АЛГОРИТМЫ С ОЦЕНКАМИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КВАДРАТИЧНЫХ ЗАДАЧ ПОИСКА ПОДМНОЖЕСТВА И ПОДПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ВЕКТОРОВ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ[1]

С.М. Романченко

Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения РАН, Новосибирск
e-mail: rsm@math.nsc.ru

Рассматривается следующая NP-трудная в сильном смысле [1]

Задача. *Дано: последовательность* $\mathcal{Y} = (y_1, \ldots, y_N)$ *векторов из* $\mathbb{R}^q$, *натуральные числа* $M > 1$, $T_{\min}$ *и* $T_{\max}$. *Найти: подмножество* $\mathcal{M} = \{n_1, \ldots, n_M\} \subseteq \{1, \ldots, N\}$ *номеров элементов последовательности* $\mathcal{Y}$ *такое, что*

$$\sum_{n \in \mathcal{M}} \|y_n - \overline{y}(\mathcal{M})\|^2 \to \min,$$

где $\overline{y}(\mathcal{M}) = \frac{1}{|\mathcal{M}|} \sum_{i \in \mathcal{M}} y_i$, *при ограничениях*

$$1 \le T_{\min} \le n_m - n_{m-1} \le T_{\max} \le N,\ m = 2, \ldots, M,$$

на элементы набора $\mathcal{M}$.

В случае $T_{\min} = 1$ и $T_{\max} = N$ сформулированная задача эквивалентна NP-трудной в сильном смысле [2] задаче поиска «компактного» подмножества во множестве $\mathcal{Y}$. Эти задачи актуальны, в частности, в проблемах помехоустойчивого анализа данных и распознавания образов (см., например, [1], [2] и цитированные там работы).

В работе предложены следующие алгоритмы решения задач.

Для задачи поиска подмножества векторов построены:

- 2–приближённый алгоритм с трудоёмкостью $\mathcal{O}(qN^2)$;
- точный псевдополиномиальный алгоритм с трудоёмкостью $\mathcal{O}(qN(2MB)^q)$ для случая, когда размерность q пространства фиксированна, а компоненты векторов целочисленны, где B — максимальное абсолютное значение компонент входных векторов;
- схема FPTAS, гарантирующая $(1+\varepsilon)$–приближённое решение за время $\mathcal{O}(N^2(M/\varepsilon)^q)$.

Для задачи поиска подпоследовательности обоснованы:

- 2–приближённый алгоритм с трудоёмкостью $\mathcal{O}(N^2(q + N^2))$;
- точный псевдополиномиальный алгоритм с трудоёмкостью $\mathcal{O}(N(q+N^2)(2MB)^q)$ для случая, когда размерность q пространства фиксированна, а компоненты векторов целочисленны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кельманов А.В., Пяткин А.В. *О сложности некоторых задач выбора подпоследовательности векторов* — Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2012. Т. 52, № 12. С. 2284–2291.
2. Кельманов А.В., Пяткин А.В. *NP-полнота некоторых задач выбора подмножества векторов* — Дискрет. анализ и исслед. операций. 2010. Т. 17, № 5. С. 37–45.

[1]Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ №№12-01-00090, 13-07-00070.