Некоторые приближенные алгоритмы для NP-полной задачи упорядочения

О. Н. Шульгина

Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань
e-mail: onshul@mail.ru

Для NP-полной в сильном смысле задачи теории расписаний – минимизации максимального временного смещения обоснованы некоторые свойства оптимальных перестановок и на их основе разработаны приближенные алгоритмы решения задачи.

На одном приборе не ранее момента времени t необходимо обслужить n требований. Запрещены одновременное обслуживание более одного требования и прерывания в процессе обслуживания любого требования. Считаем, что требования заданы числами от 1 до n. Положим $N = \{1, 2, ..., n\}$. Для каждого требования j, $j \in N$, заданы: момент поступления требования на обслуживание r_j; продолжительность обслуживания $p_j \geq 0$; директивный срок завершения обслуживания d_j. Числа t, r_j, p_j, d_j являются целыми. Под расписанием будем понимать перестановку элементов множества N. Будем обозначать через $\Pi(N, t)$ множество всех расписаний обслуживания требований множества N с момента времени t. Задача заключается в отыскании такого расписания π^*, что $\max\limits_{j\in N}\{t_j(\pi^*) - d_j\} = \min\limits_{\pi\in\Pi(N,t)} \max\limits_{j\in N}\{t_j(\pi) - d_l\}$, где $t_j(\pi)$ – момент завершения обслуживания требования j при расписании π. Расписание π^* назовем оптимальным.

Пусть $N' \subseteq N$, $N' \neq \oslash$, $t' \geq t$, j_d – требование с минимальным директивным сроком из N', $\pi \in \Pi(N', t')$. Положим $J_{max}(\pi, j_d) = \{j \in N' \setminus \{j_d\} : r_j \geq r_{j_d}, j_d \xrightarrow{\pi} j\}$, $J_{min}(\pi, j_d) = \{j \in N' \setminus \{j_d\} : r_j < r_{j_d}, j_d \xrightarrow{\pi} j\}$. Отметим, что множества $J_{max}(\pi, j_d)$, $J_{min}(\pi, j_d)$ могут быть пустыми. В работе [1] доказано существование оптимального расписания π^*, для которого $J_{max}(\pi^*, j_d) = \{j \in N' \setminus \{j_d\} : r_j \geq r_{j_d}\}$ и разработана общая схема отыскания указанного расписания при предположении, что множество $J_{min}(\pi^*, j_d)$ можно отыскать некоторым алгоритмом А трудоемкости $O(x(n))$ операций, где $x(n)$ – функция от размерности задачи.

Схема [1]. Первоначально полагаем $t_1 = \max\{r_{min}(N), t\}$, $N_1 = N$, $\pi_1 = \pi^{\oslash}$. Пусть уже известны t_k, N_k, π_k, и $k \geq 1$. Если $N_k = \oslash$, то π_k – оптимальное расписание, и процесс заканчивается. В противном случае выбираем j_d^k – требование с минимальным директивным сроком из N_k, $J_{max}^k = \{j \in N_k \setminus \{j_d^k\} : r_j \geq r_{j_d^k}\}$, некоторым алгоритмом А отыскиваем множество $J_{min}^k = J_{min}(\pi^*, j_d^k)$, и полагаем $N_{k+1} = J_{min}^k \cup J_{max}^k$, $N^k = N_k \setminus (J_{max}^k \cup J_{min}^k \cup \{j_d^k\})$, $\pi_{k+1} = (\pi_k, \vec{\pi}_r^k, j_d^k)$, где $\vec{\pi}_r^k \in \vec{\Pi}_r(N^k, t_k)$, $t_{k+1} = T(\pi_{k+1})$

Обоснованы некоторые свойства оптимальных расписаний и на их основе разработаны алгоритмы псевдополиномиальной трудоемкости для отыскания множеств J_{min}^k в реализации схемы. Количество итераций алгоритмов не превышает n. На каждой итерации первого алгоритма в расписания, постоенные на предыдущем шаге, добавляется требование с наибольшим моментом поступления из оставшихся на специальным образом найденное место. На каждой итерации второго алгоритма упорядочивается требование с наименьшим моментом поступления из оставшихся, частично сохраняя структуру расписания, построенного на предыдущем шаге.

ЛИТЕРАТУРА

1. О. Н. Шульгина *Общая схема решения одной NP-трудной в сильном смысле задачи теории расписаний* // Журн. Автоматика и телемеханика. – 2004. – N 3 – С. 108 – 116.