы мониторинга при развитии интеллектуальных энергетических систем. При этом вопросы оптимальной организации систем наблюдения применительно к задачам энергетики нуждаются в дополнительном исследовании, что делает актуальным рассмотрение задач оптимального размещения физических объектов, в том числе в пространстве, в контексте реализации концепции Smart Grid. Задачи оптимального размещения на плоскости актуальны в связи с развитием малой энергетики, в частности, при размещении ветряных электростанции в ветропарке (Елистратов В.В., Фредриксон Г., Пауль С., Редди М.), а также при строительстве зарядных станций для электромобилей в крупных транспортных сетях (Фредриксон Г., Редди М., Холмгрен Ж.).

Кроме того, трехмерные задачи размещения возникают при построении систем мониторинга в системах, где радиус действия датчиков может существенным образом зависеть от свойств окружающей среды, в которой они находятся. Особенно ярко это проявляется в устройствах, работающих по типу сонара (гидролокатора), когда время передачи сигнала используется для оценки расстояния. Таким образом, для исследования данных классов задач появляется необходимость применять специальные неевклидовы метрики, описывающие изменение исследуемой среды. Отметим, что в представленных системах сигнал, как правило, может распространяться в любую сторону, т.е. диапазон наблюдения обычно имеет сферическую форму. Тогда задачи размещения датчиков наблюдения приводятся к задачам о нахождении наиболее плотных упаковок шаров и наиболее экономных покрытий шарами.

При исследовании проблем размещения трехмерных объектов наиболее часто используются следующие подходы: генетические методы (Д.Б. Заруба, В.В. Курейчик, О.П. Тимофеева, Ж. Хемминки), эвристические подходы (Х. Акеб, Дж.А. Джордж, Е.Е. Бишоф, Х. Геринг, Д. Писингер), метод поиск с запретами (А. Бортфельдт, Ц. Лю, Д. Мак), метод поиск по окрестности (Р. М'Халла, Ф. Паррено). Кроме того, многие исследователи постарались применить гибридные методы (Т. Дерели) и также жадные методы (В. Хуан, Т. Кубач, Дж.Л. Кастро Сильва).

Отметим, что большинство известных алгоритмов решения задач размещения объектов работает только с евклидовым расстоянием и выпуклым множеством-контейнером. В случае же невыпуклого и, особенно, неодносвязного множества сложность математической формализации и вычислительная трудность получающихся задач существенно возрастают.

Для исследования представленной задачи в неевклидовом пространстве и с невыпуклым множеством-контейнером в данной диссертационной работе предлагается использовать оптико-геометрический подход и метод бильярдного моделирования.

Объект и предмет исследования. Объектом диссертационного исследования являются системы мониторинга и обеспечения безопасности, в которых требуется определить оптимальное местоположение устройств наблюдения и защиты в трехмерном пространстве. Предметом исследования являются математические модели размещения физических объектов в системах мониторинга, необходимых при реализации концепции Smart Grid, и обеспечения безопасности, имеющие вид задач непрерывной оптимизации, и численные методы их решения.

Цель и задачи исследования. Целью диссертационной работы является разработка технологии размещения физических объектов с предопределенными свойствами в трехмерном пространстве на основе покрытия и упаковки шаров в ограниченное множество. Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

1. Выполнить формализацию трехмерных задач размещения в пространстве с неевклидовыми метриками в форме: а) математических задач о покрытиях и упаковках равных шаров; б) математических задач об упаковках шаров разного радиуса.

2. Разработать вычислительные алгоритмы решения поставленных в п. 1 задач в пространстве с неевклидовым расстоянием на основе оптико-геометрического подхода и метода бильярдного моделирования.

3. Разработать программный комплекс, реализующий предложенные численные алгоритмы, и провести вычислительные эксперименты для проверки работоспособности алгоритма и корректности вычислений.

4. Идентифицировать модели для конкретных прикладных задач из области энергетики и безопасности, и провести их исследование при использовании созданного программного комплекса.

Методы исследования. При выполнении диссертационного исследования применяются следующие методы: математического моделирования, оптимизации, вычислительной геометрии, геометрической оптики. Для реализации программной системы используются среда разработки Visual Studio 2012 (язык программирования C#) с дополнительной библиотекой HelixToolkit и пакет MATLAB для 3-D визуализации результатов расчетов.

Тематика работы соответствует следующим пунктам паспорта специальности 05.13.18: пункт 1. «Разработка новых математических методов моделирования объектов и явлений» – в части формализации задач размещения трехмерных физических объектов в виде задач о покрытии и упаковке шаров в ограниченное трехмерное множество со специальными неевклидовыми метриками; пункт 4. «Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента» – в части разработки и реализации численных алгоритмов для решения задач о покрытии и упаковке шаров в трехмерное множество в виде комплекса программ «ТУШОЛ»; пункт 5 «Комплексные исследования научных и технических проблем с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента» – в части решения модельных и прикладных задач из области энергетики и безопасности.

Научная новизна. Научная новизна исследования состоит в следующем:

1. Построены математические модели трехмерного размещения физических объектов на основе: а) задач о покрытиях и упаковках равных шаров; б) задач об упаковках шаров разного радиуса в пространстве со специальной неевклидовой метрикой. Для рассматриваемых задач модели с такой метрикой предложены впервые.

2. Разработаны новые численные методы разбиения трехмерного пространства на зоны Дирихле на основе оптико-геометрического подхода при разных скоростях распространения световой волны. Ранее представленные методы использовались только в двумерном пространстве.

3. Разработаны новые численные алгоритмы решения задач о покрытиях и упаковках шаров на основе оптико-геометрического подхода и метода бильярдного моделирования. В отличие от известных методов, разработанные алгоритмы работают не только с выпуклыми множествами, но и с невыпуклыми и неодносвязными множествами в пространстве с неевклидовой метрикой.

4. Создан новый программный комплекс «ТУШОЛ», реализующий предложенные численные алгоритмы и позволяющий решать различные прикладные задачи, в частности, из области энергетики (при проектировании систем мониторинга в рамках реализации концепции Smart Grid), а также безопасности (при создании систем мониторинга и точечной физической защиты).

Достоверность и обоснованность. Достоверность и обоснованность вычислительных результатов обеспечиваются применением фундаментальных физических принципов и корректностью выбора условий для построения математических моделей и численных методов решения, согласованностью экспериментальных и теоретических данных.

Теоретическая значимость состоит в следующем:

1. Формализация задач размещения объектов в виде задач о покрытии и упаковке вносит вклад в развитие теории математического моделирования.

2. Предложенный метод разбиения трехмерных объектов на множество плоских геометрических фигур вносит вклад в развитие теории аппроксимации.

3. Разработанные вычисленные алгоритмы на основе оптико-геометрического подхода и метода бильярдного моделирования вносят вклад в развитие методов решения трехмерных задач размещения.

4. Построенные модели и результаты решения прикладных задач вносят вклад в развитие концепции Smart Grid.

Практическая значимость.

1. Разработанный программный комплекс «ТУШОЛ» позволяет строить решения задач размещения трехмерных физических объектов в ограниченное множество, возникающих в проектировании систем мониторинга в "умных зданиях" при реализации концепции Smart Grid. Предложенные численные алгоритмы могут быть использованы для решения других прикладных задач, таких как оптимальная загрузка контейнера, обеспечение безопасности охраняемого объекта.

2. Полученные результаты диссертационного исследования могут использованы в процессе обучения дисциплины «Системология», получен акт о внедрении результатов диссертационной работы в учебный процесс ФГБОУ ВО ИРНИТУ.

Апробация результатов исследования. Работа выполнялась в институте Информационных технологий и анализа данных ФГБОУ ВО ИРНИТУ. Основные результаты диссертационного исследования докладывались и обсуждались на следующих научных конференциях: 17th IFAC Workshop on control applications of optimization CAO 2018 (г. Екатеринбург. 2018); Всероссийская молодёжная научно-практическая конференция «Винеровские чтения» (ИРНИТУ, г. Иркутск. 2018, 2019); Проблемы информационного и математического моделирования сложных систем (ПИМС) (ИрГУПС, г. Иркутск. 2017, 2018); Международный семинар «Критические инфраструктуры в цифровом мире» (IWCI – 2019, 2021) (г. Байкальск, 2019, 2021); III Международный семинар «Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона – Якоби» (г. Екатеринбург, 2020); The Second International Conference on Unconventional Modeling, Simulation & Optimization [UMSO2019] & The Fifteenth International Symposium on Management Engineering [ISME2019] (г. Ханой, Вьетнам, 2019).

Публикации. Результаты диссертационного исследования опубликованы в 07 научных работах, из них 1 статья опубликована в журнале, индексируемом в базе данных Web of Science, 1 статьи в изданиях, индексируемых в базе данных Scopus и 2 статьи в журналах, входящих в Перечень ВАК. Получено 1 свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ.

Личный вклад. Все выносимые на защиту результаты исследования, включая разработанные численные методы, получены лично автором. Построение математических моделей выполнено совместно с д.ф.-м.н. А.Л. Казаковым и к.ф.-м.н. А.А. Лемперт. Программный комплекс «ТУШОЛ» создан в неделимом соавторстве с д.ф.-м.н. А.Л. Казаковым и к.ф.-м.н. А.А. Лемперт, при этом проектирование архитектуры и программная реализация выполнены автором диссертации, также лично автором выполнено решение прикладных задач из области энергетики и безопасности.

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы из 178 наименований. Объем данной работы составляет 133 страниц текста, иллюстрированного 43 рисунками и 16 таблицами.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

Во введении обосновывается актуальность темы диссертационного исследования, сформулирована его цель и задачи, определены объект, предмет, методы исследования, раскрыта научная новизна и практическая значимость результатов исследования, включая приложения в области энергетики, изложены основные научные положения, выносимые на защиту, приведены структура и краткий обзор содержания работы.

В главе 1 представлен обзор математических моделей размещения трехмерных объектов в ограниченном множестве, большинство которых имеет вид задач компоновки. Описаны наиболее известные и эффективные численные методы решения задач о покрытиях и упаковках шаров в трехмерном пространстве. Приведено описание оптико-геометрического подхода и метода бильярдного моделирования, обсуждена возможность их применения для решения задач размещения в трехмерном пространстве с неевклидовой метрикой.

В главе 2 в п. 2.1 описана математическая формализация задачи размещения трехмерных физических объектов. Обсуждаются различные варианты постановок задач из предметной области, которые приводят к необходимости применения различных типов и способов модификации математической модели.

Так, если речь идет о размещении датчиков наблюдения в системах мониторинга, то ключевым моментом является обеспечение полного покрытия полигона обслуживания. При этом зоны, покрываемые каждым датчиком, во-первых, могут пересекаться, во-вторых, радиус действия зависит от свойства окружающей среды (оптической плотности). При построении системы мониторинга "умного дома", функционирующего как элемент интеллектуальной энергетической системы, возникает дополнительное требование, связанное с тем, что датчики, как правило, могут располагаться только на границе полигона: на стенах (кроме окон и дверей), на полу, на потолке.

В случае размещения устройств, оказывающих физическое воздействие, например, в системах точечной физической защиты, пересечение зон обслуживания не допускается, при этом требуется охватить как можно большую долю полигона обслуживания. Кроме того, допускается использование как одинаковых датчиков или устройств, так и различных.

Пусть в трехмерном пространстве имеется некоторая ограниченная область $X \subseteq \mathbb{R}^3$; заданное ограниченное трехмерное множество $P \subset X$ с непрерывной границей ∂P – полигон обслуживания; n – количество датчиков; $O_i(x_i, y_i, z_i)$ – координаты i-ого датчика, $i = 1,...,n$; $c(x, y, z) \geq 0$ – непрерывная функция, задающая оптическую плотность среды в каждой точке $(x,y,z)\in X$, тогда $f(x,y,z)=1/c(x,y,z)$ – местная скорость света, причём если $f(x_t,y_t,z_t)=0$, то прохождение сигнала через эту точку невозможно.

Введем следующий функционал:

$$\rho(a,b)=\min_{G\in G(a,b)}\int_G \frac{dG}{f(x,y,z)}, \tag{1}$$

где $G(a,b)$ – множество всех непрерывных кривых, соединяющих точки a и b. Решение задачи (1) определяет время прохождения сигнала из a в b. Отметим, что функционал ρ, вообще говоря, не является дифференцируемым.

Постановка 1. Требуется расположить n одинаковых датчиков на полигоне обслуживания P так, чтобы все точки наблюдались с помощью хотя бы одного датчика, и радиус действия датчиков был минимально возможным.

Вариант 1. Пусть R_i – радиус действия датчика, тогда зона его действия определяется формулой

$$D_i=\{p\in X:\rho(p,O_i)\le R_i\}. \tag{2}$$

Здесь все датчики имеют одинаковую мощность, поэтому $R_i=R, i=1,...,n$.

Тогда условие, гарантирующее, что все точки области P наблюдаются системой датчиков, можно записать как

$$P\subset\bigcup_{i=1}^{n}D_i. \tag{3}$$

т.е. все точки области P принадлежат множеству, являющемуся объединением зоны действия всех датчиков.

Целевая функция задачи размещения датчиков представляется следующим образом:

$$F_1(O)=\max_{1\le i\le n}\max_{p\in D_i}\rho(p,O_i)\to\min_O, \tag{4}$$

где $O=\{O_1,O_2,...,O_n\}$.

Фактически, функция (4) минимизирует время прохождения сигнала от датчика до границы зоны его действия. Решения задачи с целевой функцией (4) эквивалентно решению задачи о покрытии ограниченного множества равными шарами минимального радиуса:

$$R\to\min, \tag{5}$$

$$\forall p\in P, \exists i \mid \rho(O_i,p)\le R, \tag{6}$$

$$O_i\in P, i=1,...,n. \tag{7}$$

Целевая функция (5) минимизирует радиус шаров. Условие (6) гарантирует, что для любой точки множества P всегда существует шар, который покрывает ее, а (7) указывает, что все центры шаров принадлежат множеству P. Данная задача в некоторых случаях может быть записана в виде задачи математического программирования, в частности, когда граница множества является выпуклым многогранником, а метрика – евклидовой.

Вариант 2. Предположим, что все рассматриваемые устройства одинаковы, но в области P существуют запретные зоны, в которых невозможно расположить устройства. Такая задача возникает, в первую очередь, при расположении устройств в помещении, поскольку допустимым является их размещение только на части стен и потолка. Введем в рассмотрение множество $W \subset \partial P$ – участки границы множества P, где разрешено размещение устройств. Условие (7) примет вид:

$$O_i \in W, i = 1,...,n, W \subset \partial P. \tag{8}$$

Постановка 2. Пусть на полигоне обслуживания P необходимо разместить заданное число n устройств физической защиты таким образом, чтобы, во-первых, доля защищаемой области была максимальной, и, во-вторых, все зоны действия устройств между собой не пересекались и не выходили за границу области P.

Вариант 1. Пусть все устройства одинаковы, а полигон обслуживания P – выпуклое множество. Зона, контролируемая *i*-м устройством, определяется по формуле (2), где R_i – радиус действия устройства, так, имеется

$$R_i = \max_{p \in D_i} \rho(p, O_i). \tag{9}$$

Целевая функция задачи размещения примет вид

$$F_2(O) = \min_{1 \le i \le n} \max_{p \in D_i} \rho(p, O_i) \to \max_O, \tag{10}$$

а ограничения, гарантирующие непересечение зон действия устройств, имеют вид

$$\rho(O_i, O_j) \ge R_i + R_j, \forall i, j = 1,...,n, i \ne j,$$

$$\rho(O_i, \partial P) \ge R_i, \forall i = 1,...,n,$$

$$O_i \in P, \forall i = 1,...,n.$$

Тогда решение задачи с целевой функцией (10) эквивалентно решению задачи об упаковке равных шаров с максимальным радиусом в ограниченное выпуклое множество с метрикой (1).

Вариант 2. Предположим, что все рассматриваемые устройства одинаковы, но в области P существуют запретные зоны, в которых невозможно ни расположить устройства, ни обеспечить условия их работы. Другими словами, заданная область P является невыпуклым и неодносвязным множеством.

Пусть имеются m замкнутых подмножеств $B_k \subset X$, $k = 1,...,m$, для которых справедливо следующее свойство: $\forall T(x_t, y_t, z_t) \in B_k : f(x_t, y_t, z_t) = 0$. Тогда множество P с вычетами можно представить в виде:

$$P = \mathrm{cl}\left(P \setminus \bigcup_{k=1}^{m} B_k \right),$$

где cl – оператор замыкания. В этом случае целевая функция также имеет вид (10). Данный случай соответствует задаче упаковки равных шаров в ограниченное невыпуклое и неодносвязное множество.

Вариант 3. Предполагается, что устройства физической защиты разделяются на две группы, мощность устройств первой группы в α раз больше, чем второй. Естественно предположить, что размер зоны действия устройства пропорционален его мощности. Данный случай соответствует задаче упаковки шаров двух разных типов в ограниченное множество.

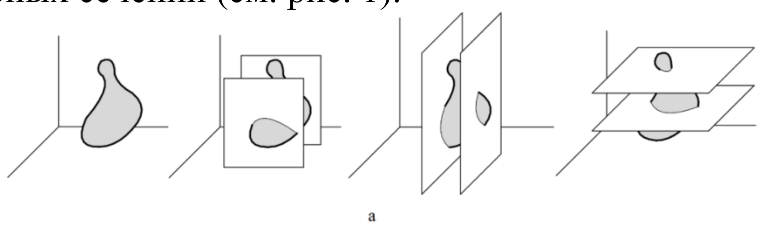
Задача формализуется следующим образом: пусть задано замкнутое множество $P \subset X$; задано m шаров S_i с центрами $O_i(x_i, y_i, z_i)$ и радиусом R_1, n шаров S_j с центрами $O_j(x_j, y_j, z_j)$ и радиусом R_2, где $i = 1,...,m,\ j = (1+m),...,(n+m)$ и $R_1 = \alpha R_2, \alpha \in \mathbb{Q}^+$. Необходимо найти такое расположение центров $O = (O_1, O_2, ..., O_{m+n}) \in P$, чтобы значение радиуса R_1 (и, следовательно, R_2) достигало максимума. Шары с радиусом R_1 называются базовыми или шарами первого типа. Шары с радиусом R_2 – шарами второго типа.

Целевая функция данной задачи определяется выражением

$$F_3 = \max_{p \in D_1} \rho(p, O_1) \to \max. \tag{11}$$

В п. 2.2 предложены алгоритмы для решения задач, поставленных в п. 2.1. В п. 2.2.1 представлены базовые алгоритмы, входящие в структуру всех специализированных алгоритмов решения задач о покрытии и упаковках шаров в трехмерное ограниченное множество с метрикой (1).

Метод аппроксимации. При решении задачи в трехмерном пространстве используется равномерный сеточный метод с шагом h для аппроксимации множества-контейнера. Для уменьшения затрат памяти ЭВМ в процессе вычислений используется метод, при котором удаляются все точки внутри исследуемого множества, а сохраняются только точки на границе. Кроме того, аппроксимация границы требуется для множеств сложной формы. Для построения аппроксимации используются три группы плоскостей. Каждая из них состоит поверхностей, которые параллельны одной из трех координатных плоскостей, и расстояние между ними равно h. В результате получается набор сечений, и вместо трехмерной поверхности сложной формы мы работаем с набором двумерных сечений (см. рис. 1).


а

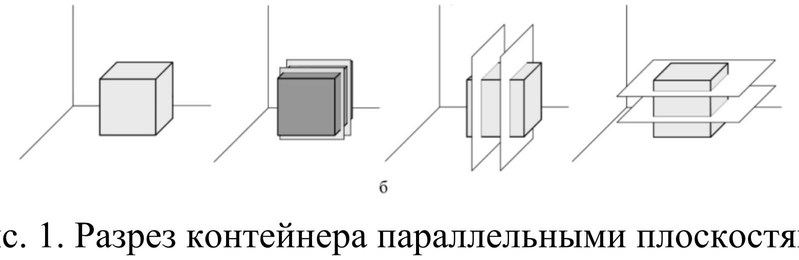

б

Рис. 1. Разрез контейнера параллельными плоскостями

Алгоритм **РТМП** (Разбиение Трехмерного Множества на Подмножества) используется для построения обобщенной трехмерной диаграммы Вороного множества-контейнера относительно набора заданных точек. Данный алгоритм основан на оптико-геометрическом подходе и позволяет разбить задачу покрытия или упаковки n шаров на серию задач покрытия или упаковки одного шара. Суть алгоритма заключается в том, что из всех точек-источников, относительно которых разбивается множество-контейнер, выпускаются световые волны. Это, фактически, означает, что для каждой точки множества, отличной от источника, устанавливается время ее достижения каждой волной. Номер волны, первой достигшей точки, и определяет подмножество, которому она принадлежит.

Алгоритм **УОШ** (Упаковка Одного Шара) предназначен для нахождения шара, вписанного в ограниченную область. На каждой итерации центр шара перемещается как можно дальше от границы множества, и его радиус при этом монотонно увеличивается (см. рис. 2).

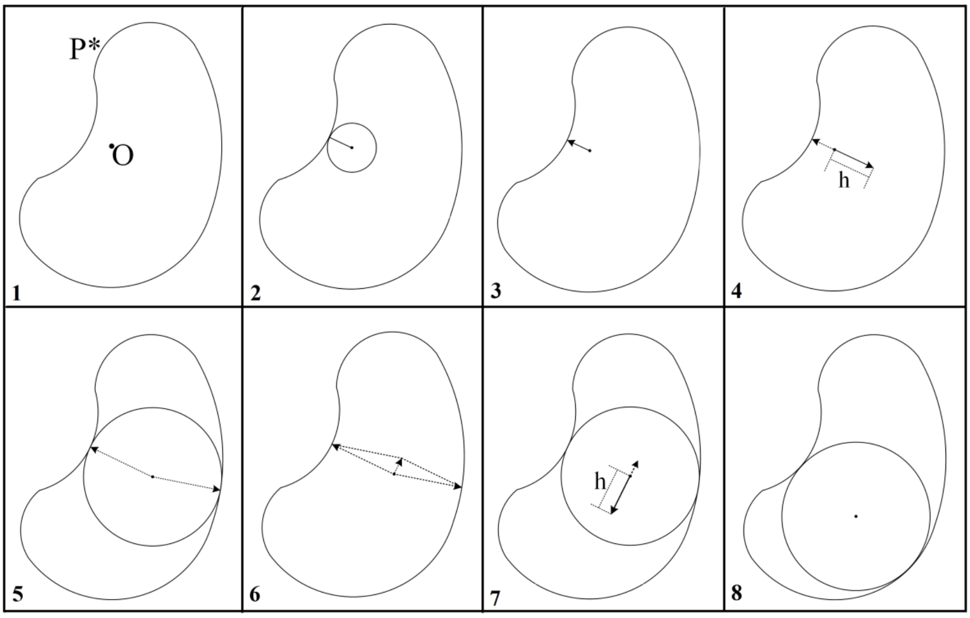


Рис. 2. Иллюстрация работы алгоритма **УОШ**

Алгоритм **ПМОШ (**Покрытия Множества Одном Шаром) используется для нахождения минимального шара, покрывающего заданное множество. Суть алгоритма заключается в перемещении центра шара в направлении уменьшения расстояния от центра до вершин множества (см. рис. 3).

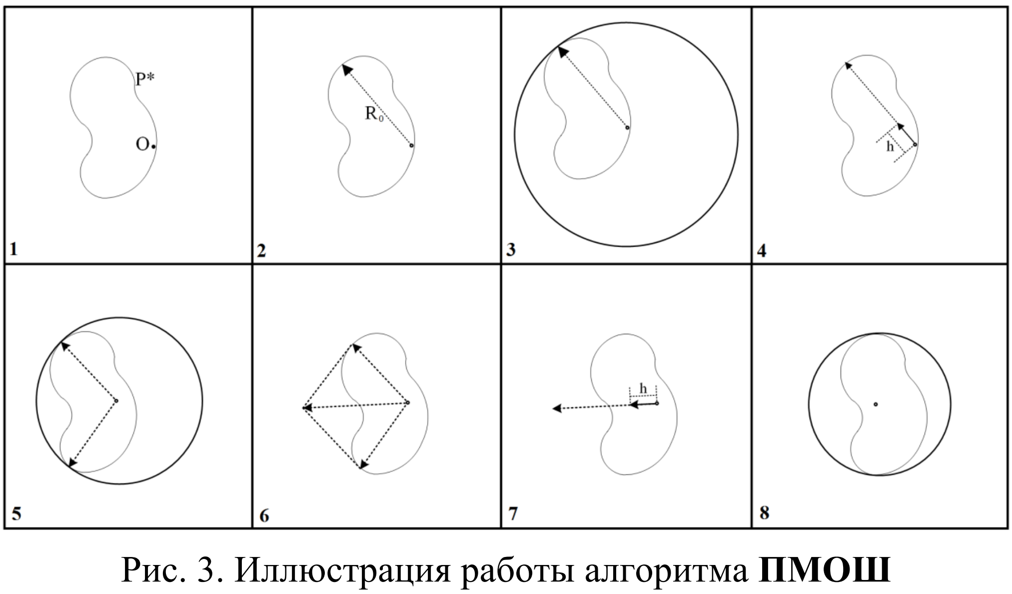


Рис. 3. Иллюстрация работы алгоритма **ПМОШ**

Представленные алгоритмы позволяют решать задачи покрытия и упаковки в ограниченное выпуклое множество. В случае невыпуклого множества их необходимо дополнить алгоритмами на основе метода бильярдного моделирования, принцип работы которого базируется на перемещении жестких шаров внутри заданного множества. Предлагаются два таких алгоритма: первый обладает большей скоростью сходимости; второй – большей точностью. Приведем описания этих алгоритмов.

Алгоритм **ПШОН** (Перемещение Шаров по Определенному Направлению)

Шаг №1. Выделяется множество шаров S, имеющих непустое множество точек касания

$$S = \{S_i \mid M_i \neq \varnothing,\ i = 1,...,n\},$$

где M_i – множество точек касания *i*-го шара, определяющееся по формуле:

$$M_i = \{p : p \in \partial S_i, p \in \partial P\} \cup \{p : p \in \partial S_i, p \in \partial S_j\},\ \forall i, j = 1,...,n,\ i \neq j. \quad (12)$$

Шаг №2. Для каждого шара S_i из множества S строятся векторы с началом в точке O_i и концами в точках $m \in M_i$. Определяется суммарный вектор

$$\overrightarrow{c_i} = \sum_{m \in M_i} \overrightarrow{O_i m}.$$

Шаг №3. Осуществляется сдвиг центра O_i на расстояние h, направление сдвига противоположно вектору $\overrightarrow{c_i}$. Полученная после сдвига точка полагается новым временным центром шара S_i.

Шаг №4. Вычисляется радиус шара $\overline{R_i}$ по формуле (13). Если $\overline{R_i} < R_i$, то переходим к шагу 2 с множеством $\overline{S} = S \setminus S_i$; если $\overline{R_i} \geq R_i$, то находим множество $\overline{M_i}$ по формуле (12) и переходим к шагу 1.

$$\overline{R_i} = \min\{\rho(O_k, \partial P), \rho(O_i, O_j) - R_j\},\ k = 1,...,n,\ i, j = 1,...,n, i \neq j. \quad (13)$$

Шаги 1–4 повторятся до тех пор, пока $\overline{S} \neq \varnothing$. Данный алгоритм гарантирует, что радиус шаров не уменьшается после каждой итерации.

Алгоритм **ПШСН** (Перемещение Шаров по Случайному Направлению) предназначен для перемещения шаров по произвольному направлению с неизмененными радиусами. В равномерной сетке вокруг каждой точки, кроме точек на границе множества P, находятся 26 соседних. Шар может двигаться в любую точку из них:

Шаг №1. Задается максимальное количество итераций, значение счетчика количества итераций полагается равным 1.

Шаг №2. Определяется множество S из шаров, имеющих непустое множество точек касания

$$S = \{S_i \mid M_i \neq \varnothing,\ i = 1,...,n\},$$

где M_i – множество точек касания, определяющееся по формуле (12).

Шаг №3. Для каждого i-го шара S_i из множества S выделяется множество C из 26 соседних точек центра O_i. Осуществляется перемещение центра O_i в одну произвольную точку $c_i \in C$, выбранную случайным образом, и получается временный центр $\overline{O_i}$.

Шаг №4. Определяется величина

$$d_{\min} = \min\{\rho(\overline{O_i}, \partial P), \rho(\overline{O_i}, O_j) - R_j\}, \quad i, j = 1,...,n, i \neq j.$$

- если $d_{\min} \geq R_i$, то временный центр $\overline{O_i}$ сохраняется в качестве нового центра текущего шара S_i и переходим к шагу 3 с множеством $\overline{S} = S \setminus S_i$;

- если $d_{\min} < R_i$, то осуществляется переход к шагу 3 с множеством $\overline{C} = C \setminus c_i$. Если $\overline{C} = \varnothing$, т.е. все 26 соседних точек были рассмотрены, то переходим к шагу 3 с множеством $\overline{S} = S \setminus S_i$. Исходный центр сохраняется.

Шаги 3–4 повторяются, пока $\overline{S} \neq \varnothing$.

Шаг №5. Вычисляется радиус шара $\overline{R_i}$ по формуле (9)

– если $\overline{R_i} \geq R_i$, то значение $\overline{R_i}$ и координаты всех шаров сохраняются в качестве приближения решения задачи. Осуществляется переход к шагу 2;

– если $\overline{R_i} < R_i$, то значение счётчика количества итерации увеличивается на единицу. Если это значение счётчика достигло заданной величины, то работа алгоритма завершается, иначе переходим к шагу 2.

Этот алгоритм позволяет избежать ситуации, когда суммарный вектор равен нулю (в алгоритме **ПШОН**), и, следовательно, шары сдвинуть невозможно, но результат далек от оптимального. Совместное применение обоих бильярдных алгоритмов позволяет повысить эффективность работы основного алгоритма.

В п. 2.2.2 описан алгоритм решения задачи оптимальной упаковки равных шаров в ограниченное выпуклое множество с метрикой (1).

Шаг №1. Задается максимальное количество генераций случайных положений. Значение счетчика количества генерации положений *NumIter*=1.

Шаг №2. Методом случайной генерации положений задаются начальные координаты центров $O_i, i = 1,...,n$, при этом совпадения координат не допускаются.

Шаг №3. Производится разбиение заданного множества P на n подмножеств $P_i, i = 1,...,n$ по алгоритму **РТМП**.

Шаг №4. Для каждого подмножества $P_i, i = 1,...,n$ с помощью алгоритма **УОШ** определяется вписанный шар с максимальным радиусом R_i и центром $O_i, i = 1,...,n$.

Шаг №5. Определяется минимальное значение радиуса среди всех шаров $R = \min\limits_{i=1,...,n} R_i$, и это значение сохраняется в качестве текущего приближенного результата.

Шаги 3-5 повторяются до тех пор, пока значение радиуса R увеличивается (не уменьшается). Значение радиуса и расположение шаров текущей итерации сохраняются в качестве приближения к оптимальному решению, если значение текущего радиуса R больше максимального значения найденных предыдущих итераций.

Шаг №6. Значение счетчика количества генерации случайных положений *NumIter* увеличивается на единицу. Если значение счетчика *NumIter* достигло заданной величины, то работа алгоритма заканчивается. В противном случае осуществляется переход к Шагу №2.

В п. 2.2.3 представлен алгоритм решения задачи упаковки равных шаров в невыпуклое и многосвязное множество.

Шаг №1. Задается максимальное количество генерации начальных положений. Значение счетчика количества случайных генераций *NumIter*=1.

Шаг №2. Методом случайной генерации задаются начальные координаты центров шаров $O_i, i=1,...,n$. Определяется максимальный возможный радиус R_0 по формуле:

$$R_0 = \min\left\{\rho(O_k, \partial P), \frac{\rho(O_i, O_j)}{2}\right\}, k=1,...,n, i=1,...,(n-1), j=(i+1),...,n.$$

Шаг №3. Для каждого *i*-го шара определяется множество точек касания:

$$M_i = \left\{m \mid \rho(O_i, m) = R_0, m \in \partial P\right\} \cup \left\{m \mid m \in \partial S_i, m \in \partial S_j\right\},$$

где $i=1,...,n, j=1,...,n, i \neq j$.

Шаг №4. Выполняется алгоритм **ПШОН**.

Шаг №5. Выполняется алгоритм **ПШСН**.

Шаги 3-5 повторяются до сих пор, пока радиус шаров не уменьшается. Радиус и положение всех шаров сохраняется в качестве приближения результатов.

Шаг №6. Значение счетчика *NumIter* увеличивается на единицу. Если значение *NumIter* достигло заданной величины, то работа алгоритма завершается. Иначе переходим к Шагу 2.

Данные алгоритмы позволяют найти локально-оптимальное решение, применение глобализирующей процедуры многократной генерации начальных положений позволяет говорить об отыскании наилучшего из известных решений (best-of-known solution).

В п. 2.2.4 представлен алгоритм решения задачи покрытия замкнутого множества равными шарами. Идея этого алгоритма заключается в следующем: первоначальные центры шаров генерируются случайным образом; заданное замкнутое множество разбивается на подмножества с помощью алгоритма **РТМП**; для каждого подмножества выполняется алгоритм **ПМОШ** для нахождения описанного шара с минимальным радиусом; для полного покрытия заданного множества определяется максимальное значение радиуса среди всех шаров; процесс повторяется с новым положением центров.

В п.п. 2.2.5–2.2.6 представлены алгоритмы решения задач оптимальной упаковки шаров двух и более типов в замкнутое множество с неевклидовой метрикой (1). Отличие предложенных алгоритмов от алгоритмов построения оптимальных упаковок из пп. 2.2.2 и 2.2.3 заключается в том, что в алгоритме **РТМП** световые волны распространяются с разными скоростями, и на радиусы шаров накладываются дополнительные ограничения, выполнение которых необходимо контролировать на каждой итерации.

В главе 3 в п. 3.1 представлено описание интерфейса, архитектуры и описание основных функций модулей программного комплекса «ТУШОЛ: трехмерные упаковки шаров, оптимизация, логистика». Общая архитектура программного комплекса представлена на рис. 4.

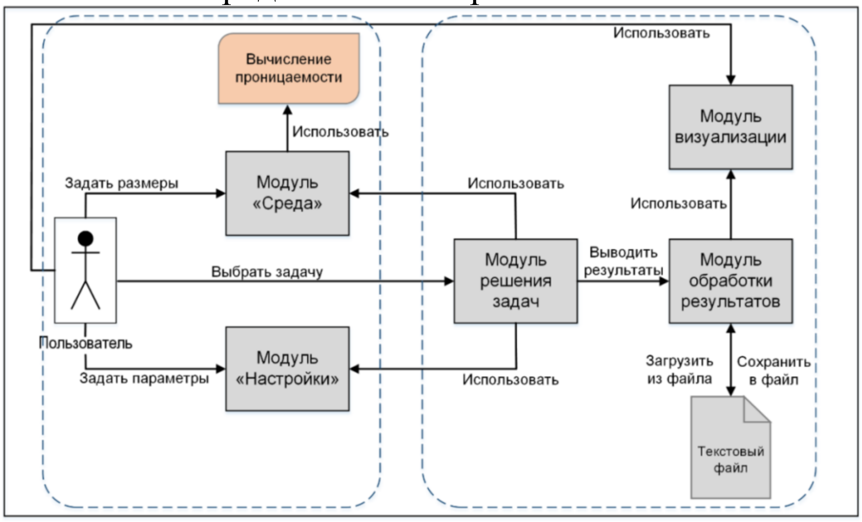


Рис. 4. Общая архитектура программного комплекса «ТУШОЛ»

Программный комплекс «ТУШОЛ» реализован на языке программирования высокого уровня C# и в среде Visual Studio 2012. Он содержит четыре главных модуля: модуль «Среда» позволяет задать размер исследуемой среды и ее оптическую плотность (п. 3.1.2); модуль «Волна» предназначен для реализации процесса распространения световой волны с заданной интенсивностью из определенного источника (п. 3.1.3); модуль «Упаковка» позволяет решать задачи об упаковке шаров равных и разных радиусов (п. 3.1.4); модуль «Настройки» отображает и хранит настройки для повышения гибкости и удобства использования программного комплекса, и также позволяет задавать параметры задачи (п. 3.1.5).

Программный комплекс также поддерживает возможность представления результатов решения в виде трехмерной визуализации и их сохранения в текстовом файле (.txt).

В п. 3.2 представлены результаты тестирования точности предложенных алгоритмов и работоспособности программного комплекса в различных случаях. Рассматривались задачи пяти типов: упаковки равных шаров в выпуклые множества (п. 3.2.1); упаковки равных шаров в невыпуклые и неодносвязные множества (п. 3.2.2); покрытия трехмерного множества равными шарами (п. 3.2.3); упаковки шаров двух разных типов (п. 3.2.4) и упаковки шаров разных радиусов (п. 3.2.5) в ограниченное множество. При исследовании использовались как евклидова, так и различные неевклидовы метрики.

В результате тестирования можно сделать вывод, что при исследовании задач в евклидовой метрике полученные решения несколько хуже, в сравнении с наилучшими известными. Однако погрешность имеет допустимые значения (менее 3,05%). Решение задач с неевклидовыми метриками, по-видимому, выполнено впервые.

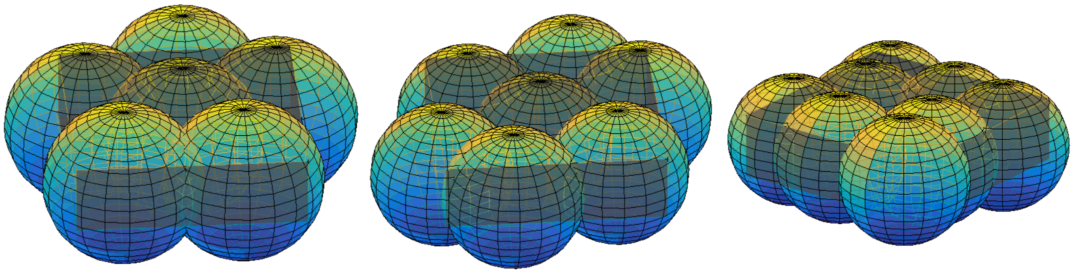
В главе 4 в п. 4.1 представлены решения задач о размещении датчиков движения при проектировании «умных» помещений в технологии Smart Grid с использованием программного комплекса ТУШОЛ.

Здание состоит из пяти этажей, два первых этажа объединены в один большой зал, имеющий размеры 30x30x9 м. Датчики необходимо расположить так, чтобы зал полностью покрывался объединением их сигналов, и при этом радиус действия был минимально возможным. В указанных условиях проблема размещения датчиков эквивалентна задаче о покрытии множества равными шарами. Если предполагается размещение датчиков только на стенах, на полу или на потолке, то возникает задача о покрытии множества равными шарами с ограничением на расположение их центров.

Три следующие этажа разделяются по кабинетам. Причем на третьем этаже расположены отдельные кабинеты с индивидуальными кондиционерами, следовательно в каждом кабинете требуется установить один датчик, позволяющий обнаружить, находится ли человек в кабинете. Таким образом, получаем задачу о покрытии множества одним шаром.

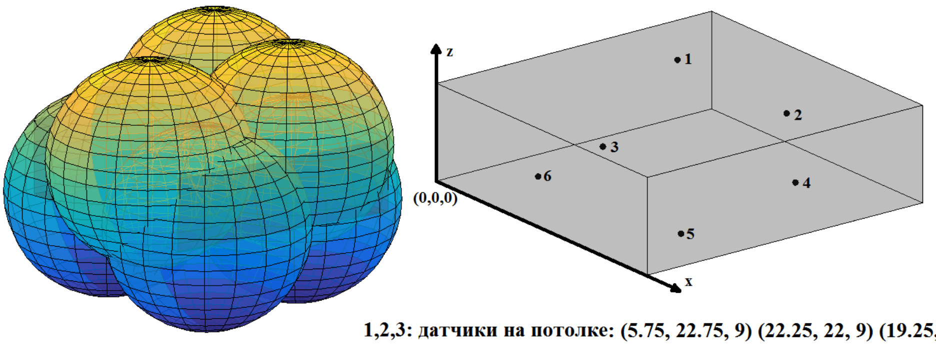
На верхних этажах внутренние перегородки не достигают потолка и установлена общая потолочная система кондиционирования. В указанных условиях проблема размещения датчиков упрощается и вырождается в задачу о покрытии множества равными кругами.

На рис 5, 6 и 7 показаны схемы размещения датчиков движения на нижнем, третьем и четвертом этажах в зависимости от планировки.



n = 6 **n = 7** **n = 8**

Рис. 5. Схема размещения датчиков на нижнем этаже здания.



1,2,3: датчики на потолке: (5.75, 22.75, 9) (22.25, 22, 9) (19.25, 4.25, 9)
4,5,6: датчики на полу: (20.5, 24.5, 0) (24.5, 8.75, 0) (5.5, 7.75, 0)

n = 6

Рис. 6. Схема размещения датчиков на нижнем этаже здания при ограничении места их размещения.

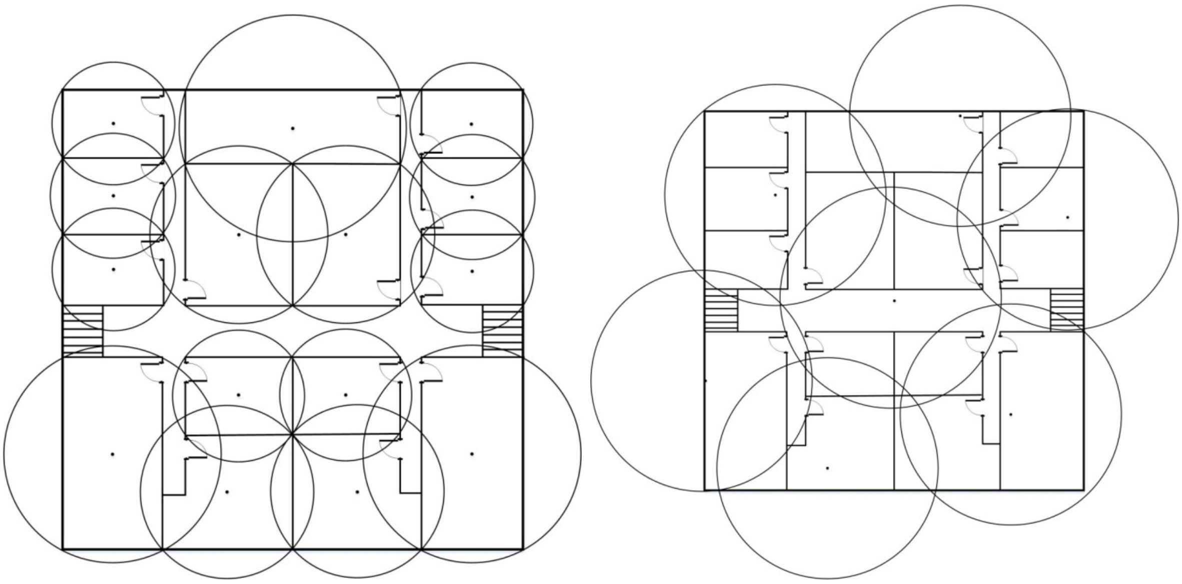


Рис. 7. Схема размещения датчиков на третьем (слева) и четвертом (справа) этажах здания.

В п. 4.2 представлены решения прикладных задач размещения сетевых устройств при построении беспроводной сети в крупном здании. К задаче о покрытии замкнутого множества равными шарами сведена задача покрытия здания беспроводным сигналом заданным количеством одинаковых точек доступа с наименьшей мощностью. К задаче об упаковке шаров в замкнутое множество – задача размещения точек доступа в помещении с максимальным плотностью покрытия зоны действия беспроводной сети. На рис. 8 показаны результаты решения задачи размещения 2, 9 и 10 точек доступа.

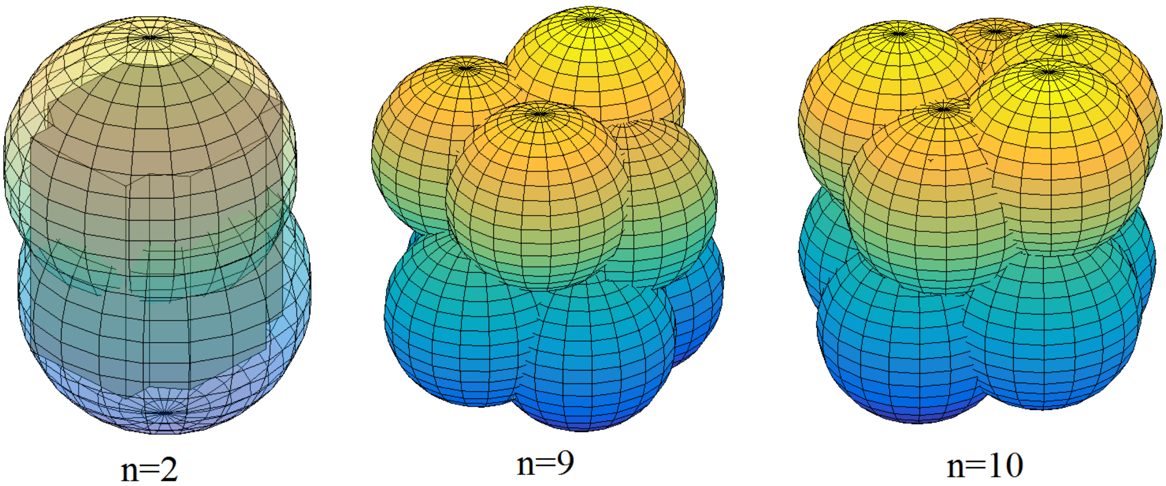


Рис. 8. Размещения беспроводных точек доступа для покрытия здания

В п. 4.3 представлены решения задач размещения устройств системы точечной физической защиты акватории от внешних воздействий. Суть задачи состоит в расположении заданного количества защитных устройств так, чтобы общая зона защиты была максимальной, при этом зоны действия отдельных устройств не должны пересекаться. Найдены решения, обеспечивающие плотность покрытия 44,86%.

В заключении представлены основные научные результаты, полученные в ходе выполнения данной диссертационной работы.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

1. Выполнена формализация трехмерных задач оптимального размещения в виде задач о покрытиях и упаковках шаров в ограниченное множество в трехмерном пространстве с неевклидовыми метриками.

2. Разработаны численные алгоритмы решения задач о покрытиях и упаковках равных шаров в ограниченное множество на основе оптико-геометрического подхода, позволяющие, в отличие от созданных ранее, выполнять решение задач в трехмерном пространстве.

3. Разработаны новые алгоритмы решения задач об упаковках равных и различных шаров в ограниченное трехмерное множество с произвольной границей на основе метода бильярдного моделирования, отличающиеся от известных там, что их можно применять для невыпуклых многосвязных множеств.

4. Создан программный комплекс «ТУШОЛ: трехмерные упаковки шаров, оптимизация, логистика», в которой разработаны предложенные авторские численные алгоритмы, позволяющие решить задачи в рамках диссертационного исследования.

5. Решена с использованием программного комплекса «ТУШОЛ» прикладная задача размещения датчиков контроля движения и температуры в «умном здании», являющемся частью интеллектуальной энергетической системы, для конкретного офисного здания в г. Вунгтау (Вьетнам).

6. Решены другие прикладные задачи: об оптимальном размещении заданного количества точек доступа при построении беспроводной сети; об оптимальном размещении заданного количества устройств точечной физической защиты при решении проблемы использования подводного пространства.

СПИСОК ОСНОВНЫХ ПУБЛИКАЦИЙ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Издания, индексируемые в базе данных Web of Science

1. **Ta T.T.** The sphere packing problem into bounded containers in three-dimension non-Euclidean space / A.L. Kazakov, A.A. Lempert, T.T. Ta // IFAC-PapersOnLine. – 2018. – Vol. 51, No. 32. – P. 782–787.

Издания, индексируемые в базе данных Scopus

2. **Ta T.T.** On the Algorithm for Equal Balls Packing into a Multi-connected Set / A.L. Kazakov, A.A. Lempert, T.T. Ta // Advances in Intelligent Systems Research. – 2019. – Vol. 169. – P. 216–222. DOI: 10.2991/iwci-19.2019.38.

Издания, входящие в Перечень ВАК РФ

3. **Та Ч.Т.** Вычислительный алгоритм для решения задачи упаковки шаров двух различных типов в трехмерное множество с неевклидовой метрикой / А.Л. Казаков, А.А. Лемперт, Ч.Т. Та // Вычислительные методы и программирование. – 2020. – Т. 21. – С. 152–163.

4. **Та Ч.Т.** О задачах упаковок неравных шаров в трехмерном пространстве / А.Л. Казаков, А.А. Лемперт, Ч.Т. Та // Управление большими системами. – 2020. – Вып. 87. – С. 47–66.

Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ

5. **Та Ч.Т.** «ТУШОЛ»: Трехмерные Упаковки Шаров, Оптимизация, Логистика / А.Л. Казаков, А.А. Лемперт, Ч.Т. Та // Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ. № 202061112 от 27 января 2020 г. Москва: Федеральная служба по интеллектуальной собственности. – 2020.

Прочие издания

6. **Та Ч.Т.** Алгоритм построения оптимального покрытия множеств в трехмерном пространстве на основе оптико-геометрического подхода / Та Ч.Т. // Труды международной конференции «Global science. Development and novelty». –2017. – С. 77–79.

7. **Ta T.T.** The sphere packing problem into bounded containers in three-dimension non-Euclidean space / A.L. Kazakov, A.A. Lempert, T.T. Ta // Материалы международной конференции «17th IFAC Workshop on Control Applications of Optimization (CAO 2018) ». Екатеринбург: ИММ УрО РАН. – 2018. – С. 37.