ПРИБЛИЖЕННЫЕ АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ТРУДНОРЕШАЕМЫХ ЗАДАЧ ПОЛИЭДРАЛЬНОЙ ОТДЕЛИМОСТИ[1]

К.С. Кобылкин

Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург
e-mail: kobylkinks@gmail.com

В докладе рассматривается задача покрытия бихроматического множества точек набором монохроматических шаров применительно к задаче полиэдральной отделимости.

Задача 1. Для заданного множества точек $X = \{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{l}$, где $x_i \in \mathbb{R}^d$, а $y_i \in \{-1, 1\}$, найти такой минимальный по мощности набор непересекающихся шаров $\mathcal{D}$, что для любого $D \in \mathcal{D}$ имеем либо $y = 1$ для всех $z = (x, y) \in X \cap D$, либо $y = -1$ для всякого $z \in X \cap D$.

В обозначениях задачи 1 задача 2 полиэдральной отделимости [2] двух подмножеств A и B множества X с последней координатой $y = 1$ и $y = -1$ соответственно состоит в нахождении такого минимального по мощности набора гиперплоскостей, что всякие две точки $a \in A$ и $b \in B$ строго разделяются некоторой гиперплоскостью в этом наборе.

Оказывается, любое допустимое решение $\mathcal{D}$ мощности N задачи 1 можно легко преобразовать в таковое для задачи 2. При $d = 2$ достаточно за время $O(N \log N)$ построить диаграмму мощности для кругов из $\mathcal{D}$ (обобщение диаграммы Вороного), а затем за время $O(N)$ преобразовать ее в допустимое решение мощности $O(N)$ для задачи 2. При $d > 2$ это преобразование легко сделать за время $O(N^2)$, получая решение мощности $O(N^2)$. Статистический аналог подобного преобразования состоит в том, чтобы для уже разбитых на кластеры данных найти "мягкую" диаграмму мощности с наибольшим отступом [1].

Чтобы дать оценку точности получаемого приближения для задачи 2, введем некоторые обозначения. Пусть k_{opt} — ее оптимальное значение, а N_{opt} — мощность минимального разбиения множества X на "монохроматические" (с одинаковой последней координатой y) подмножества с условием, что выпуклая оболочка каждого из них не содержит точек с противоположной координатой y. Тогда при $d = 2$ точность получаемого приближенного решения задачи 2 можно выразить через точность соответствующего приближенного решения задачи 1 как $O(k_{opt}\Delta)$, где $\Delta = N/N_{opt}$. При $d > 2$ ввиду достижимости оценки $k_{opt} \geq \Theta(\sqrt[d]{N_{opt}})$ точность получаемого приближенного решения задачи 2 будет ниже.

Для приближенного решения задачи 1 адаптируется $O\left(|X|^{\lceil \frac{d}{2} \rceil} (\varepsilon^{-2} \log |X|)^{\lceil (d+1)/2 \rceil}\right)$-процедура приближенного (с точностью $\varepsilon > 0$) поиска шара, содержащего максимальное число точек из A (соответственно, из B), без общих точек с B (соответственно, с A) [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. S. Borgwardt *On soft power diagrams.* — arXiv:1307.3949[cs.LG]. — 2013, 22p.
2. N. Megiddo *On the Complexity of Polyhedral Separability.* — Discrete and Computational Geometry. — 1988, №3, P. 325–337.
3. Aronov B., Har-Peled S. *On approximating the depth and related problems.* — SIAM Journal of Computing. — 2008, Vol. 38. P. 899–921.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Президиума УрО РАН (проекты № 12-П-1-1016, 12-С-1-1017/1), РФФИ (проекты № 13-07-00181, 13-01-00210).