

УТОЧНЕНИЕ ОЦЕНКИ ВЕСА РЕШЕНИЯ ИНДИВИДУАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ О ПОКРЫТИИ, ПОЛУЧАЕМОГО ЖАДНЫМ АЛГОРИТМОМ

А.В. Пролубников

Омский государственный университет, Омск
e-mail: a.v.prolubnikov@mail.ru

Рассматривается взвешенная задача о покрытии множества [1]. Оценкой точности алгоритма Alg решения задачи о покрытии называется значение $\rho(Alg)$ такое, что $c(Alg)/c(Opt) \leq \rho(Alg)$, где $c(Alg)$ — оценка сверху весов решений индивидуальных задач о покрытии, получаемых алгоритмом Alg , $c(Opt)$ — вес оптимального покрытия.

Как невзвешенная, то есть когда веса всех множеств одинаковы, так и взвешенная задача о покрытии NP -трудны [1]. Как показано в [2], при условии $P \neq NP$ жадный алгоритм — асимптотически лучший приближенный алгоритм для её решения. Пусть Gr — покрытие, получаемое с его помощью, Opt — оптимальное покрытие. Для задачи о покрытии имеет место [3] оценка: $c(Gr)/c(Opt) \leq H(m) \leq \ln m + 1$, где $H(m) = \sum_{k=1}^m 1/k$. Эта оценка может быть уточнена для индивидуальной задачи о покрытии: $c(Gr)/c(Opt) \leq H(m')$, где m' — наибольшая из мощностей множеств, входящих в оптимальное покрытие. Поскольку в общем случае эта оценка не улучшаема [4], то для того, чтобы её уточнить для индивидуальной задачи о покрытии, можно использовать дополнительные параметры, расчёт которых имеет небольшую вычислительную сложность. Так как в общем случае нахождение оптимального покрытия — это труднорешаемая задача, то для нахождения уточнения за m' можно принять максимальную мощность среди мощностей множеств. Другим таким параметром является d — наибольшее число множеств, которым может принадлежать покрываемый ими элемент. Оценка $c(Alg)/c(Opt) \leq d$ так же как и приведённая выше оценка является неулучшаемой. Оценку гарантированной точности и её уточнения можно получать также для алгоритмов, разработанных для решения отдельных классов задач о покрытии.

Нами даётся новое доказательство логарифмической оценки гарантированного приближения для жадного алгоритма, позволяющее получить уточнение этой оценки для индивидуальной задачи о покрытии. Для большого числа индивидуальных задач это уточнение оказывается лучше, чем уточнение $c(Gr)/c(Opt) \leq H(m')$.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Гэри, Д. Джонсон *Вычислительные машины и труднорешаемые задачи*. — М.: Мир, 1982, с. 194.
2. R. Raz, S. Safra *A Sub-constant Error-probability Low-degree Test, and Sub-constant Error-probability PCP Characterization of NP*. — STOC'97 Proceedings of the Twenty-ninth Annual ACM Symposium on Theory of Computing, 1997, pp. 475-484.
3. V. Chvatal *A Greedy Heuristic for The Set-covering Problem*. — Mathematics of Operation Research, V. 4, No. 3, 1979, pp. 233-235.
4. Feige, U. *A Threshold of $\ln n$ for Approximating Set Cover*. — J. ACM 45, 1998, No. 4, pp. 634-652.