МНОГОГРАННИК ЗАДАЧИ АППРОКСИМАЦИИ ГРАФА

Р.Ю. Симанчев, И.В. Уразова

КНИОРП ОНЦ СО РАН, Омский государственный университет, Омск
e-mail: osiman@rambler.ru, urazovainn@mail.ru

В работе рассматривается следующая задача. Пусть $K_n = (V, E)$ – полный обыкновенный граф на n вершинах, G – подграф графа K_n. Через $\mathcal{M}(V)$ обозначим семейство всех подрафов графа K_n, компоненты связности которых являются кликами. Задача аппроксимации графа заключается в нахождении графа $M \in \mathcal{M}(V)$, минимизирующего функционал $\rho(G, M) = |EG \cup EM| - |EG \cap EM|$ на множестве $\mathcal{M}(V)$.
В общем случае эта задача является NP-трудной [1]. Для этой задачи известны некоторые полиномиально разрешимые случаи [2], построены оценки целевой функции [3], разработаны приближенные алгоритмы [4].

Нами рассматривается полиэдральная структура задачи аппроксимации графа. Вектором инциденций подграфа $H \subset K_n$ назовем вектор $x^H \in R^E$, где R^E – пространство, ассоциированное с множеством E, с координатами $x^H_e = 1$, если $e \in EH$ и $x^H_e = 0$, если $e \notin EH$. Соответсвенно, многогранником задачи будет множество $P = conv\{x^M \in R^E | M \in \mathcal{M}(V)\}$.

Теорема 1. *Многогранник P совпадает с выпуклой оболочкой целочисленных решений системы*

$$\begin{aligned} x_{uv} + x_{u\omega} - x_{v\omega} &\le 1 \\ x_{uv} - x_{u\omega} + x_{v\omega} &\le 1 \\ -x_{uv} + x_{u\omega} + x_{v\omega} &\le 1, \\ x_{uv} &\ge 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где $u, v, \omega \in V$ – всевозможные тройки попарно различных вершин.

В этих терминах целевая функция $\rho(G, M)$ при заданном G будет иметь вид

$$f(x) = |EG| + \sum_{e \in E\bar{G}} x_e - \sum_{e \in EG} x_e.$$

Теорема 2. *Каждое ограничение системы (1) определяет фасету многогранника P.*

Кроме того, в работе описаны и другие классы фасетных неравенств для многогранника P. Для некоторых классов приводятся решения задачи идентификации (separation problem).

ЛИТЕРАТУРА

1. Shamir R., Sharan R., Tsur D. *Cluster graph modification problems*//Discrete Applied Mathematics. — 2004. V. 144, N 1-2. P. 173-182.
2. Фридман Г.Ш. *Одна задача аппроксимации графов*// Управляемые системы. — 1971. Вып.8, с. 73-75.
3. Ильев В.П., Фридман Г.Ш. *К задаче аппроксимации графами с фиксированным числом компонент*// Докл. АН СССР. — 1982. Т. 264, N 3, с. 533-538.
4. Ильев В.П., Ильева С.Д., Навроцкая А.А. *Приближенные алгоритмы для задач аппроксимации графов*// Дискрет. анализ и исследование операций. — 2011. Т. 18, N 1, с. 41-60.