ВАРИАЦИОННЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ С ПОЗИЦИОННЫМИ УПРАВЛЕНИЯМИ, УСИЛИВАЮЩИЕ ПРИНЦИП МАКСИМУМА

В.А. Дыхта

Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Иркутск
e-mail: dykhta@gmail.com

Доклад посвящен необходимым условиям оптимальности для следующей задачи (P):

$$\dot{x} = f(t,x,u), \quad x(t_0) = x_0, \quad u(t) \in U, \quad t \in T = [t_0, t_1], \tag{1}$$

$$J[x,u] = l(x(t_1)) \to \min .$$

Здесь множество U компактно, функция f непрерывна, локально липшицева по x и обеспечивает относительную компактность в $C(T, R^n)$ множества всех допустимых траекторий системы, функция l локально липшицева, но для краткости в анонсируемых результатах она предполагается класса $C^2(R^n)$.

Хотя задача (P) рассматривается в стандартном классе программных управлений $\mathcal{U} = L_\infty(T, U)$, обсуждаемые условия оптимальности формулируются с использованием позиционных управлений, т.е. произвольных однозначных функций $v : T \times R^n \to U$. В качестве решений системы (1) с позиционным управлением v рассматриваются решения Каратеодори и конструктивные движения Красовского-Субботина; объединение таких решений обозначается через $\mathcal{X}(v)$. Управление v назовем *управлением спуска* по функционалу J в допустимой точке $\bar{\sigma} = (\bar{x}, \bar{u})$, если $\exists\, x \in \mathcal{X}(v) : l(x(t_1)) < J[\bar{\sigma}]$. Ясно, что если $\bar{\sigma}$ — оптимальная пара в задаче (P), то в точке $\bar{\sigma}$ отсутствуют управления спуска.

В рассматриваемых условиях оптимальности управления потенциального спуска генерируются по правилу экстремального прицеливания произвольной опорной мажорантой функционала J в точке $\bar{\sigma}$, т.е. слабо убывающим решением $\varphi(t,x)$ соответствующего неравенства Гамильтона-Якоби со специальным краевым условием. В простейшем варианте опорные мажоранты порождаются решениями сопряженной системы, а получаемые с ними необходимые условия являются прямым усилением ПМ. Ввиду особого интереса к подобного рода результатам сформулируем это усиление для негладкой задачи (P).

Пусть $\Psi(\bar{\sigma})$ — множество решений сопряженного включения Кларка

$$-\dot{\psi}(t) \in \partial_x[\psi(t) \cdot f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))], \quad \psi(t_1) = l_x(\bar{x}(t_1)),$$

$$p(t,x) := \psi(t) + l_x(x) - l_x(\bar{x}(t)), \quad \psi \in \Psi(\bar{\sigma}),$$

$$U_\psi(t,x) := \operatorname*{Argmin}_{u \in U} p(t,x) \cdot f(t,x,u)$$

и $\mathcal{V}_\psi$ — множество селекторов многозначного отображения $U_\psi(t,x)$.

Теорема (позиционный принцип минимума). *Если пара $\bar{\sigma} = (\bar{x}, \bar{u})$ оптимальна в задаче (P), то существует такое $\psi \in \Psi(\bar{\sigma})$, что траектория $\bar{x}$ оптимальна в задаче*

$$l(x(t_1)) \to \min; \quad x \in \bigcup_{v \in \mathcal{V}_\psi} \mathcal{X}(v).$$

Нетрудно видеть, что эта теорема включает в себя негладкий ПМ Кларка для рассматриваемой задачи. Примечательно, что необходимое условие теоремы носит вариационный характер — оно формулируется через вспомогательную бесконечномерную задачу оптимизации. Более общие необходимые условия с опорными мажорантами также имеют вариационный характер. В современной теории Гамильтона-Якоби это первые необходимые условия оптимальности, сравнимые по конструктивности и эффективности с ПМ.