

На правах рукописи



Муфтахов Ильдар Ринатович

**МОДЕЛИ ВОЛЬТЕРРА НАКОПИТЕЛЕЙ ЭНЕРГИИ В  
СИСТЕМАХ С ВОЗОБНОВЛЯЕМОЙ ГЕНЕРАЦИЕЙ:  
ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И ПРИЛОЖЕНИЯ**

Специальность 05.13.18 —  
«Математическое моделирование, численные методы и комплексы  
программ»

**Автореферат**

диссертации на соискание учёной степени  
кандидата технических наук

Иркутск — 2022

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Иркутский национальный исследовательский технический университет»

- Научный руководитель:** доктор физико-математических наук, доцент, профессор РАН  
**Сидоров Денис Николаевич**
- Официальные оппоненты:** **Чистяков Виктор Филимонович,**  
доктор физико-математических наук, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова Сибирского отделения Российской академии наук, Лаборатория 1.1 Дифференциальных уравнений и управляемых систем, главный научный сотрудник
- Искаков Алексей Борисович,**  
кандидат физико-математических наук, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова Российской академии наук, лаборатория №82 «Моделирования и управления большими системами», заведующий лабораторией, старший научный сотрудник
- Ведущая организация:** Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский университет ИТМО», г. Санкт-Петербург

Защита состоится 14.09.2022 г. в 09:00 на заседании диссертационного совета Д 003.017.01, созданного на базе Федерального государственного бюджетного учреждения науки Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева Сибирского отделения Российской академии наук (ИСЭМ СО РАН) по адресу: 664033, г. Иркутск, ул. Лермонтова, д. 130, к.355.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИСЭМ СО РАН по адресу: 664033, г. Иркутск, ул. Лермонтова, д. 130, к.407 и на сайте <https://isem.irk.ru/dissert/case/DIS-2022-4/>.

Автореферат разослан «\_\_» \_\_ 2022 г..

Отзывы на автореферат в двух экземплярах с подписью составителя, заверенные печатью организации, просим направлять по адресу: 664033, г. Иркутск, ул. Лермонтова, д. 130 на имя ученого секретаря диссертационного совета.

Ученый секретарь

диссертационного совета

Д 003.017.01, доктор технических наук,  
профессор

Клер Александр Матвеевич

## Общая характеристика работы

**Актуальность темы.** Электроэнергетика является важнейшей инфраструктурной отраслью, обеспечивающей энергией различные секторы экономики и социальной сферы страны. Изучение особенностей электроэнергетических систем (ЭЭС), управление накопителями энергии, обоснование эффективных путей модернизации устаревшего оборудования, а также прогнозирование потребления электроэнергии помогают правильно понять современное состояние энергетики и оценить новейшие тенденции ее развития.

Для обеспечения наибольшей эффективности генерации электроэнергии большую важность имеет не только получение теоретических результатов прогнозирования потребления электроэнергии, но и поддержание баланса между генерацией и потреблением. Одним из способов достижения данной цели является использование накопителей энергии в ЭЭС с возобновляемыми источниками энергии (ВИЭ). Для их эффективной эксплуатации необходимо строить адекватные математические модели, позволяющие определять режимные параметры накопителей. Одним из базовых параметров является знакопеременная функция мощности (ЗПФМ) накопителей. Данная функция отражает характер протекания процессов в накопителях, в том числе деградации. Проблема ее определения является примером обратной задачи, когда в качестве выходного сигнала задается желаемый уровень дополнительной генерации электроэнергии, которую необходимо получить или аккумулировать. Большое значение при этом имеет не только задача определения коэффициентов полезного действия (КПД) накопителей, но и разработка приближенных методов численного решения интегральных уравнений, описывающих данный процесс. Для моделирования систем накопителей энергии в данной работе используется нестандартный класс интегральных уравнений Вольтерра (ИУВ) первого рода.

Значительный вклад в развитие системных исследований в энергетике, теорию развития ЭЭС, методические разработки прогнозирования и проектирования развития ЭЭС внесли Л. А. Мелентьев, Ю. Н. Руденко, А. А. Макаров, Н. И. Воропай, А. П. Меренков, Л. С. Беляев, Б. Г. Санеев, А. Н. Зейлигер, Л. Д. Хабачев, В. А. Хананев и др. Моделирование работы накопителей энергии проводили Н. В. Гулия, Д. А. Бут, Д. Н. Карамов, О. Tremblay, L.-A. Dessaint, Dirk Uwe Sauer, Rodolfo Dufó-Lopez, Jose L. Bernal-Agustin, D. Tsuanyo, E. Dursun.

В разработку теории устойчивых методов решения обратных задач большой вклад внесли А. Н. Тихонов, М. М. Лаврентьев, В. К. Иванов, В. Я. Арсенин, А. Б. Бакушинский, В. В. Васин, А. Ф. Верлань, А. В. Гончарский, В. А. Морозов, Г. А. Свиридюк, Н. А. Сидоров, В. С. Сизиков, В. А. Треногин и др.

Исследованию интегральных моделей посвящено большое количество статей и монографий, среди которых можно выделить работы И. В. Бойкова, А. Л. Бухгейма, Ю. Е. Воскобойникова, В. М. Глушкова, В. К. Горбунова, А. М. Денисова, Н. Д. Копачевского, А. С. Леонова, Н. А. Магницкого, Ю. С. Попкова, А. И. Прилепко, Г. Е. Пухова, В. Д. Степанова, А. Н. Тынды, А. П. Хромова, А. Г. Яголы, А. Lorenzi, Н.-J. Reinhardt и др. При этом значительный вклад внесли и иркутские исследователи: А. С. Апарцин, Б. А. Бельтюков, М. В. Булатов, Е. В. Маркова, И. В. Сидлер, Д. Н. Сидоров, С. В. Солодуша, В. Ф. Чистяков.

Работы этих авторов стимулировали и данное исследование, способствуя лучшему пониманию математических моделей развивающихся ЭЭС, в том числе с использованием накопителей электроэнергии, технических характеристик, функциональных ограничений и возможностей проектирования систем с использованием ВИЭ.

Отметим, что в литературе большое внимание уделяется анализу производительности, техническим параметрам и стоимости использования накопителей. Однако в большинстве работ основные параметры предполагаются постоянными при определении КПД используемых накопителей энергии. Поэтому при моделировании накопителей используются простые модели, недостаточно учитывающие динамику процессов в накопителях.

Таким образом, разработка математических моделей покрытия дисбаланса нагрузки в ЭЭС и определения режимных параметров накопителей энергии, учитывающей нелинейные процессы сокращения располагаемой емкости накопителей с течением времени, является актуальной задачей.

**Целью работы** является разработка методического подхода к определению режимных параметров накопителей в ЭЭС с ВИЭ.

**Основные задачи работы:**

- разработать новые интегральные модели и методы определения режимных параметров накопителей;
- предложить новые методы построения численных решений ИУВ первого рода с разрывными ядрами;
- разработать новый проблемно-ориентированный программный комплекс определения режимных параметров накопителей в ЭЭС с ВИЭ на основе ИУВ первого рода с разрывными ядрами с использованием квадратурных формул средних прямоугольников и квадратур Гаусса при различных аппроксимациях искомого решения.

**Объектом** исследования являются модели накопителей энергии в энергосистемах с возобновляемой генерацией.

**Предметом** исследования являются теория и численные методы решения интегральных уравнений Вольтерра с разрывными ядрами и их приложения в моделировании систем накопителей энергии.

**Методы исследования.** В работе используются методы математического моделирования, вычислительной математики, а также элементы теории интегральных, дифференциальных уравнений и прикладного функционального анализа.

**Научную новизну** представляют **положения, выносимые на защиту:**

- предложен методический подход, включающий в себя:
  - новые интегральные модели и методы определения режимных параметров накопителей с нелинейно меняющимися со временем КПД в ЭЭС с ВИЭ (соответствует п.1 паспорта спец. 05.13.18<sup>1</sup>);
  - новые методы построения численных решений скалярных интегральных уравнений Вольтерра первого рода с разрывными ядрами для случая нелинейной зависимости искомой функции и систем уравнений, предложен регуляризованный метод с использованием квадратур Гаусса (соответствует п.3 паспорта спец. 05.13.18<sup>2</sup>);
- разработан комплекс программ для вычисления режимных параметров накопителей энергии на основе интегральных уравнений Вольтерра первого рода с разрывными ядрами, который позволяет проводить вычислительные эксперименты и исследовать свойства предложенных алгоритмов при моделировании накопителей энергии (соответствует п.4 паспорта спец. 05.13.18<sup>3</sup>).

**Теоретическая значимость** работы заключается в следующем:

- 1) разработана новая методика, основанная на интегральных уравнениях Вольтерра, позволяющая моделировать работу накопителей энергии в ЭЭС с ВИЭ;
- 2) предложены новые методы построения численных решений интегральных уравнений Вольтерра первого рода с разрывными ядрами, в том числе для дробного порядка интегрирования;
- 3) выполнено обобщение новых численных методов для случая систем линейных и нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода с разрывными ядрами;

---

<sup>1</sup>П.1. «Разработка новых математических методов моделирования объектов и явлений» паспорта научной специальности 05.13.18

<sup>2</sup>П.3. «Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий» паспорта научной специальности 05.13.18

<sup>3</sup>П.4. «Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента» паспорта научной специальности 05.13.18

4) предложенные методы могут быть использованы при решении обратных задач в других прикладных областях.

**Практическая значимость.** Результаты исследования позволяют:

- 1) определять режимные параметры накопителей энергии в ЭЭС с ВИЭ;
- 2) моделировать влияние накопителей энергии на функционирование ЭЭС с ВИЭ;
- 3) снижать экономические потери путем сглаживания графика нагрузки и сокращения потерь пиковой генерации для замкнутых систем на основе прогнозов нагрузки и генерации от ВИЭ;
- 4) определять минимальное количество дополнительных мощностей накопителей энергии, необходимых для достижения целевых показателей выравнивания графика нагрузки;
- 5) рассчитывать динамику функционирования ЭЭС с ВИЭ на основе прогноза потребления электроэнергии;
- 6) учитывать нелинейное изменение КПД накопителей при изменении условий эксплуатации и деградации самих накопителей.

Таким образом, с помощью интегральных моделей продемонстрирована возможность проводить расчеты для ЭЭС с накопителями энергии. Полученные результаты можно использовать в математическом моделировании конкретных задач управления накопителями энергии и в дальнейшем развитии теории математических моделей при решении различных задач покрытия нагрузки. Программный комплекс может быть использован в проведении детального анализа развития динамических систем с использованием ВИЭ на основе накопителей электроэнергии при заранее известном прогнозе потребления и генерации от ВИЭ. Отметим, что программный комплекс применяется в образовательном процессе при подготовке магистров в ИРНИТУ.

**Достоверность** полученных результатов обеспечивается строгой математической постановкой задачи, адекватностью применяемого математического аппарата, устойчивостью используемых численных методов, а также расчетами, выполненными как на тестовых примерах, так и на реальных данных.

**Публикации и личный вклад автора.** Результаты диссертации опубликованы в работах [1–20], из них 16 работ являются статьями в ведущих рецензируемых научных журналах, рекомендованных ВАК РФ, и в изданиях, индексируемых Web of Science и/или Scopus. Получены 2 свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ: № 2015619376 и № 2019667750 [21; 22]. Постановка задачи принадлежит научному руководителю соискателя Д. Н. Сидорову (ИСЭМ СО РАН). Конфликт интересов между соискателем и соавторами отсутствует. На защиту выносятся результаты, полученные лично соискателем.

**Апробация работы.** Результаты диссертационной работы по мере их получения обсуждались на семинарах кафедры прикладной математики в НГАСУ (г. Новосибирск, рук. семинара д.ф.-м.н. Ю.Е. Воскобойников); объединенном семинаре кафедр математического анализа и дифференциальных уравнений и вычислительной математики и оптимизации в ИГУ (г. Иркутск, рук. д.ф.-м.н. В.А. Срочко); семинаре кафедры высшей и прикладной математики в ПГУ (г. Пенза, рук. д.ф.-м.н. И.В. Бойков); семинаре на факультете ПИиКТ в ИТМО (г. Санкт-Петербург, рук. д.т.н. В.С. Сизиков); семинарах и конференциях научной молодежи «Системные исследования в энергетике» в ИСЭМ СО РАН (г. Иркутск, 2015-2020 гг.), а также докладывались на ряде российских и международных конференций, включая VII, VIII и XIV «Международные научно-технические конференции молодых специалистов, аспирантов и студентов» (г. Пенза, 2013, 2014 и 2020 гг.) [17]; «XVI Байкальскую международную школу-семинар «Методы оптимизации и их приложения»» (о. Ольхон, 2014 г.) [18]; международную конференцию «Бесконечномерный анализ, стохастика, математическое моделирование: новые задачи и методы» (г. Москва, 2014 г.) [19]; «Международный конгресс промышленной и прикладной математики» (ICIAM) (Китай, 2015 г.); международную конференцию «Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики — 2015» (г. Новосибирск, 2016 г.) [20]; Российско-Британский семинар «Inverse Problems in Applied Mathematics, Statistics, Engineering Mathematics, Industrial Mathematics» (г. Новосибирск, 2016 г.); конференцию «Sustainable Development of Energy, Water and Environment Systems (SDEWES)» (Хорватия, 2017 г.); российско-китайский семинар «Математическое моделирование ЭЭС на ВИЭ и изолированные гибридные системы электроснабжения» (г. Иркутск, 2017 г.); международную конференцию «Green Energy and Smart Grids» (п. Хадарта, 2018 г.); конференцию по управлению «Chinese Control Conference (CCC)» (Китай, 2019) [10]; 4-ю международную конференцию «Intelligent Decision Science (IDS)» в Бахчешехирском университете (Турция, 2020) [16]. Автор благодарен участникам семинаров и конференций за конструктивные замечания и предложения к данной работе, позволившие значительно ее улучшить.

Представленные в диссертации результаты получены в рамках проекта государственного задания Министерства науки и высшего образования России №FZZS-2020-0039 и при поддержке грантов РФФИ и вошли в итоговые отчеты по проектам №20-48-383004 «Интеллектуальные интегрированные энергетические системы с возобновляемыми источниками и накопителями энергии: создание методологии функционирования и развития на основе нелинейных динамических моделей» (рук. Муфтахов И.Р.), №19-58-53011 «Нелинейные динамические модели для ветроэнергетики: прогнозирование и управление накопителями» (рук. Сидоров Д.Н., исп. Муфтахов И.Р.) и №18-31-00206 «Разработка математических методов интеграции возобновляемых ис-

точников генерации и накопителей энергии в современные энергосистемы» (рук. Жуков А.В., исп. Муфтахов И.Р.).

**Объем и структура работы.** Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы, списка иллюстраций и списка таблиц. Полный объем диссертации составляет 110 страниц с 45 рисунками и 14 таблицами. Список литературы содержит 135 наименований.

## Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в диссертационной работе, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируется цель, ставятся задачи работы, сформулированы научная новизна и практическая значимость представляемой работы.

**В первой главе** представлен анализ применения интегральных уравнений. Приведен пример их использования в моделировании развивающихся динамических систем, что позволяет учитывать динамику старения элементов, зависимость от уровня заряда и внешних условий эксплуатации.

Показана важность внедрения накопителей энергии в ЭЭС с ВИЭ. По приведенным современным разработкам дан анализ текущего состояния энергетики в части аккумулирования энергии и обзор исследований технических характеристик накопителей, методов моделирования работы ЭЭС с ВИЭ, батарей, маховиков, сверхпроводящих магнитных накопителей энергии и накопителей в виде суперконденсаторов. Показано, что в настоящий момент не существует комплексной методики определения режимных параметров накопителей с КПД, которые могут изменяться со временем в силу различного рода причин: характера использования, условий внешней среды, изношенности, и т. д. Это и обуславливает необходимость дальнейших исследований для устранения ограничений в развертывании проектов с использованием накопителей энергии в ЭЭС с ВИЭ.

**Во второй главе** в п. 2.1 сформулирована постановка задачи определения режимных параметров работы накопителей энергии при известном прогнозе потребления и генерации энергии, в том числе за счет ВИЭ. Такая постановка является типичным примером обратной задачи, т.к. на «выходе» имеются известные из прогноза данные потребления и генерации, а на «входе» – неизвестная знакпеременная функция изменения мощности накопителей. Для решения задач подобного типа академиком В. М. Глушковым предлагалось использовать динамические модели, поэтому для решения поставленной задачи во второй главе предложено использовать модели, основанные на интегральных уравнениях Вольтерра первого рода



$$\int_{\alpha(t)}^t K(t,s)x(s)ds = f(t), \quad 0 \leq s \leq t \leq T. \quad (1)$$

Здесь правая часть  $f(t)$  – это дисбаланс генерации и потребления электроэнергии, учитывающий и перетоки между узлами сети,  $x(s)$  – неизвестная знакопеременная функция изменения мощности накопителей (ЗПФИМ), а ядро  $K(t,s)$  определяет КПД накопителей электроэнергии, время использования которых задается пределами интегрирования.

Данная модель позволяет на основе ЗПФИМ определить режимные параметры работы накопителей энергии, уровень заряда, а также вычислить знакопеременную функцию мощности накопителей (ЗПФМ). Прогноз потребления электроэнергии строится экспертами на основе многолетних данных о потреблении энергии, природно-климатических особенностей рассматриваемой местности, резервных генерирующих мощностей и т.д.

В то же время при использовании в данной модели нескольких видов накопителей электроэнергии, периоды работы которых не совпадают, возникает необходимость решать задачу, в которой КПД представляет собой функцию с разрывами первого рода. Таким образом, в данной ситуации вместо интегральной модели (1) необходимо рассматривать нелинейную модель вида

$$\begin{cases} \int_0^t K(t,s,x(s)) ds = f(t), \quad 0 \leq s \leq t \leq T, \quad f(0) = 0, \\ v(t) = \int_0^t x(s)ds, \quad \max_{t \in [0,T]} v(t) \leq v_{max}, \\ E_{min}(t) \leq \int_0^t v(s)ds \leq E_{max}(t), \end{cases} \quad (2)$$

где нелинейная функция  $K(t,s,x(s))$  определяется формулой:

$$K(t,s,x(s)) = \begin{cases} K_1(t,s)G_1(s,x(s)), \quad t,s \in m_1, \\ \dots \dots \dots \\ K_n(t,s)G_n(s,x(s)), \quad t,s \in m_n, \end{cases} \quad (3)$$

где  $m_i = \{t, s \mid \alpha_{i-1}(t) < s < \alpha_i(t), i = \overline{1, n}\}$ .

**Замечание.** Теория линейных интегральных моделей с разрывными ядрами ранее была построена Д. Н. Сидоровым<sup>4</sup> и получила развитие в данной работе.

<sup>4</sup>Sidorov, D. Integral Dynamical Models: Singularities, Signals and Control. World Scientific Publ. 2015. – 258 p.

В модели (2) функция источника  $f(t)$  задает дисбаланс нагрузки

$$\dot{f}(t) = \dot{f}_{RES}(t) + \dot{f}_{gen} - \dot{f}_{load}(t), \quad (4)$$

где  $\dot{f}_{gen}(t)$  – генерация традиционных источников энергии,  $\dot{f}_{RES}$  – генерация ВИЭ и  $\dot{f}_{load}(t)$  – прогнозируемая нагрузка потребителей. Функции разрыва  $\alpha_i(t)$  показывают пропорции распределения нагрузки между  $n$ -модулями накопителей в системе накопителей (например, если энергосистема имеет три накопителя, используемые в равных пропорциях, тогда  $\alpha_0(t) = 0$ ,  $\alpha_1(t) = \frac{t}{3}$ ,  $\alpha_2(t) = \frac{2t}{3}$ ,  $\alpha_3(t) = t$ ). Функция  $f(t) \in C^1_{[0,T]}$  показывает дисбаланс нагрузки. Функции  $K_i(t,s)$ , характеризующие вместе с  $G_i(s,x(s))$  КПД используемых накопителей, имеют непрерывные производные по  $t$  для  $t,s \in m_i$ ,  $K_n(t,t) \neq 0$ ;  $K_i(t,s)$ ,  $G_i(s,x(s))$  являются непрерывными; при любом  $t$  отсчет времени идет от 0 ( $\alpha_i(0) = 0$ ), а время окончания работы  $n$ -го накопителя  $\alpha_n(t) = t$ ; периоды (интервалы) работы накопителей не пересекаются, т.е.  $0 < \alpha_1(t) < \alpha_2(t) < \dots < \alpha_{n-1}(t) < t$ ,  $\alpha_1(t), \dots, \alpha_{n-1}(t)$  возрастают в малой окрестности  $0 \leq t \leq \tau$ ,  $0 < \alpha'_1(0) \leq \dots \leq \alpha'_{n-1}(0) < 1$ . КПД изменяется под влиянием двух факторов – срока эксплуатации  $K_i(t,s)$  и интенсивности использования в текущий момент времени  $G_i(s,x(s))$ , зависящей от искомой  $x(s)$  – ЗПФИМ, которая позволяет при известной  $v_{max}$  (максимальной скорости заряда/разряда накопителей): определить  $E(t)$  – уровень заряда накопителей при ограничениях  $E_{min}(t) \leq E(t) \leq E_{max}(t)$ , зависящих от типа накопителей; минимальную совокупную емкость накопителей, необходимых для покрытия дефицита нагрузки потребителей; вычислить количество циклов работы накопителей на основе чередования пиков функции  $E(t)$ ; спрогнозировать срок службы накопителей.

Кроме того, для случая использования нескольких обособленных групп накопителей энергии для нескольких потребителей возникает необходимость решать систему интегральных уравнений Вольтерра, у которых ядра претерпевают разрывы первого рода. Если КПД использования каждого вида накопителей энергии будут зависеть не только от их возраста, длительности использования (переменные  $t$  и  $s$ ), но и от текущего уровня заряда или интенсивности использования, то в этом случае неизвестная функция  $x(s)$  входит в ядро нелинейно. Для всех этих случаев возникает необходимость построения численных алгоритмов решения уравнений Вольтерра с разрывными ядрами.

Для численного решения уравнений (1) применен в пп. 2.2.1 численный метод сплайн-коллокаций, основанный на квадратурной формуле средних прямоугольников. Приближенное решение представлено в виде кусочно-постоянной функции.

Также в данной главе рассматривается численное решение линейной **системы интегральных уравнений**, где матричное ядро  $K(t,s)$  размерности  $m \times m$  имеет

для  $0 \leq s \leq t \leq T$  разрывы первого рода на кривых  $s = \alpha_i(t), i = 1, \dots, n - 1$ , а  $f(t) = (f_1(t), \dots, f_m(t))^T$ ,  $x(t) = (x_1(t), \dots, x_m(t))^T$ . Матрицы  $K_i(t, s)$  определены, непрерывны и имеют непрерывные производные по  $t$  в соответствующих областях  $D_i = \{(s, t) | \alpha_{i-1}(t) < s < \alpha_i(t)\}, i = 1, \dots, n$ ,  $\alpha_0(t) = 0$ ,  $\alpha_n(t) = t$ . Функции  $f_i(t), \alpha_i(t)$  имеют непрерывные производные,  $f_i(0) = 0, \alpha_i(0) = 0$ . Предполагается, что каждая из матриц  $K_i(t, s)$  имеет непрерывно дифференцируемое по  $t$  продолжение в область  $0 \leq s \leq t \leq T$ .

В п. 2.3 приведено описание коллокационного численного метода для систем уравнений, а приближенное решение уравнения с матричным ядром представлено в виде кусочно-постоянной функции  $x_N(t) = (x_1^{(N)}(t), \dots, x_m^{(N)}(t))^T$ ,  $x_i^{(N)}(t) = \sum_{j=1}^N x_{i,j}^{(N)} \delta_j(t)$ ,  $t \in (0, T]$ , где коэффициенты  $x_{i,j}^{(N)}$ ,  $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, N}$  подлежат определению; полуинтервал  $(0, T]$  разбивается на  $N$  полуинтервалов  $\Delta_j = (t_{j-1}, t_j]$ , для  $t \in \Delta_j$  значение  $\delta_j(t)$  равно 1, иначе 0.

Далее введем обозначения  $f_{i,k} = f_i(t_k)$ ,  $k = 1, \dots, N$ ,  $K^{(i,p)}(t_k, s)$  - элемент матрицы ядра  $K(t_k, s)$  на пересечении  $i$ -строки и  $p$ -столбца для  $i = \overline{1, m}, p = \overline{1, m}$ , который, в свою очередь, является функцией, претерпевающей разрывы первого рода на кривых  $\alpha_1(t_k) < \alpha_2(t_k) < \dots < \alpha_{n-1}(t_k)$ .

Таким образом, в п. 2.3 получена итоговая СЛАУ

$$\sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n \int_{\alpha_{q-1}(t_k)}^{\alpha_q(t_k)} K_q^{(i,p)}(t_k, s) ds x_{p,k}^{(N)} = f_{i,k} - \sum_{p=1}^m \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{q=1}^n \int_{\alpha_{q-1}(t_k)}^{\alpha_q(t_k)} K_q^{(i,p)}(t_k, s) ds x_{p,j}^{(N)},$$

после решения которой можно найти  $x_{p,k}^{(N)}$  для  $p = \overline{1, m}$ .

Поскольку исходные данные, как правило, известны с погрешностью, то возникает необходимость решения возмущенных интегральных уравнений Вольтерра первого рода с помощью методов регуляризации. В связи с этим в п. 2.4 для линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода используется метод регуляризации Лаврентьева, в основе которого лежит теория возмущений. При построении численного алгоритма использован коллокационный метод, основанный на поиске неизвестной функции  $x(s)$  в виде кусочно-постоянной, а также кусочно-линейной функции; каждый интеграл аппроксимирован с помощью квадратур Гаусса (по трем узлам), также использованы квадратурные формулы средних прямоугольников. Стоит отметить, что вместо интегрального уравнения Вольтерра первого рода решается уравнение второго рода с параметром регуляризации  $\alpha$

$$\alpha \bar{x}_\alpha(t) + \int_0^t \bar{K}(t, s) \bar{x}_\alpha(s) ds = \bar{f}(t). \quad (5)$$

При получении оценок приближенных решений и нормы регуляризирующего оператора в обосновании метода регуляризации Лаврентьева используются теорема Банаха-Штейнгауза, понятие стабилизирующего оператора<sup>5</sup>.

В п. 2.5 рассмотрены **нелинейные** уравнения Вольтерра первого рода:

$$\int_0^t K(t,s,x(s)) ds = f(t), \quad 0 \leq s \leq t \leq T, \quad f(0) = 0. \quad (6)$$

В пп. 2.5.2 предложен общий численный метод, который основан на использовании квадратурной формулы средних прямоугольников. Погрешность метода имеет порядок  $\mathcal{O}(1/N)$ . Приближенное решение уравнения (6) представлено в виде кусочно-постоянной функции. Исследуются вопросы сходимости численных схем.

В п. 2.6 выполнен анализ ошибки численного решения в виде апостериорной оценки сходимости для случая, когда точное решение  $\bar{x}$  заранее неизвестно. Определен порядок сходимости на основе поточечной разности между двумя сетками узлов.

Для демонстрации эффективности решения поставленной в главе 2 задачи определения режимных параметров накопителей энергии в ЭЭС с ВИЭ в **третьей главе** приведены примеры численных расчетов как на синтетических, так и на реальных данных.

В п. 3.1 описано разработанное в рамках данной работы программное обеспечение [21; 22], которое позволяет вычислять ЗПФИМ с использованием численных методов, предложенных в главе 2. В п. 3.2 приведены численные примеры с использованием синтетических данных. В пп. 3.2.1 показаны результаты работы численных алгоритмов для линейного уравнения, а в пп. 3.2.2 – для системы уравнений. В пп. 3.2.3 рассмотрены примеры с нелинейной зависимостью ядра от неизвестной функции. Пп. 3.2.4 содержит результаты работы алгоритма с использованием описанной выше регуляризации Лаврентьева. Приведены таблицы ошибок, полученных путем согласования шага с уровнями добавленного в ядро и в правую часть нормально распределенного случайного шума, а также с учетом различных значений количества узлов сетки. Приведены значения поточечной разницы для двух сеток и порядка сходимости. Вычисления самих интегралов, возникающих на каждом этапе численных методов, выполнены с использованием квадратурных формул средних прямоугольников, а также квадратур Гаусса. Показанные в работе расчеты демонстрируют эффективность рассмотренных численных методов, а использование  $\alpha$ -регуляризации Лаврентьева позволило заметно снизить уровень погрешности при численном решении нерегулярных интегральных уравнений первого рода для зашумленных данных, особенно в том случае, когда при

---

<sup>5</sup>Н. А. Сидоров, В. А. Треногин. Регуляризация линейных уравнений на основе теории возмущений. Дифференциальные уравнения. Т. 16, № 11. 1980. С. 2038–2049.

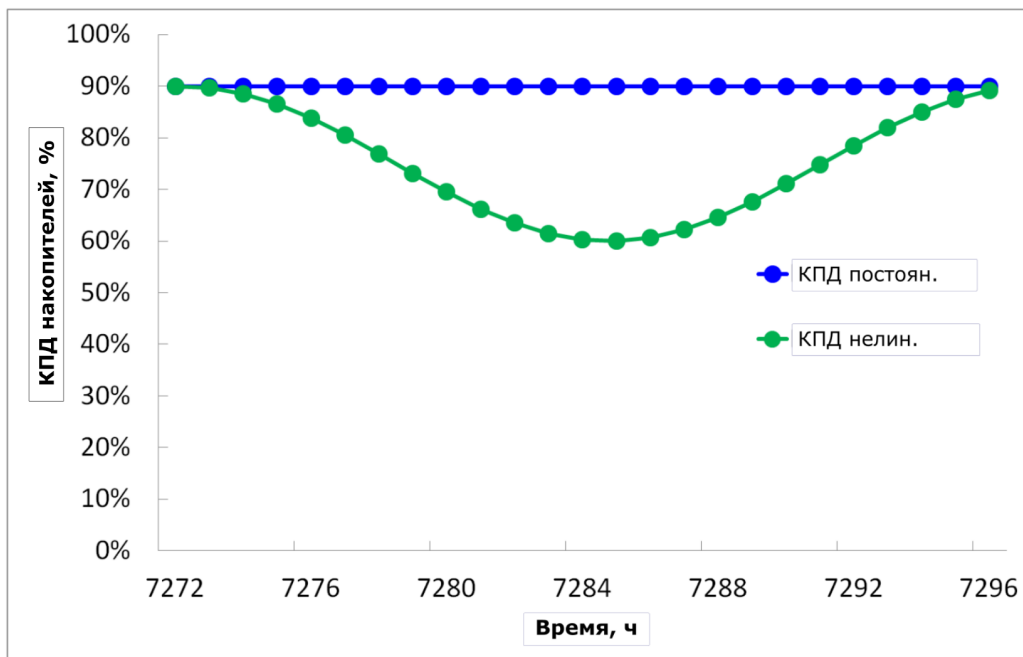


Рис. 1 — КПД: постоянный для модели (7), нелинейный – для Вольтерровской

заданном шаге сетки узлов еще не проявляется характерное для интегральных уравнений Вольтерра первого рода свойство саморегуляризации<sup>6</sup>.

В п. 3.3 приведены результаты работы программного комплекса на реальных данных нескольких ЭЭС. В п. 3.3.1 внимание уделено ЭЭС Техаса, Ирландии, Сахалина, в п. 3.3.3 – обособленного энергорайона в Якутии. Продемонстрировано, что модель Вольтерра с постоянным ядром показывает результаты, практически идентичные классической ампер-часовой математической модели<sup>7</sup> накопителей энергии, представляемой в виде прямой задачи

$$SoC(t) = SoC(0) + \int_0^t \eta(\cdot) i(\tau) d\tau. \quad (7)$$

Здесь  $\eta(\cdot)$  – КПД процесса заряда, который, в свою очередь, может зависеть от  $SoC$ .  $SoC$  может быть выражено в % и в ампер-часах (или кВт · ч). Однако, определение уровня заряда может рассматриваться и как обратная задача по отношению к мгновенному току накопления  $i(\tau)$ , который предполагается положительным для заряда и отрицательным для разряда. В таком случае интегральные модели Вольтерра дают больше возможностей учета нелинейности процессов старения аккумулирующих устройств (рис. 1), зависящих от режимных показателей, связанных с ЗПФМ.

<sup>6</sup>А. С. Апарцин, А. Б. Бакушинский. Приближенное решение интегральных уравнений Вольтерра первого рода методом квадратурных сумм. Дифференц. и интегр. ур-ния. (Иркут. гос. ун-т). Т. 1. 1972. С. 248–258.

<sup>7</sup>J. Schuhmacher. INSEL – Interactive Simulation of Renewable Electrical Energy Supply Systems, Reference Manual. Renewable Energy Group, Department of Physics, University of Oldenburg. 1993.

В п. 3.3.2 для задачи вычисления объема мощностей ВИЭ для покрытия дисбаланса генерации была выбрана ЭЭС Германии, так как данная ЭЭС является достаточно крупной и имеет большое число ВИЭ и систем накопителей энергии для выравнивания суточной неоднородности графика электрической нагрузки. На данный момент на территории Германии установлено около 6,7 ГВт гидроаккумулирующих электростанций<sup>8</sup>. Для тестирования предложенных подходов использовались общедоступные данные нагрузки энергосистемы Германии за период с начала 2006 по конец 2013 года, предоставленные ENTSO-E. При этом нужно отметить существенную долю ВИЭ, которая на 2007 год составляла 13,6% и к настоящему времени по данным статистической службы Европейского союза<sup>9</sup> выросла почти втрое. Также были использованы данные по выработке электроэнергии различных источников, расположенных в Германии<sup>10</sup>.

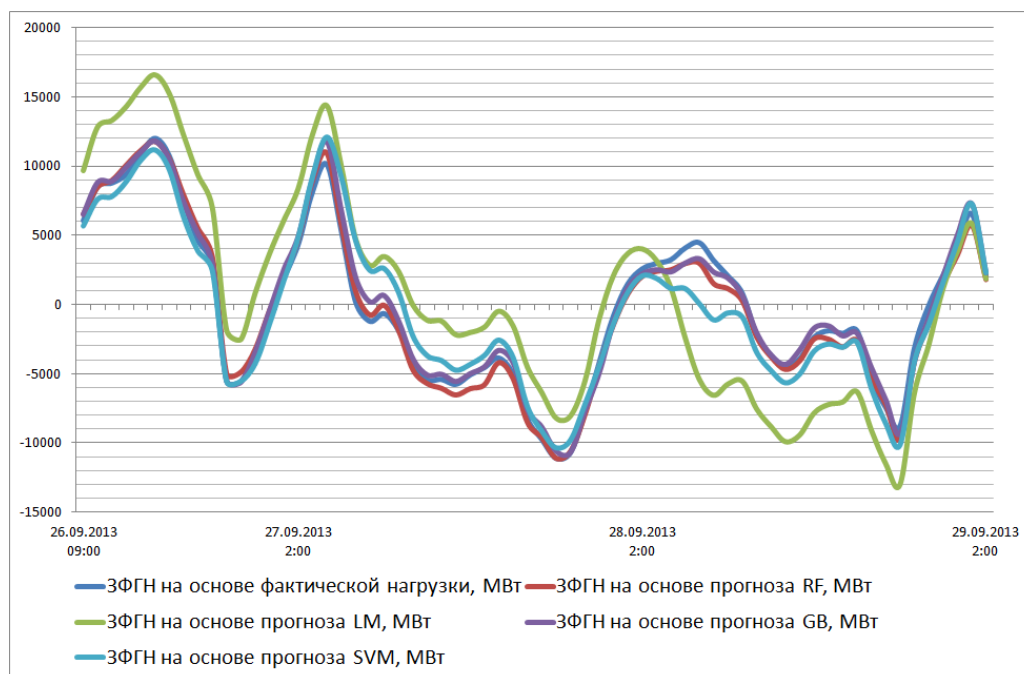


Рис. 2 — Вычисленная знакопеременная функция генерации накопителей.

В качестве результата работы модели (2) на рис. 2 показана знакопеременная функция мощности на основе фактической нагрузки и ее прогнозов. В данных расчетах в качестве тестового примера для КПД использовано постоянное значение 92%. Положительные значения функции отражают процесс заряда накопителей, а отрицательные значения – генерацию для покрытия дисбаланса нагрузки. Значение искомой функции  $x(s)$  имеет зависимость от качества работы прогнозной модели. На рис.2 показана знакопеременная функция генерации накопителей (ЗФГН). Как показали результаты расчетов (рис. 2), для покрытия накопителями дисбаланса между генерацией

<sup>8</sup><https://www.dena.de/en/topics-projects/energy-systems/flexibility-and-storage/pumped-storage/>

<sup>9</sup><http://appsso.eurostat.ec.europa.eu/nui/submitViewTableAction.do>

<sup>10</sup><https://www.energy-charts.de/power.htm>

и потреблением энергии необходимо как минимум 12 ГВт суммарной мощности накопителей.

Для численных расчетов в качестве примера места для потенциальной установки нескольких ЭЭС с ВИЭ и накопителями энергии в п. 3.3.4 рассмотрено сообщество из четырех ЭЭС, расположенных в природо-охранной зоне на берегу озера Байкал в селе Горячинск. Данное гибридное (имеется в виду переменного/постоянного тока) сообщество ЭЭС имеет двухуровневый алгоритм оперативного управления: на локальном уровне решается задача стохастической оптимизации систем накопителей энергии с целью минимизации эксплуатационных затрат каждой изолированной гибридной ЭЭС; алгоритм централизованного уровня управляет настройками инверторов для минимизации потока активной мощности во внешнюю сеть, обеспечивая оптимальное перераспределение активной мощности между ЭЭС. В этом случае для моделирования накопителей распределенных систем хранения энергии в каждой из ЭЭС используются системы интегральных уравнений Вольтерра, математически описывающими взаимосвязь между локальным и централизованным уровнями управления сообществом. Для этого в (2) необходимо заменить уравнение Вольтерра на систему нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода с разрывными ядрами, в которых на локальном уровне оптимизации учитываются коэффициенты интенсивности перетока мощности от накопительных систем других ЭЭС. К правой части, кроме перечисленных в (4) функций, добавляется  $f_{iAC DC}$  – поток перераспределения активной мощности переменного / постоянного тока на централизованном уровне. Знакопеременную функцию мощности на основе  $x_i(\tau)$  можно найти для каждого хранилища с использованием предложенной модели. Численные результаты определения знакопеременной функции изменения мощности и уровня заряда на основе данной интегральной модели были получены с использованием численного метода коллокаций, предложенного в [4; 6] и продемонстрировавшего свою эффективность. На рис. 3 показано, что модель Вольтерра позволяет получить более точное представление о режимных параметрах накопителей энергии, т.к. учитывает в матричном ядре различные зависимости КПД от внешних факторов, в том числе и нелинейного характера (рис. 1).

**В заключении** подведены итоги и **основные результаты диссертационной работы:**

1. предложены новые модели динамических накопителей энергии, проведено сравнение с другими современными моделями, показаны преимущества изложенного подхода;
2. разработаны новые численные методы решения скалярных интегральных уравнений Вольтерра первого рода с разрывными ядрами для случая нелинейной зависимости искомой функции, систем уравнений, предложен регуляризованный метод с использованием квадратур Гаусса;

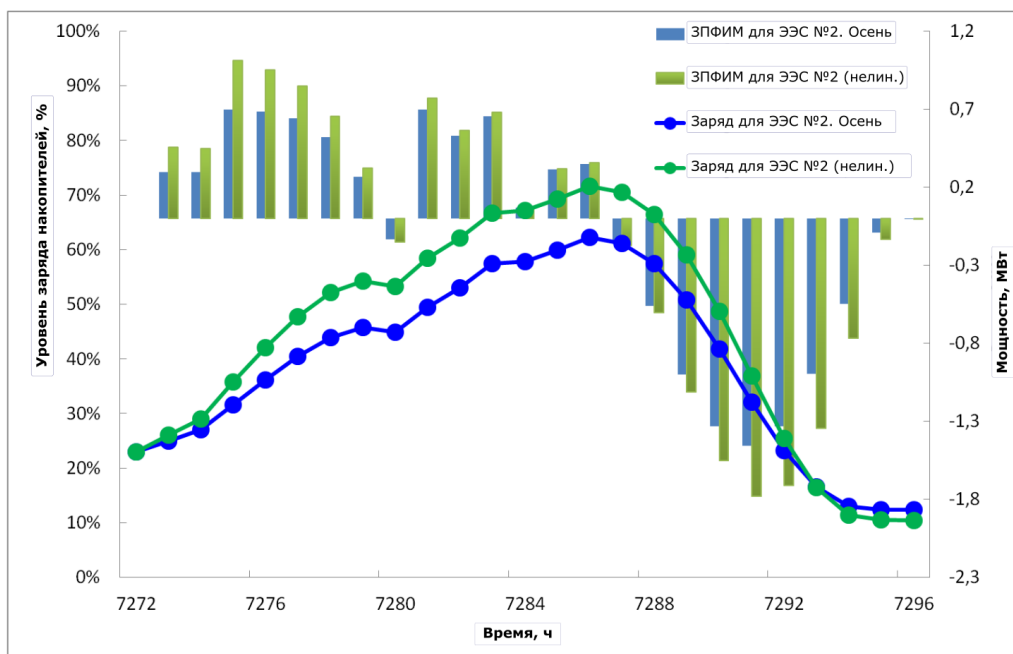


Рис. 3 — ЗПФИМ в МВт. и уровень заряда для энергосистемы №2. Осень

3. разработано программное обеспечение для исследования ЭЭС с ВИЭ и накопителями энергии.

Предложенные в научной работе математические модели являются универсальными и могут применяться в проектировании и эксплуатации интегрированных энергетических систем с возобновляемыми источниками энергии во многих отраслях (в туризме, строительстве, на железнодорожном и других видах транспорта), а также расчетах технической и экономической эффективности при интеграции возобновляемых источников энергии в существующие энергетические системы с учетом влияния нелинейных процессов на КПД аккумулирования энергии.

## Публикации в изданиях из перечня ВАК

- [1] Сидоров, Д. Н. Численное решение интегральных уравнений Вольтерра I рода с кусочно-непрерывными ядрами [Текст] / Д. Н. Сидоров, А. Н. Тында, И. Р. Муфтахов // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. — 2014. — Т. 7, № 3. — С. 107–115. — DOI: 10.14529/mmp140311 (**Scopus Q4, ВАК**)
- [2] Muftahov, I. R. On perturbation method for the first kind equations: regularization and applications [Text] / I. R. Muftahov, D. N. Sidorov, N. A. Sidorov // Bul. of the South Ural State University. Ser. "Math. Model., Programming and Comp. Software". — 2015. — Vol. 8, no. 2. — P. 69–80. — DOI: 10.14529/mmp150206 (**Scopus Q4, ВАК**)



- [3] Сидоров, Н. А. О роли метода возмущений и теоремы Банаха - Штейнгауза в вопросах регуляризации линейных уравнений первого рода [Текст] / Н. А. Сидоров, Д. Н. Сидоров, И. Р. Муфтахов // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. — 2015. — Т. 14. — С. 82–99. **(ВАК)**
- [4] Muftahov, I. R. Solvability and numerical solutions of systems of nonlinear Volterra integral equations of the first kind with piecewise continuous kernels [Text] / I. R. Muftahov, D. N. Sidorov // Bul. of the South Ural State University. Ser. "Math. Model., Programming and Comp. Software". — 2016. — Vol. 9, no. 1. — P. 130–136. — DOI: 10.14529/mmp160111 **(Scopus Q3, ВАК)**
- [5] Муфтахов, И. Р. О регуляризации по Лаврентьеву интегральных уравнений первого рода в пространстве непрерывных функций [Текст] / И. Р. Муфтахов, Д. Н. Сидоров, Н. А. Сидоров // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. — 2016. — Т. 15. — С. 62–77. **(ВАК)**
- [6] Muftahov, Ildar. Numeric solution of Volterra integral equations of the first kind with discontinuous kernels [Text] / Ildar Muftahov, Aleksandr Tynda, Denis Sidorov // Journal of Computational and Applied Mathematics. — 2017. — Vol. 313. — P. 119 – 128. — DOI: 10.1016/j.cam.2016.09.003 **(Scopus Q2)**
- [7] Volterra Models in Load Leveling Problem [Text] / D. Sidorov, A. Zhukov, A. Foley, A. Tynda, I. Muftahov [et al.] // E3S Web Conf. — 2018. — Vol. 69. — P. 01015. — DOI: 10.1051/e3sconf/20186901015 **(Scopus)**
- [8] Сидоров, Д. Н. Интегральные модели для управления накопителями энергии на основе прогноза нагрузки в ЭЭС с возобновляемыми источниками генерации [Текст] / Д. Н. Сидоров, А. В. Жуков, И. Р. Муфтахов // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. — 2018. — Т. 26. — С. 76–90. — DOI: 10.26516/1997-7670.2018.26.76 **(WoS, ВАК)**
- [9] Тында, А. Н. Численный метод решения систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра I рода с разрывными ядрами [Текст] / А. Н. Тында, Д. Н. Сидоров, И. Р. Муфтахов // Журнал Средневолжского математического общества. — 2018. — Т. 20, № 1. — С. 55–63. — DOI: 10.15507/2079-6900.20.201801.55-63 **(ВАК)**
- [10] Energy balancing using charge/discharge storages control and load forecasts in a renewable-energy-based grids [Text] / D. Sidorov, Q. Tao, I. Muftahov [et al.] // 2019 Chinese Control Conference (CCC). — [S. l. : s. n.], 2019. — P. 6865–6870. — DOI: 10.23919/ChiCC.2019.8865777 **(Scopus)**

- [11] Noeiaghdam, S. Control of Accuracy on Taylor-Collocation Method for Load Leveling Problem [Text] / S. Noeiaghdam, D.N. Sidorov, I.R. Muftahov // The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics. — 2019. — Vol. 30. — P. 59–72. — DOI: 10.26516/1997-7670.2019.30.59 **(Scopus, BAK)**
- [12] A Dynamic Analysis of Energy Storage With Renewable and Diesel Generation Using Volterra Equations [Text] / D. Sidorov, I. Muftahov, N. Tomin [et al.] // IEEE Transactions on Industrial Informatics. — 2020. — Vol. 16, no. 5. — P. 3451–3459. — DOI: 10.1109/TII.2019.2932453 **(Scopus Q1)**
- [13] Toward Zero-Emission Hybrid AC/DC Power Systems with Renewable Energy Sources and Storages: A Case Study from Lake Baikal Region [Text] / Denis Sidorov, Daniil Panasetsky, Nikita Tomin [et al.] // Energies. — 2020. — Mar. — Vol. 13, no. 5. — P. 1226. — DOI: 10.3390/en13051226 **(WoS Q2, Scopus Q2)**
- [14] Nonlinear Systems of Volterra Equations with Piecewise Smooth Kernels: Numerical Solution and Application for Power Systems Operation [Text] / Denis Sidorov, Aleksandr Tynda, Ildar Muftahov [et al.] // Mathematics. — 2020. — Aug. — Vol. 8, no. 8. — P. 1257. — DOI: 10.3390/math8081257 **(WoS Q1, Scopus Q3)**
- [15] Muftahov, I. R. Numerical Analysis of Fractional Order Integral Dynamical Models with Piecewise Continuous Kernels [Text] / A. Tynda, D. Sidorov, I. Muftahov // Bul. of the South Ural State University. Ser. "Math. Model., Programming and Comp. Software". — 2020. — Vol. 13, no. 4. — P. 60–67. — DOI: 10.14529/mmp200405 **(Scopus Q3, BAK)**
- [16] Volterra Model of Energy Storage with Nonlinear Efficiency in Integrated Power Systems [Text] / Ildar Muftahov, Denis Sidorov, Aleksei Zhukov, Dmitriy Karamov // Progress in Intelligent Decision Science, part of the AISC book series / Ed. by Tofigh Allahviranloo, Soheil Salahshour, Nafiz Arica. — Vol. 1301. — Cham : Springer International Publishing, 2021. — P. 808–815. — DOI: 10.1007/978-3-030-66501-2\_65 **(Scopus Q3)**

## Публикации в других изданиях

- [17] Муфтахов, И. Р. Об одной программной системе моделирования развивающихся динамических систем [Текст] / И. Р. Муфтахов // Сборник статей VII Межд. науч.-тех. конференции молодых специалистов, аспирантов и студентов. — ПГУ, Пенза : [б. и.], 2013. — С. 171–174.

- [18] Muftahov, I. R. Numerical Solution of Weakly Regular Volterra Integral Equations of the 1st Kind [Текст] / I. R. Muftahov // Сборник тезисов конференции «XVI Байкальская международная школа-семинар. Методы Оптимизации и их Приложения». — о. Ольхон : [б. и.], 2014. — С. 155–157.
- [19] Муфтахов, И. Р. О численном решении одного класса нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода [Текст] / И. Р. Муфтахов // Тезисы и тексты докладов международной конференции «Бесконечномерный анализ, стохастика, математическое моделирование: новые задачи и методы». — РУДН, Москва : [б. и.], 2014. — С. 149–150.
- [20] Муфтахов, И. Р. О применении интегральных уравнений Вольтерра в моделировании развивающихся динамических систем [Текст] / И. Р. Муфтахов, Д. Н. Сидоров, А. Н. Тында // Тезисы Международной конференции «Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики – 2015», посвященной 90-летию со дня рождения академика Гурия Ивановича Марчука. — ИВМиМГ СО РАН, Новосибирск : [б. и.], 2015. — С. 12–12.

## **Свидетельства о регистрации программ для ЭВМ**

- [21] Муфтахов, И. Р. Программная система анализа и сравнения результатов численных решений линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода с разрывными ядрами: свидетельство № 2015619376 [Текст] / И. Р. Муфтахов, Д. Н. Сидоров // — Правообладатель ФГБОУ ВО «Иркутский национальный исследовательский технический университет». Реестр программ для ЭВМ. — 2015. — заявка № 2015614744 от 04.06.2015, дата регистрации 01.09.2015.
- [22] Муфтахов, И. Р. Программно-вычислительный комплекс для эффективного управления накопителями энергии на основе уравнений Вольтерра: свидетельство № 2020610640 [Текст]. — Правообладатель Муфтахов Ильдар Ринатович. Реестр программ для ЭВМ. — 2020. — заявка № 2019667750 от 26.12.2019, дата рег. 17.01.2020.