О ПОРЯДКЕ СИНГУЛЯРНОСТИ ОБОБЩЕННОГО РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА ТИПА СВЕРТКИ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ[1]

С.С. Орлов

Иркутский государственный университет, Иркутск
e-mail: orlov_sergey@inbox.ru

Пусть E_1, E_2 — вещественные банаховы пространства, $\mathbf{u} = u(t)$, $\mathbf{f} = f(t)$ — функции неотрицательного вещественного аргумента t со значениями в E_1 и E_2 соответственно. Рассмотрим интегральное уравнение

$$B\mathbf{u} - g * A\mathbf{u} = \mathbf{f}. \tag{1}$$

Здесь B и A — замкнутые линейные операторы из E_1 в E_2, причем $D(B) \subseteq D(A)$ и $\overline{D(B)} = \overline{D(A)} = E_1$, ядро $g(t)$ — числовая функция. Предполагается, что оператор B фредгольмов, т. е. $\overline{R(B)} = R(B)$ и $\dim N(B) = \dim N(B^*) = n < +\infty$, а функция $g(t)$ имеет в точке $t = 0$ нуль порядка r.

К этому уравнению допускает редукцию, например, следующая краевая задача:

$$(\Delta - \alpha)\varphi(t, \bar{x}) + \int\limits_0^t (t-\tau)\beta\varphi_{x_N^2}(\tau, \bar{x})d\tau = f(t, \bar{x}),\ t > 0,\ \bar{x} = (x_1, \ldots, x_N) \in \Omega;\ \varphi(t, \bar{x})|_{\bar{x}\in\partial\Omega} = 0,$$

где Ω — область в $\mathbb{R}^N$ с границей $\partial\Omega$ класса C^∞, α и β — отличные от нуля постоянные. В случае $N = 3$ эта задача моделирует низкочастотные электронные (ионные) магнито-звуковые колебания во внешнем магнитном поле [1].

С помощью конструкции фундаментальной оператор-функции вырожденного интегро-дифференциального оператора в банаховых пространствах [2] построено обобщенное решение интегрального уравнения (1) в классе распределений с ограниченным слева носителем и доказана его единственность. Обнаружена связь между порядком сингулярности обобщенного решения [3] и порядком нуля r функции $g(t)$ в точке $t = 0$. Также получены условия на входные данные задачи, при которых порядок сингулярности обобщенного решения равен нулю, т. е., когда оно совпадает с непрерывным (классическим) решением рассматриваемого интегрального уравнения (1). Полученные результаты проиллюстрированы примером краевой задачи физики плазмы.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.Г. Свешников, А.Б. Альшин, М.О. Корпусов, Ю.Д. Плетнер *Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа.* М.: Физматлит, 2007, 736 с.
2. М.В. Фалалеев *Фундаментальные оператор-функции сингулярных дифференциальных операторов в банаховых пространствах.* — Сиб. мат. журн. — 2000, т.41, №5, с. 1167-1182.
3. Г.Е. Шилов *Математический анализ. Второй специальный курс.* М.: Наука, 1965, 328 с.

[1]Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований в рамках научного проекта № 14-01-31175 мол_а.