



**ОЦЕНИВАНИЕ СОСТОЯНИЯ
ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ:
АЛГОРИТМЫ И ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ
ЛИНЕАРИЗОВАННЫХ ЗАДАЧ**

ИНСТИТУТ СИСТЕМ ЭНЕРГЕТИКИ
им. Л.А. Мелентьева СО РАН

Гурина Л.А., Зоркальцев В.И., Колосок И.Н. и др.

**ОЦЕНИВАНИЕ СОСТОЯНИЯ
ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ:
АЛГОРИТМЫ И ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ
ЛИНЕАРИЗОВАННЫХ ЗАДАЧ**

Иркутск
2016

Оценивание состояния электроэнергетической системы: алгоритмы и примеры решения линеаризованных задач / Гурина Л.А., Зоркальцев В.И., Колосок И.Н., Коркина Е.С., Мокрый И.В. – Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2016. – 37 с.

ISBN 978-5-93908-148-1.

Рассматривается задача оценивания состояния электроэнергетических систем (ЭЭС) по текущим значениям наблюдаемых параметров этих систем. Эта задача формулируется как проблема минимизации суммы взвешенных квадратов отклонений наблюдаемых значений параметров от их значений, удовлетворяющих физическим ограничениям модели функционирования ЭЭС. Поскольку эта задача должна решаться в темпе реального времени, очень важно получить гарантированное ее решение за минимальное время. Для ускорения расчетов предлагается решать двойственную задачу. Как показывают имеющиеся теоретические и экспериментальные результаты, у алгоритмов внутренних точек двойственные переменные сходятся быстрее к своим оптимальным значениям, чем переменные исходной задачи. Поэтому при использовании двойственных алгоритмов внутренних точек более быстрая сходимость будет иметь место для переменных «исходной» задачи оптимизации. Задача оценивания состояния рассматривается последовательно от простых случаев, когда ограничения имеют вид только линейных уравнений, к более сложным, когда имеются ограничения-неравенства.

Исследования поддержаны грантом РФФИ №15-07-07412а и ведущей научной школы НШ 711.2014.8.

Ключевые слова: оценивание состояния, электроэнергетическая система, SCADA, WAMS, оптимизация, симметричная двойственность.

ISBN 978-5-93908-148-1

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
1. Задача оценки параметров модели, представляемой в виде системы линейных уравнений	9
1.1. Постановка задачи в виде проблемы минимизации взвешенных квадратов отклонений наблюдаемых значений параметров и расчетных величин	9
1.2. Условие оптимальности и двойственная задача оптимизации	11
1.3. Случай, когда нет неизмеренных переменных	12
1.4. Алгоритм оценки параметров, использующий комбинации столбцов матрицы при неизмеренных переменных	13
1.5. Алгоритм оценки параметров, использующий линейные комбинации уравнений	15
2. Примеры решения задач оценивания состояния ЭЭС	16
2.1. Пример 1	17
2.2. Пример 2	19
2.3. Пример 3	22
2.4. Пример 4	24
3. Метод внутренних точек для решения задачи оценки параметров режима при интервальных ограничениях на переменные	28
3.1. Исходная и двойственная задача оптимизации	28
3.2. Алгоритм внутренних точек	29
3.2.1. Алгоритм ввода в область допустимых решений	30
3.2.2. Оптимизация в области допустимых решений	32
3.3. Двойственные алгоритмы внутренних точек	33
Заключение	34
Список литературы	36

Введение

Электроэнергетическая система (ЭЭС) имеет сложную иерархическую структуру с множеством измеряемых переменных и управляемых параметров. Управление режимами ЭЭС ввиду сложности объекта может осуществляться только с использованием математической модели энергосистемы при максимально точной оценке текущего состояния (режима) ЭЭС. Важная роль отводится задачам сбора и обработки информации о текущем режиме ЭЭС, решаемых посредством систем WAMS (Wide Area Measurement System) и SCADA (Supervisory Control and Data Acquisition).

Система WAMS представляет собой совокупность регистраторов синхронизированных векторных измерений PMU (Phasor Measurement Unit), концентраторов векторных данных PDC (Phasor Data Concentrator), каналов передачи информации между регистраторами, концентраторами данных и диспетчерскими центрами ОАО «СО ЕЭС», а также средств обработки полученной информации. Синхронизация измерений WAMS осуществляется при помощи систем GPS/ГЛОНАСС.

PMU измеряют модули и фазы напряжений в узлах и токов в линиях, инцидентных этим узлам. PDC осуществляет сбор, фильтрацию, обработку и ретрансляцию данных. Кроме этого, PDC может записывать резкие скачки, искажения, параметры переключателей, параметры нагрузки и линий, идентифицировать параметры генератора. Супер-PDC, наряду с обработкой данных, предоставляет диспетчеру или оператору графический интерфейс и доступ к архиву данных [1].

SCADA/EMS системы, предназначенные для поддержки действий диспетчерского персонала при оперативном и противоаварийном управлении ЭЭС, включают в себя: установленные на подстанциях ЭЭС удаленные устройства телемеханики RTU (Remote Terminal Unit) для снятия телесигналов о состоянии коммутационного оборудования и телеизмерений параметров режима, каналы связи; базы данных; системы оперативного отображения параметров режима, а также программное обеспечение (комплекс программ EMS-приложений) для обработки результатов телеизмерений и формирования управляющих команд для объектов диспетчерского управления [2].

К недостаткам SCADA-систем можно отнести неравномерное размещение телеизмерений на схеме, отсутствие точной синхронизации данных, присутствие в телеизмерениях грубых ошибок. Обнаружение грубых ошибок, подавление их влияния на оценки параметров режима ЭЭС – одна из наиболее актуальных проблем при решении задачи оценивания состояния.

Оценивание состояния по данным SCADA и WAMS. Оценивание состояния – математический метод обработки данных, широко используемый для расчета режима ЭЭС по данным измерений. В качестве исходной информации для решения задачи оценивания состояния в основном используются телеизмерения и телесигналы, поступающие от SCADA и WAMS - систем. Результатом оценивания состояния является расчет установившегося режима ЭЭС по данным телеизмерений для текущей расчетной схемы, сформированной на основе поступивших телесигналов.

В нашей стране основателем школы оценивания состояния (ОС) ЭЭС является проф. А.З. Гамм, создавший в 1972г. в СЭИ сначала группу, а затем и лабораторию, сотрудники которой целиком посвятили себя исследованиям в области ОС ЭЭС. В одной из первых работ проф. Гамма [3] задача ОС рассматривалась как задача нелинейного программирования, что позволяло решать ее в произвольном базисе (векторе состояния), а не только через модули и фазы узловых напряжений, а также учитывать допустимые пределы изменения измеряемых параметров. В этой же работе были предложены способы расчета доверительных интервалов полученных оценок.

В вышедшей в 1974 г. работе [4] А.З. Гамма, посвященной методическим вопросам ОС, были сформулированы основные задачи, входящие в комплекс проблем ОС, и предложены пути их решения. В ней была дана статическая и динамическая постановка задачи ОС, доказаны статистические свойства оценок полученных методом взвешенных наименьших квадратов, сформулирована проблема топологической наблюдаемости при ОС ЭЭС, рассмотрены вопросы идентификации моделей, используемых при ОС, а также проблема обнаружения плохих данных, ошибки которых существенно превышают случайные погрешности.

Основные идеи, сформулированные в этой работе, получили свое дальнейшее развитие в первой в нашей стране монографии [5], посвященной методам ОС, вышедшей в 1976г. В этой монографии помимо теоретических аспектов различных проблем оценивания состояния были приведены результаты расчетов, выполненных с помощью программ, реализующих различные функции ОС.

В последующие годы был выпущен ряд монографий [6-11], написанных А.З. Гаммом в соавторстве с его учениками и сотрудниками. В них рассмотрены оригинальные методы увеличения точности исходной информации, анализа наблюдаемости на основе топологических и информационных критериев, обнаружения "плохих" данных, способы сочетания телеметрических и статистических данных. Эти работы стали пионерными в нашей стране.

Задачу оценивания состояния ЭЭС можно в общем случае сформулировать следующим образом [11]. Задан вектор $\bar{y} \in R^n$ измеренных переменных режима, диагональная матрица R размера n погрешности (дисперсий) измерений. Необходимо определить оценки значений параметров режима, включающие вектор измеряемых параметров $y \in R^n$ и неизменяемых параметров $x \in R^m$.

Искомое решение состоит в поиске таких расчетных значений (оценок) измеряемых параметров режима $\hat{y}$, которые *наиболее близки* к измеренным значениям $\bar{y}$ в смысле некоторого критерия, в качестве которого чаще всего используется сумма взвешенных квадратов отклонений оценок от измерений [11]:

$$J(y) = (\bar{y} - \hat{y})^T R_y^{-1} (\bar{y} - \hat{y}) \quad (1)$$

и удовлетворяют уравнениям электрической цепи

$$w(y, x) = 0, \quad (2)$$

связывающим измеренные y и неизмеренные x параметры режима. В (1) R_y - ковариационная матрица ошибок измерений, диагональные элементы которой равны дисперсиям измерений, $\bar{y}$ - вектор измерений SCADA и WAMS, включающий модули U_i и фазы δ_i узловых напряжений, генерации активных P_{gi} и реактивных Q_{gi} мощностей в узлах, перетоки мощностей в трансформаторах и линиях P_{ij}, Q_{ij} , токи в узлах и в линиях I_i, I_{ij} :

$$\bar{y} = \{P_i, Q_i, P_{ij}, Q_{ij}, U_i, \delta_i, I_i, I_{ij}\}.$$

Для получения узловых инъекций P_i, Q_i в дополнение к телеизмерениям генерации используются псевдоизмерения узловых нагрузок.

В ИСЭМ СО РАН разработаны алгоритмы оценивания состояния, основанные на использовании контрольных уравнений (КУ) [11]. Контрольные уравнения - это уравнения, в которые входят только измеренные параметры y :

$$w_k(y) = 0. \quad (3)$$

Они могут быть получены при исключении неизмеренных переменных x из уравнений установившегося режима ЭЭС (2). Система уравнений (2) не линейна относительно y и x , для исключения x ее необходимо линеаризовать. Одним из возможных способов линеаризации является выбор в качестве уравнений (2) уравнений балансов активной и реактивной мощности в узлах:

$$P_i = \sum_{j \in \omega_i} P_{ij} + P_{ui}, \quad (4.1)$$

$$Q_i = \sum_{j \in \omega_i} Q_{ij} + Q_{ui}, \quad (4.2)$$

в линиях:

$$P_{ij} + P_{ji} - \Delta P_{ij} = 0, \quad (5.1)$$

$$Q_{ij} + Q_{ji} - \Delta Q_{ij} = 0, \quad (5.2)$$

уравнения падения напряжения в линиях:

$$U_i - U_j - \Delta U_{ij} = 0, \quad (6.1)$$

и уравнения разностей фазовых углов в линиях контура (контурные уравнения), которые в упрощенном виде можно записать как:

$$\sum_{ij \in l_k} (\delta_i - \delta_j) = \sum_{ij \in l_k} P_{ij} \frac{x_{ij}}{U_i U_j} = 0. \quad (6.2)$$

В уравнениях (4.1)-(4.2) - P_{ui}, Q_{ui} - мощности узловых шунтов, в уравнениях (5.1)-(5.2) - $\Delta P_{ij}, \Delta Q_{ij}$ - потери мощности в линии, в уравнении (6.1) - ΔU_{ij} - падение напряжения в линии, в (6.2) l_k - множество линий, входящих в контур, x_{ij} - реактивное сопротивление линии.

Уравнения (4)-(6) становятся линейными и могут быть использованы для получения КУ при некоторых допущениях. Из них можно выделить следующие: 1) потери мощности и

падения напряжения в линиях и мощности шунтов в узлах, вычисленные в исходной точке $\bar{y}, x_0$, принимаются постоянными в диапазоне значений измеренных параметров $\bar{y} \pm \delta y$; 2) разности фаз в ветвях по контуру вычисляются при заданных напряжениях узлов.

После получения контрольных уравнений задачу оценивания состояния можно свести к минимизации целевой функции (1) при ограничениях в виде системы (3). Для учета ограничений в виде КУ составляется функция Лагранжа, минимизация которой дает выражение для определения оценок вектора измерений:

$$\hat{y}^{(i+1)} = \hat{y}^{(i)} - R \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^T \left[\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) R \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^T \right]^{-1} w_k(\hat{y}^{(i)}). \quad (7)$$

Задача решается итеративно до тех пор, пока невязки КУ не будут меньше некоторого порога ξ_w . На каждой итерации по полученным оценкам $\hat{y}$ уточняются значения мощностей узловых шунтов и потерь мощности в линиях. Оценки неизмеренных переменных вычисляются из уравнений (2), линеаризованных на последней итерации.

В общем случае при решении задачи ОС необходимо учитывать несколько типов ограничений.

1. Уравнения установившегося режима (2), которым должны удовлетворять найденные оценки измеренных y и неизмеренных x параметров режима. При решении задачи ОС на основе контрольных уравнений уравнения установившегося режима преобразуются в КУ.

2. При решении задачи ОС может возникнуть необходимость в фиксации некоторых параметров режима на заданных значениях, например, нулевых инъекций в транзитных узлах, напряжений на шинах генерирующих станций, при декомпозиции задачи ОС – оценок в граничных узлах и ветвях подсистем, межсистемных перетоков и т.д. Это приводит к необходимости учета ограничений в форме равенств, которые задаются, как правило, для контролируемых параметров и фиксируются на измеренных значениях $\bar{y}$:

$$y = \bar{y}. \quad (8)$$

Учет ограничений в форме равенств в задаче ОС можно обеспечить заданием нулевых дисперсий для соответствующих ТИ и ПИ. Задание измерениям нулевых дисперсий не создает никаких проблем при ОС на основе КУ, так как в формулу для вычисления поправок входит не весовая матрица R_y^{-1} , а ковариационная матрица ошибок измерений R_y .

3. Полученные при ОС расчетные значения некоторых параметров режима должны находиться в определенных технологических пределах. Активные и реактивные генерации в узлах должны находиться внутри пределов, определяемых графиком выработки мощности; на перетоки мощности по линиям могут быть заданы пределы, определяемые пропускной способностью линии; в нагрузочных узлах должно быть обеспечено правильное направление (знак) узловой инъекции и т.д. Получить информацию о перечисленных выше ограничениях не составляет большого труда, так как она, как правило, хранится в той или иной форме в базе данных SCADA/EMS.

Поэтому при решении задачи ОС помимо первых двух типов ограничений, задаваемых в форме равенств, необходимо также учитывать ограничения в форме неравенств, задаваемые как для измеренных y :

$$y_{\min} \leq y \leq y_{\max}, \quad (9)$$

так и для неизмеренных x :

$$x_{\min} \leq x \leq x_{\max} \quad (10)$$

параметров режима. Здесь $y_{\min}$, $y_{\max}$, $x_{\min}$, $x_{\max}$ - априори известные нижние и верхние границы изменения значений переменных, входящих в векторы y и x соответственно.

Могут быть заданы также ограничения на некоторые функции от параметров режима, например, на сумму перетоков по нескольким линиям электропередач.

С учетом ограничений (9) – (10) задача ОС превращается в задачу нелинейного программирования, т.е. в задачу поиска минимума функции многих переменных при ограничениях на эти переменные в виде равенств и неравенств.

Особенностью в данном случае является то, что ограничения типа (9) – (10) при решении задачи ОС должны быть достаточно «широкими», поскольку в процессе функционирования ЭЭС некоторые ограничения могут иногда нарушаться и это нарушение должно фиксироваться задачей оценивания состояния, т.е. в таких случаях оценки могут выходить за допустимые технологические пределы.

Некоторые разработчики методов ОС утверждают, что необходимость учета ограничений в форме неравенств при решении задачи ОС не очевидна, поскольку целью ОС является расчет потокораспределения, отражающего реальное состояние ЭЭС, а не ввод режима в допустимую область.

Вместе с тем, информация об ограничениях и их учет при решении задачи ОС является чрезвычайно полезной: она позволяет априори выявить самые грубые ошибки в измерениях, предельные значения генераций реактивных мощностей могут использоваться в качестве псевдоизмерений в ненаблюдаемых узлах, ограничения содержат достоверную информацию о физически возможных технологических пределах оборудования, поэтому их учет позволяет повысить качество оценок и получить решение, корректно отражающее физическое состояние ЭЭС.

В мировой и отечественной практике наметилась устойчивая тенденция внедрения в электрические сети управляемых устройств на базе силовой электроники – устройств FACTS (Flexible Alternating Current Transmission Systems). Актуальность учета ограничений первой и третьей группы (в форме равенств и неравенств) заметно возрастает при включении моделей устройств FACTS в схему замещения при ОС ЭЭС, поскольку многие из этих моделей содержат такие ограничения [12, 13].

Для учета ограничений при решении задачи ОС может быть использован метод внутренней точки.

Система уравнений (2) является нелинейной. Она учитывается при решении задачи оценивания состояния путем итеративной линеаризации. В данном препринте мы ограничились изучением случая линеаризованной системы. Детальное изучение этого случая

можно рассматривать как важный, необходимый этап исследования решения задачи в общем случае. Основная цель препринта состоит в изложении теоретических основ и алгоритмов решения линейаризованной задачи оценивания состояния с использованием основ симметричной двойственности [14]. Сначала мы рассмотрим наиболее простой случай – отсутствие ограничений-неравенств на переменные (9) – (10). Затем приведем алгоритмы методом внутренних точек для решения линейаризованной задачи при ограничениях-неравенствах (9) – (10).

Здесь представлены два типа алгоритмов внутренних точек. Сначала рассматривались, так называемые, «прямые» или «исходные» алгоритмы, осуществляющие монотонное улучшение линейаризованной задачи (1) – (10). Второй тип – двойственные алгоритмы внутренних точек, осуществляющие монотонное улучшение задачи, двойственной к (1) – (10). Здесь будет дано описание возможных вариантов алгоритмов внутренних точек. Сравнительный анализ вариантов алгоритмов внутренних точек на основе экспериментальных расчетов – цель дальнейших исследований.

1. Задача оценки параметров модели, представляемой в виде системы линейных уравнений

1.1. Постановка задачи в виде проблемы минимизации взвешенных квадратов отклонений наблюдаемых значений параметров и расчетных величин

Переменные величины рассматриваемой модели составляют векторы измеряемых параметров $y \in R^n$ и неизменяемых параметров $x \in R^m$ при некоторых натуральных n и m . Модель представляется в виде системы линейных уравнений:

$$Ax + By = b \quad (11)$$

Заданными являются вектор $b \in R^r$ при некотором натуральном r , матрицы A - размера $r \times m$, B - размера $r \times n$.

Имеется также вектор $\bar{y} \in R^n$, состоящий из набора полученных измерений. Считается, что измерения могут быть неточными и избыточными. В силу чего они могут быть противоречивыми. Задача оценки параметров системы формулируется как проблема минимизации суммы взвешенных квадратов отклонений

$$\frac{1}{2} \sum h_j (y_j - \bar{y}_j)^2 \rightarrow \min, \quad (12)$$

при условии (6). Здесь h_j положительные заданные величины, составляющие вектор весовых коэффициентов $h \in R^n$. Весовые коэффициенты h_{ij} , являются величинами, обратными погрешностям измерений в целевой функции (1).

Пусть H – диагональная матрица размера n , состоящая из компонент вектора h . Исключив из целевой функции (12) постоянную составляющую получаем, что задача (11), (12) равносильна следующей:

$$\frac{1}{2} y^T H y - \bar{y}^T H y \rightarrow \min, \quad (13)$$

при условии (11). Значения векторов переменных, получаемых в результате решения рассматриваемой задачи, будем обозначать $\hat{y}$, $\hat{x}$.

Известно, что если система (11) совместна, то данная задача имеет решение. Оно единственно по вектору $\hat{y}$. Решение может быть не единственным по вектору $\hat{x}$, если столбцы матрицы A линейно зависимы, т.е. если $\text{rank } A < m$.

Частный случай. В ситуации, когда $r = n$ и B неособенная матрица (т.е. имеющая ранг, равный n), можно воспользоваться выражением

$$y = B^{-1}(b - Ax), \quad (14)$$

вытекающим из (11). Подставив это выражение в целевую функцию (13), придем к задаче безусловной минимизации квадратичной выпуклой функции:

$$\frac{1}{2} (Dx - d)^T H (Dx - d) + \bar{y}^T H (Dx - d) \rightarrow \min. \quad (15)$$

Здесь

$$D = B^{-1}A,$$

$$d = B^{-1}b.$$

Исключив из целевой функции (15) составляющие, не зависящие от вектора переменных x , получим следующую равносильную задачу безусловной оптимизации:

$$\frac{1}{2} x^T D^T H D x - (d - \bar{y})^T H D x \rightarrow \min. \quad (16)$$

Задача (16), в результате приравнивания градиента целевой функции нулевому вектору, сводится к решению системы линейных уравнений с симметричной неотрицательной определенной матрицей

$$(D^T H D)x = D^T H (d - \bar{y}). \quad (17)$$

Эта система всегда имеет решение (возможно не единственное, что будет в том и только в том случае, если $\text{rank } A < m$).

Получив значение $\hat{x}$, на основе (14), можно вычислить вектор

$$\hat{y} = d - D\hat{x}. \quad (18)$$

Значение этого вектора единственно как в случае единственности, так и в случае не единственности вектора $\hat{x}$.

Рассмотренный здесь частный случай не является типичным. Отметим, что в нем существенными были два условия. Во-первых, каждому вектору $x \in R^m$ соответствовал некоторый вектор $y \in R^n$, при котором выполняется условие (11) для данного x . То есть,

система (11) имеет решение при любых $x \in R^m$. Во-вторых, любому $x \in R^m$ соответствовал единственный вектор $y \in R^n$, при котором справедливо (11).

В общем, наиболее типичным случаем для некоторых векторов x может не существовать вектора y , при котором выполняется (11) с данным x . К тому же, если для вектора x существует вектор y , удовлетворяющий условию (11), то вполне вероятно, что вектор y будет неединственным, удовлетворяющим (11) с данным вектором x .

Общий случай, при котором не требуется существование обратной к B матрицы в том числе, когда B не квадратная матрица, т.е. $r \neq n$, будет рассмотрен в следующих четырех подразделах.

1.2. Условие оптимальности и двойственная задача оптимизации

Обозначим u вектор R^r множителей Лагранжа ограничений (11) задачи (11), (13). Необходимые и достаточные условия этой задачи представляются в виде системы линейных уравнений относительно трех векторов x , y и u :

$$Ax + By = b, \quad (19)$$

$$A^T u = 0, \quad (20)$$

$$B^T u - Hy = -H \bar{y}. \quad (21)$$

Найдя любым способом решение этой системы, получим не только требуемые векторы $\hat{x}$, $\hat{y}$, но и очень важный во многих отношениях вектор $\hat{u}$, являющийся конкретным значением априори неопределенного вектора множителей Лагранжа. Вектор множителей Лагранжа может, в частности, эффективно использоваться при анализе и интерпретации полученных решений.

Система (19) – (21) не имеет решения в том и только в том случае, если не имеет решение задача (11), (13), то есть, если и только если несовместна система (11), являющаяся составной частью (19) системы (19) – (21).

Для любого решения $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{u}$ системы (19) – (21) пара $\hat{x}$, $\hat{y}$ будет решением задачи (11), (12). Следовательно, для всех решений системы (19) – (21) вектор $\hat{y}$ имеет единственное решение.

Справедливо и обратное утверждение. Если $\hat{x}$, $\hat{y}$ – решение задачи (11), (13), то существует вектор $\hat{u}$, при котором векторы $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{u}$ являются решением системы (19) – (21).

Сопряженная (двойственная) задача оптимизации. Рассмотрим задачу максимизации сепарабельной, квадратичной вогнутой функции

$$b^T u - \frac{1}{2} z^T H^{-1} z \rightarrow \max, \quad (22)$$

при линейных ограничениях в форме равенств

$$A^T u = 0, \quad (23)$$

$$B^T u - z = -H \bar{y}. \quad (24)$$

Переменные в этой задаче составляют вектор $u \in R^r$ и вектор $z \in R^n$.

Заметим, в задаче (22) – (24) в качестве исходных данных используются три матрицы A , B , H и вектор b , что служили исходными данными в исходной задаче оценки параметров (11), (13). При этом у задачи (22) – (24) совсем другой состав переменных.

Важно, что необходимые и достаточные условия оптимальности задачи (22) – (24) имеют вид той же системы линейных уравнений (19) – (21) при двух (равносильных) условиях

$$z = Hy, \quad y = H^{-1}z. \quad (25)$$

То есть вектор переменных u в задаче (22) – (24) является тем же вектором множителей Лагранжа ограничений исходной задачи (11), (12).

Для задачи (22) – (24), которую будем называть сопряженной или двойственной к задаче (11), (12), множители Лагранжа ограничений (23) составляют вектор x . Множители Лагранжа ограничений (24) соответствуют вектору переменных исходной задачи y .

От сопряженной задачи (22) – (24) можно получить не только эстетическое удовольствие. Она может служить в качестве эффективного пути решения системы (19) – (21). Из (24) имеем

$$z = B^T u + H \bar{y}. \quad (26)$$

Подставляя это выражение в целевую функцию (22) приходим к следующей задаче относительно вектора переменных u :

$$\frac{1}{2} u^T B H^{-1} B^T u - (b - B \bar{y})^T u \rightarrow \min, \quad (27)$$

при условии (23).

1.3. Случай, когда нет неизмеренных переменных

Двойственная задача (23), (27) позволяет осуществлять вычисления и в том случае, если неизмеренных переменных в модели нет. Тогда нет условия (23). Проблема сводится к безусловной минимизации квадратичной выпуклой функции (27).

Эта задача равносильна проблеме решения следующей системы линейных уравнений относительно вектора переменных u :

$$(B H^{-1} B^T) u = b - B \bar{y}. \quad (28)$$

Найдя решение этой системы $\hat{u}$, затем можем вычислить

$$\hat{z} = B^T \hat{u} + H \bar{y}, \quad (29)$$

$$\hat{y} = H^{-1} \hat{z} \quad (30)$$

Рассмотренный случай полезен и для решения задач при наличии неизмеренных переменных. В последующих двух подразделах будут представлены два способа сведения задачи (11), (13) при наличии неизмеренных переменных к проблеме безусловной

минимизации квадратичной выпуклой функции типа (27). То есть – к рассмотренному в данном разделе алгоритму.

1.4. Алгоритм оценки параметров, использующий линейные комбинации столбцов матрицы при неизмеренных переменных

Если неизмеренные переменные имеются, $A \neq 0$, то необходимо решить задачу минимизации квадратичной функции (27) на линейном пространстве, определяемом как множество решений системы однородных линейных уравнений (23):

$$L = \{u \in R : A^T u = 0\}. \quad (31)$$

Матрица A может содержать столбцы, выражающие в виде линейных комбинаций других столбцов этой матрицы. Эти столбцы можно выявить и исключить из рассмотрения. Пусть $\tilde{A}$ – матрица размера $r \times k$, при некотором $k \leq m$ состоящая из максимальных (не расширяемых) наборов линейно независимых столбцов матрицы A . Для определенности будем считать, что это первые k столбцов исходной матрицы A . Этого всегда можно достичь за счет перенумерации столбцов рассматриваемой матрицы и компонент вектора x .

Заметим, поскольку столбцы матрицы A с номерами $j = k+1, \dots, m$ являются линейными комбинациями столбцов этой матрицы с номерами $j = 1, \dots, k$, то из рассматриваемой исходной задачи можно исключить столбцы матрицы A и компоненты вектора x с номерами $j = k+1, \dots, m$. Пусть для коэффициентов a_{ij} матрицы A выполняется равенство

$$a_{ik+l} = \sum_{j=1}^k \gamma_j^l a_{ij}, \quad i = 1, \dots, r, \quad l = 1, \dots, m-k. \quad (32)$$

Здесь γ_j^l – коэффициенты для выражения столбцов матрицы A с номерами $j = k+1, \dots, m$ в виде линейной комбинации первых k столбцов этой матрицы.

Компоненты вектора x с номерами $j = k+1, \dots, m$ можно положить равными нулю, т.е. исключить из задачи (11), (12). Тогда эта задача будет иметь единственное решение по первым k -компонентам вектора x . Обозначим такое решение $\hat{x}$, где

$$\hat{x}_j = 0, \quad j = k+1, \dots, m.$$

На основе (32) можно дать общее описание всех оптимальных значений вектора x в задаче (11), (12). Любое решение представляется в виде

$$x = \hat{x} + \sum_{l=1}^{m-k} \beta_l y^l, \quad (33)$$

где β_l – некоторые (любые) вещественные коэффициенты. Вектор y^l имеет следующие компоненты

$$\begin{aligned} y_j^l &= \gamma_j^l, \quad j = 1, \dots, k; \\ y_{k+l}^l &= -1; \end{aligned}$$

$$y_{k+i}^l = 0, i \in \{1, \dots, m-k\}, i \neq l,$$

для всех $l = 1, \dots, m-k$.

Вместо исходной матрицы A можно использовать матрицу $\tilde{A}$ при задании линейного многообразия, на котором минимизируется целевая функция (27),

$$L = \{u \in R^r : \tilde{A}^T u = 0\}.$$

Ранг матрицы $\tilde{A}$, поскольку у нее линейно независимые столбцы, равен k . Следовательно, существует k линейно независимых строк у этой матрицы. Для определенности будем считать, что это первые k строк матрицы $\tilde{A}$.

Итак, матрицу $\tilde{A}$ разбиваем на две подматрицы

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix},$$

где C_1 - неособенная квадратная матрица размера k , C_2 - матрица размера $(r-k) \times k$.

Вектор u также разобьем на два подвектора

$$u = \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \end{bmatrix},$$

где v^1 - вектор R^k , состоящий из первых k компонент вектора u , v^2 - вектор R^{r-k} , состоящий из последних $r-k$ компонент вектора u . Условие (23) в результате этого разбиения приобретает вид

$$C_1^T v^1 + C_2^T v^2 = 0. \quad (34)$$

Поскольку C_1^T - неособенная матрица, то для нее существует и может быть найдена обратная матрица G размером $k \times k$, т.е. такая, что

$$G C_1^T = I,$$

где I - единичная матрица.

Условие (34) можно записать в таком равносильном виде

$$v^1 + G C_2^T v^2 = 0$$

или в виде выражения одних переменных через другие:

$$v^1 = -G C_2^T v^2. \quad (35)$$

Подставляя это выражение вместо первых k переменных в целевую функцию (27), приходим к задаче безусловной минимизации квадратичной выпуклой функции относительно переменных составляющих вектор v^2 . Найдя вектор $\hat{v}^2$, по условию (35) можно определить вектор $\hat{v}^1$ и, в итоге, все значения вектора $\hat{u}$. Затем, по формулам (25), (26) определяем вектор $\hat{y}$.

После этого на основе матриц B и C_1 можно вычислить из условия (11) решение $\hat{x}$, содержащее нулевые компоненты для $j = k+1, \dots, m$. По описанным выше правилам на основе (33) можно получить любые оптимальные значения вектора x .

Об алгоритме вычислений. Изложенные выше правила решения задачи оценки параметров (11), (13) на основе симметричной двойственной задачи (22) – (23) могут быть эффективно реализованы с использованием процедур построения диагональной подматрицы максимального ранга из линейных комбинаций столбцов матрицы A .

1.5. Алгоритм оценки параметров, использующий линейные комбинации уравнений

Исходную задачу (11), (13) можно свести к проблеме безусловной минимизации функции типа (27) иным, чем рассмотренным выше способом. Если в рассмотренном выше алгоритме сведение к задаче безусловной оптимизации типа (27) осуществляется путем использования линейных комбинаций столбцов матрицы A , то в рассматриваемом здесь алгоритме это будет достигаться путем использования комбинации строк матрицы. При этом параллельно должны производиться такие же линейные преобразования строк матрицы B и вектора b . Исходные ограничения (11) преобразуются в равносильную систему линейных уравнений

$$\tilde{A}x + \tilde{B}y = b. \quad (36)$$

с теми же векторами переменных x, y .

Переход к системе (36) можно представить как линейные преобразования

$$\tilde{A} = FA, \tilde{B} = FB, \tilde{b} = Fb, \quad (37)$$

где F - некоторая неособенная квадратная матрица размера r .

Поскольку F - неособенная матрицы, то условие (36) равносильно (имеющее такое же множество решений) исходному условию (11).

Матрица F формируется таким образом, чтобы получаемая в итоге матрица $\tilde{A}$ представлялась как комбинация четырех подматриц. Одна из них диагональная (с ненулевыми коэффициентами, равными единице). Три остальные – нулевые матрицы.

В результате преобразований представленной матрицей F должны прийти к матрице

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{A}^{11} & \tilde{A}^{12} \\ \tilde{A}^{21} & \tilde{A}^{22} \end{bmatrix},$$

где $\tilde{A}^{11}$ - единичная матрица размера k , $\tilde{A}^{12}$, $\tilde{A}^{21}$, $\tilde{A}^{22}$ - нулевые матрицы размеров $k \times (m-k)$, $(r-k) \times k$, $(r-k) \times (m-k)$ соответственно.

Матрицу $\tilde{B}$ представим как конкатенация двух подматриц $\tilde{B}^1, \tilde{B}^2$ размеров $k \times n$ и $(r-k) \times n$ соответственно

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} \tilde{B}^1 \\ \tilde{B}^2 \end{bmatrix},$$

Соответственно вектор $\tilde{b}$ представляется в виде конкатенации двух векторов $\tilde{b}^1$ и $\tilde{b}^2$ из R^k и $R^{(r-k)}$

$$\tilde{b} = \begin{bmatrix} \tilde{b}^1 \\ \tilde{b}^2 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, система ограничений (31) имеет такой вид:

$$\tilde{x}^1 + \tilde{B}^1 y = \tilde{b}^1, \quad (38)$$

$$\tilde{B}^2 y = \tilde{b}^2. \quad (39)$$

Здесь $\tilde{x}^1$ - вектор R^k , состоящий из k компонент вектора переменных x .

После приведенных преобразований проблема решения задачи (11), (13) представляется как процедура минимизации функции (13) при ограничениях (39), содержащих m неизмеренных переменных. Поэтому данная задача сводится к безусловной минимизации функции типа (27). Только в данном случае вместо матрицы B будет использоваться матрица $\tilde{B}^2$, вместо вектора b - вектор $\tilde{b}^2$. В такой вспомогательной задаче будет вычисляться вектор множителей Лагранжа ограничений (39).

Для ограничений (38) множители Лагранжа могут считаться нулевыми. Из (38) по полученным значениям вектора $\hat{y}$ определяются значения вектора

$$\tilde{x}^1 = \tilde{b}^1 - \tilde{B}^1 \hat{y}.$$

Значения этого вектора будут давать первые k компонент вектора переменных $\hat{x}$. Остальные компоненты можно полагать равными нулю.

Отметим, что при переходе от исходной матрицы A к матрице $\tilde{A}$ может потребоваться перенумерация столбцов матрицы A и, соответственно, перенумерация переменных, входящих в вектор x . То есть, диагональная матрица $\tilde{A}^{11}$ необязательно должна быть сформирована только из первых k столбцов исходной матрицы. Для упрощения записи эти возможные перенумерации здесь не рассматривались.

Для сопоставления результатов решения задачи ОС на основе изложенных подходов рассмотрены примеры решения этой задачи при различном объеме информации и количестве ограничений в форме равенств.

2. Примеры решения задач оценивания состояния ЭЭС

В общем случае модель функционирования ЭЭС описывается нелинейными уравнениями. Условие (2) следует рассматривать как результат линеаризации этих априори нелинейных ограничений. Таким образом, рассматриваемые здесь алгоритмы должны быть дополнены процедурами итеративной линеаризации.

В приводимых ниже первых трех примерах рассматривается случай, когда в уравнениях модели присутствуют лишь измеренные переменные, составляющие вектор y , т.е. в качестве ограничений используются уравнения (3).

Исходная задача состоит в минимизации квадратичной функции (1) при условии (3).

Двойственный алгоритм решения сформированной выше задачи базируется на безусловной минимизации квадратичной выпуклой функции (27) относительно вектора множителей Лагранжа.

Для сопоставления результатов решения задачи оценивания состояния на основе изложенных подходов рассмотрены варианты ее решения при различном объеме информации и количестве ограничений в форме равенств.

2.1. Пример 1

Для расчетов в первом примере была использована активная модель 3-узловой схемы, представленной на рис.1. В этой схеме: узел 1- генераторный (балансирующий узел), узел 3 - нагрузочный, узел 2 - транзитный ($P_2 = Q_2 = 0$). Измерения узловых инъекций в узлах 1, 3 не заданы.

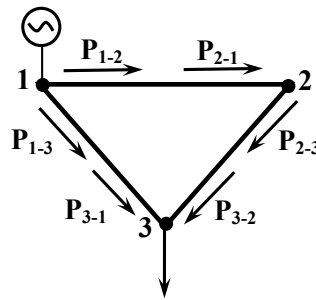


Рис. 1. 3-х узловая тестовая схема сети

Вектор измерений состоит из перетоков активной мощности по концам линий и псевдоизмерения нулевой инъекции активной мощности в узле 2: $\bar{y} = \{\bar{P}_{1-2}, \bar{P}_{2-1}, \bar{P}_{1-3}, \bar{P}_{3-1}, \bar{P}_{2-3}, \bar{P}_{3-2}, \bar{P}_2\}$. Дисперсии перетоков SCADA для всех измерений одинаковые $\sigma_j^2 = 10$, дисперсия псевдоизмерения P_2 равна нулю.

Для моделирования измерений в имитационных расчетах к значениям измеренных параметров, полученных при расчете установившегося режима (эталонный режим), добавлялись нормально распределенные с нулевым матожиданием и заданной дисперсией. Для этого случайные числа с распределением $N(0,1)$, генерируемые с помощью датчика, умножались на среднеквадратичные отклонения соответствующих измерений.

I-й вариант. В этом варианте расчета в качестве уравнений (2) были использованы уравнения балансов активной мощности в узлах (4.1) и уравнения балансов активной мощности в линиях (4.2). Контурное уравнение не использовалось.

Полученные уравнения (11) – это уравнения баланса мощности в линиях:

$$\bar{P}_{1-2} + \bar{P}_{2-1} = \Delta p_{1-2}, \quad (40)$$

$$\bar{P}_{1-3} + \bar{P}_{3-1} = \Delta p_{1-3}, \quad (41)$$

$$\bar{P}_{2-3} + \bar{P}_{3-2} = \Delta p_{2-3}, \quad (42)$$

и уравнение баланса мощности в узле 2:

$$\bar{P}_2 - \bar{P}_{2-1} - \bar{P}_{2-3} = 0, \quad (43)$$

где элементы вектора b для первых трех уравнениях равны потерям в линиях Δp_{ij} , для последнего уравнения – равен нулю. Элементы матрицы B равны коэффициентам уравнений (40)-(43). Поскольку в исследуемых алгоритмах нельзя задавать измерениям нулевые дисперсии, а значение P_2 равно нулю, его можно просто исключить из уравнения (43).

В табл. 1 представлены исходные данные и результаты решения задачи оценивания состояния: эталонные значения, которые «зашумлялись» для моделирования измерений (2 столбец), значения измерений (3 столбец), взвешенные отклонения измерений от эталона с весами, обратными среднеквадратичным отклонениям погрешностей измерений (4 столбец), полученные оценки (5 столбец), взвешенные отклонения оценок от измерений (6 столбец) и взвешенные отклонения оценок от эталона (7 столбец).

Таблица 1

Измеряемый параметр	Эталон, $y_{эм}$	Измерения, $\bar{y}$	$\Delta = \frac{ \bar{y} - y_{эм} }{\sigma}$	Оценки, $\hat{y}$	$\Delta = \frac{ \hat{y} - \bar{y} }{\sigma}$	$\Delta = \frac{ \hat{y} - y_{эм} }{\sigma}$
1	2	3	4	5	6	7
$\bar{P}_{1-2}$	221.1851	223.28	0,6625	219,9035	1,0678	-0,4053
$\bar{P}_{2-1}$	-220.5521	-219.585	0,3058	-219,2525	0,4110	0,4110
$\bar{P}_{1-3}$	252.778	255.092	0,7318	255.3409	0,8102	0,8105
$\bar{P}_{3-1}$	-251.6524	-254.436	0,8803	-254.1872	0,0787	0,8016
$\bar{P}_{2-3}$	220.5521	218.598	0,6179	219.2525	0,2070	0,4110
$\bar{P}_{3-2}$	-220.0469	-215.7	1,3746	-218.7546	0,9658	0,4087
Ср. значения отклонений	—	—	0,7621	—	0,5901	0,5413

Среднее значение отклонений оценок от эталона, как и следовало ожидать, снизилось по сравнению со средним отклонение измерений с 0,7621 до 0,5413.

II-й вариант.

В этом варианте в систему уравнений (2) и к уравнениям (40) – (43) добавляется контурное уравнение:

$$0.773 \bar{P}_{1-3} + 0.397 \bar{P}_{3-2} + 0.494 \bar{P}_{2-1} = 0 \quad . \quad (44)$$

Табл. 2 имеет структуру, аналогичную табл. 1.

Таблица 2

Измеряемый параметр	Эталон, $y_{эм}$	Измерения, $\bar{y}$	$\Delta = \frac{ \bar{y} - y_{эм} }{\sigma}$	Оценки, $\hat{y}$	$\Delta = \frac{ \hat{y} - \bar{y} }{\sigma}$	$\Delta = \frac{ \hat{y} - y_{эм} }{\sigma}$
1	2	3	4	5	6	7
$\bar{P}_{1-2}$	221.1851	223.28	0,6625	220,289	0,9459	-0,2834
$\bar{P}_{2-1}$	-220.5521	-219.585	0,3058	-220,248	0,2097	0,0962
$\bar{P}_{1-3}$	252.778	255.092	0,7318	253.6135	0,4676	0,2642

1	2	3	4	5	6	7
$\bar{P}_{3-1}$	-251.6524	-254.436	-0,8803	-252,46	0,6249	-0,2553
$\bar{P}_{2-3}$	220.5521	218.598	-0,6179	220.248	0,5211	-0,0962
$\bar{P}_{3-2}$	-220.0469	-215.7	1,3746	-219.75	1,2808	0,0939
Ср. значения отклонений	—	—	0,7621	—	0,6751	0,1815

В этом расчете среднее значение отклонений измерений и оценок от эталона снизилось еще больше: с 0,7621 до 0,1815.

Оценки множителей Лагранжа для вариантов **I** и **II** имеют вид:

$\hat{u}$, I вариант (ур-я 35-38)

$$\hat{u} = \begin{bmatrix} -0.3377 \\ 0.0249 \\ -0.3055 \\ -0.3709 \end{bmatrix}$$

$\hat{u}$, II вариант (ур-я 35-39)

$$\hat{u} = \begin{bmatrix} -0.2381 \\ 0.1976 \\ -0.2276 \\ -0.3926 \\ -0.4469 \end{bmatrix}$$

По результатам расчетов 2-х вариантов можно заключить, что введение дополнительных условий приводит, как и оказалось, к увеличению расхождений между измеренными и оцененными значениями вектора y (столбец 6), но к снижению отклонений оценок от эталонных значений (столбец 7).

2.2. Пример 2

Для расчетов в этом примере использовалась 3-х узловая тестовая схема, показанная на рис. 1, с существенно большим набором измеренных переменных. К измерениям первого примера были добавлены

- активная нагрузка первого узла $P_1=475.08$ МВт;
- реактивная нагрузка $Q_1=238.997$ МВар;
- напряжение второго узла $U_2=210.537$ кВ;
- напряжение третьего узла $U_3=201.526$ кВ;
- перетоки реактивной мощности по связям $i-j$:

$Q_{1-2}=114.723$ МВар, $Q_{2-1}=-91.17$ МВар, $Q_{1-3}=121.228$ МВар, $Q_{3-1}=-81.709$ МВар,
 $Q_{2-3}=85.981$ МВар, $Q_{3-2}=-62.325$ МВар.

Дисперсии измерений были приняты равными: $\sigma_{U_i}^2=5$, $\sigma_{P_1}^2=10$, $\sigma_{P_{i-j}}^2=10$, $\sigma_{Q_1}^2=100$,
 $\sigma_{Q_{i-j}}^2=25$.

В балансирующем узле 1 было задано и зафиксировано напряжение $U_1=220$ кВ.

В качестве ограничений использовались уравнения баланса активной и реактивной мощности в узлах и линиях, контурное уравнение и уравнения падения напряжения в ветвях 1-2 и 1-3:

$$\begin{aligned}
P_{1-2} + P_{2-1} &= \Delta P_{1-2}; \\
P_{1-3} + P_{3-1} &= \Delta P_{1-3}; \\
P_{2-3} + P_{3-2} &= \Delta P_{2-3}; \\
-P_{1-2} - P_{1-3} + P_1 &= 0 \\
-P_{2-3} - P_{2-1} &= 0; \\
0.773P_{1-3} + 0.494P_{2-1} + 0.397P_{3-2} &= 0; \\
Q_{1-2} + Q_{2-1} &= \Delta Q_{1-2}; \\
Q_{1-3} + Q_{3-1} &= \Delta Q_{1-3}; \\
Q_{2-3} + Q_{3-2} &= \Delta Q_{2-3}; \\
-Q_{1-2} - Q_{1-3} + Q_1 &= 0; \\
-Q_{2-3} - Q_{2-1} &= 0; \\
220 - U_2 - \Delta U_{1-2} &= 0; \\
220 - U_3 - \Delta U_{1-3} &= 0,
\end{aligned}$$

где ΔP_{1-2} , ΔP_{1-3} , ΔP_{2-3} , ΔQ_{1-2} , ΔQ_{1-3} , ΔQ_{2-3} , ΔU_{1-2} , ΔU_{1-3} - потери активной и реактивной мощности и падения напряжения по связям $i-j$ соответственно; вектор

$$b = [0.651 \ 1.1537 \ 0.4979 \ 0 \ 0 \ 1.3270 \ 26.0394 \ 49.4431 \ 18.6723 \ 0 \ 0 \ -210.0212 \ -205.5561]^T.$$

Обозначим

$$By - b = w.$$

Процесс решения задачи (27) итерационный. Поэтому, необходимо выполнение условия в виде неравенства

$$|w_i^{(k)}| < \varepsilon,$$

где k - номер итерации, ε - точность небаланса, i соответствует числу ограничений.

Вектор оценок измерений $\hat{y}$ (табл. 3) определяется по (30). Значения элементов вектора w представлены в табл. 4.

Таблица 3

Оценки измерений $\hat{y}$

Измеряемый параметр	Эталон, $y_{эм}$	Измерения, $\bar{y}$	$\Delta = \frac{ \bar{y} - y_{эм} }{\sigma}$	Оценки, $\hat{y}$	$\Delta = \frac{ \hat{y} - y_{эм} }{\sigma}$
1	2	3	4	5	6
P_1	473.963100	475.0840	0,35446	475.0070	0,33011
Q_1	229.230600	238.9970	0,97664	238.8066	0,9576
U_2	210.330700	210.5370	0,09226	210.2267	0,04651
U_3	205.942400	201.5260	1,97507	204.8288	0,49802

P_{1-2}	221.185100	223.2800	0,662466	220.3114	0,27629
Q_{1-2}	111.380000	114.7230	0,6686	112.2461	0,17322
P_{2-1}	-220.552100	-219.5850	0,305824	-219.6798	0,275845
Q_{2-1}	-86.058250	-91.1700	1,02235	-86.9828	0,18491
P_{1-3}	252.778000	255.0920	0,731751	254.6956	0,606398
Q_{1-3}	117.850600	121.2280	0,67548	126.5605	1,74198
P_{3-1}	-251.652400	-254.4360	0,88025	-253.5257	0,59239
Q_{3-1}	-69.609280	-81.7090	2,41994	-76.4241	1,36296
P_{2-3}	220.552100	218.5980	0,61794	219.6798	0,27585
Q_{2-3}	86.058250	85.9810	0,01545	86.9828	0,18491
P_{3-2}	-220.046900	-215.7000	1,37461	-219.1745	0,275877
Q_{3-2}	-67.113330	-62.3250	0,957666	-68.0349	0,18431
Средневзвешенная погрешность измерений			0,858172		0,497949

Таблица 4

Вектор w

Начальное значение	1 итерация	2 итерация	3 итерация
3.0440	0.0182	0.0011	0.0001
-0.4977	-0.0148	-0.0013	-0.0001
2.4001	-0.0079	0.0003	0.0001
-3.2880	0	0	0
0.9870	0	0	0
1.7512	0.0018	-0.0000	0.0000
-2.4864	0.7279	0.0448	0.0035
-9.9241	-0.6349	-0.0539	-0.0045
4.9837	-0.2945	0.0118	0.0069
3.0460	0	0	-0.0001
5.1890	0	0	0
-0.5158	0.1602	0.0420	0.0033
4.0301	-0.6785	-0.0450	-0.0038

Таким образом, на примере решения задачи на основе предложенного подхода показано не только уменьшение взвешенной погрешности измерений, но и значительное снижение небаланса, не превышающего значения 0.01.

2.3. Пример 3

В этом примере для иллюстрации работы метода двойственных оценок была использована активная модель схемы (Рис. 2), представляющую собой фрагмент реальной электроэнергетической системы. Схема содержит 7 узлов и 7 связей, один контур, один транзитный узел (узел 3), две трансформаторные связи (три ступени напряжений) и линии различной длины. Количество измеренных переменных равно 10 для активной модели измерений.

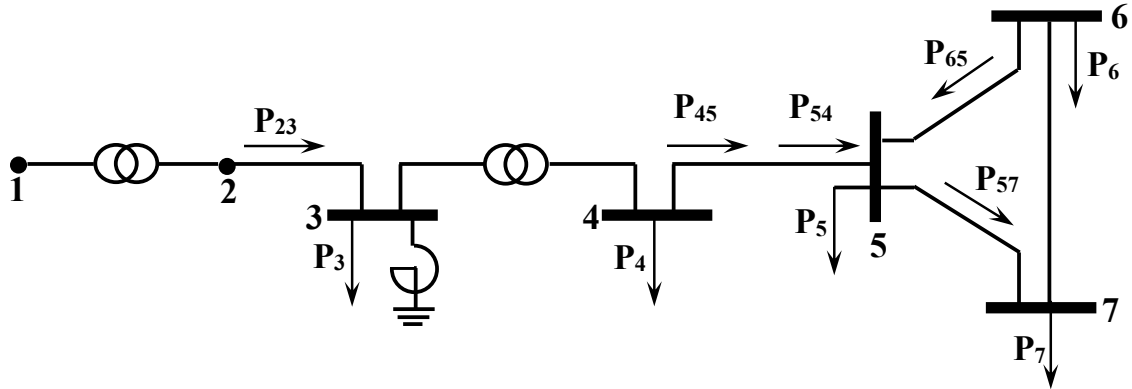


Рис. 2. 7-узловая тестовая схема

Вектор измерений включает перетоки и инъекции активной мощности, показанные на рис.3:

$$\bar{y} = \{ \bar{P}_3, \bar{P}_4, \bar{P}_5, \bar{P}_6, \bar{P}_7, \bar{P}_{2-3}, \bar{P}_{4-5}, \bar{P}_{5-4}, \bar{P}_{6-5}, \bar{P}_{5-7} \}.$$

Дисперсии измерений (соответственно):

$$\sigma^2 = \{ 0, 10, 10, 10, 10, 400, 25, 25, 36, 25 \}.$$

После исключения неизмеренных переменных из уравнений (4)-(6) были получены уравнения, в которые входят только измеренные переменные:

1. $\bar{P}_{4-5} + \bar{P}_{5-4} = b_1$ - уравнение баланса перетоков активной мощности в линии 4-5.
2. $\bar{P}_3 - \bar{P}_{4-5} + \bar{P}_4 + \bar{P}_{23} = b_2$ - уравнение баланса активной мощности в узле 3.
3. $\bar{P}_{6-5} - \bar{P}_{5-7} - \bar{P}_{5-4} + \bar{P}_5 = b_3$ - уравнение баланса перетоков активной мощности в линии 5-6.
4. $-\bar{P}_{6-5} + \bar{P}_6 + \bar{P}_7 + \bar{P}_{5-7} = b_4$ - уравнение баланса активной мощности в узле 7.
5. $0.893 \bar{P}_{5-7} + 0.033 \bar{P}_{6-5} + 0.448 \bar{P}_7 = b_5$ - контурное уравнение в узлах 5-6-7. В контурном контрольном уравнении потерь нет, т.е., $b_5 = 0$.

Вектор b в условии $By = b$ имеет вид:

$$b = \begin{bmatrix} \Delta P_{4-5} \\ \Delta P_{2-3} + \Delta P_{4-3} + P_{уделна\ 3} \\ \Delta P_{5-6} \\ \Delta P_{5-7} + \Delta P_{6-7} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 40 \\ 0.8 \\ 20.9 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Решение задачи оценивания итеративно, на каждой итерации определялась невязка каждого контрольного уравнения $w = By - b$, а также оценки множителей $\hat{u}$ (Таблица 5)

Таблица 5

Вектор w

Начальное значение	1 итерация	2 итерация	3 итерация *1.0e-013
-6.262	0.427	0.00	-0.7816
25.856	-0.696	0.034	-0.7105
5.64	0.013	0.004	0.7461
-31.442	-1.372	0	0.7816
-20.4206	0	0	-0.5684
Оценки множителей $\hat{u}$	$\hat{u} = \begin{bmatrix} -0.4033 \\ 0.0363 \\ -0.5925 \\ -0.5710 \\ -0.8324 \end{bmatrix}$	$\hat{u} = \begin{bmatrix} -0.0027 \\ -0.0018 \\ -0.0207 \\ -0.0415 \\ 0.0285 \end{bmatrix}$	$\hat{u} = 10^{-3} * \begin{bmatrix} 0.2289 \\ 0.0913 \\ 0.3664 \\ 0.4951 \\ -0.2244 \end{bmatrix}$

Из таблицы видно, что как невязки уравнений, так и значения множителей $\hat{u}$ снижаются в процессе итерационного расчета.

Результаты решения задачи оценивания показаны в таблице 6. (В силу того, что измерение $\bar{P}_3 = 0$ выдерживается точно ($\sigma_{\bar{P}_3} = 0$), в таблицу 6 оно не включено.)

Таблица 6

Результаты расчетов по 7-узловой схеме

Измеряемый параметр	Эталон, $y_{эм}$	Измерения, $\bar{y}$	$\Delta = \frac{ \bar{y} - y_{эм} }{\sigma}$	Оценки, $\hat{y}$	$\Delta = \frac{ \hat{y} - y_{эм} }{\sigma}$
$\bar{P}_4$	441	442	0.316	442.346	0.426
$\bar{P}_5$	585	591	1.897	584.873	0.040
$\bar{P}_6$	666	671	1.581	664.880	0.354
$\bar{P}_7$	-627	-625	0.632	-634.723	2.442
$\bar{P}_{2-3}$	-991	-1000	0.450	-986.161	0.242
$\bar{P}_{4-5}$	-589	-580	1.8	-591.009	0.402
$\bar{P}_{5-4}$	604	600	0.8	605.174	0.235
$\bar{P}_{6-5}$	326	328	0.333	327.014	0.169
$\bar{P}_{5-7}$	306	324	3.6	306.055	0.011
Средневзвешенное отклонение	—	—	1.268	—	0.48

Так же, как и в предыдущих примерах, отклонения оценок от эталона существенно ниже, чем отклонения измерений.

2.4. Пример 4

В данном примере рассмотрено нахождение оценок измерений в случае, когда есть неизмеренные переменные. Задача решена двумя способами на основе алгоритма оценки параметров, использующего линейные комбинации столбцов матрицы при неизмеренных переменных, и алгоритма оценки параметров, использующего линейные комбинации уравнений.

Для демонстрации эффективности применения данных алгоритмов использована активная модель схемы, представленная на рис. 1. Измеренными переменными являются:

- активная нагрузка первого узла $P_1=444.68$ МВт;

- перетоки активной мощности по связям $i-j$:

$$P_{1-2}=205.18 \text{ МВт}, P_{1-3}=242.54 \text{ МВт}, P_{2-3}=211.6 \text{ МВт};$$

- дисперсии измерений, $\sigma_{P_1}^2 = 10$, $\sigma_{P_{i-j}}^2 = 10$.

Вектор измерений:

$$\bar{y} = [P_1 \ P_{1-2} \ P_{1-3} \ P_{2-3}]^T.$$

Вектор неизмеренных переменных:

$$x = [P_{2-1} \ P_{3-1} \ P_{3-2} \ P_3]^T.$$

Матрица дисперсий ошибок измерений

$$H = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 \end{pmatrix}.$$

Требуется найти неизмеренные переменные и оценки всех параметров. Для этого необходимо минимизировать функцию (27) при ограничениях (19) – (21), в качестве которых использованы уравнения баланса активной мощности в ветвях и узлах и контурное уравнение:

$$P_{1-2} + P_{2-1} = \Delta P_{1-2};$$

$$P_{2-3} + P_{3-2} = \Delta P_{2-3};$$

$$P_3 - P_{3-2} - P_{3-1} = 0;$$

$$P_{1-3} + P_{3-1} = \Delta P_{1-3};$$

$$P_1 - P_{1-2} - P_{1-3} = 0;$$

$$-P_{2-3} - P_{2-1} = 0;$$

$$0.776P_{1-3} + 0.489P_{2-1} + 0.398P_{3-2} = 0,$$

где ΔP_{1-2} , ΔP_{1-3} , ΔP_{2-3} - потери активной мощности по связям $i-j$.

Ограничение (19) имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.489 & 0 & 0.398 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{2-1} \\ P_{3-1} \\ P_{3-2} \\ P_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0.776 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_{1-2} \\ P_{1-3} \\ P_{2-3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4962 \\ 0.6426 \\ 0 \\ 1.1302 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1 способ. **Алгоритм оценки параметров, использующий линейные комбинации столбцов матрицы при неизмеренных переменных.**

Приведем данные ограничения в матричной форме виду, для которого выполняется равенство (32):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.489 & 0.398 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{2-1} \\ P_{3-2} \\ P_3 \\ P_{3-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0.776 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_{1-2} \\ P_{1-3} \\ P_{2-3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4962 \\ 0.6426 \\ 1.7728 \\ 1.1302 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицу $\tilde{A}$ разбиваем на две подматрицы:

$$C^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.489 & 0.398 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вектор u также разобьем на два подвектора v^1 и v^2 :

$$v^1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_5 \end{pmatrix}, v^2 = \begin{pmatrix} u_5 \\ u_6 \\ u_7 \end{pmatrix}.$$

Согласно (35)

$$u_1 = u_6 - 0.489u_7,$$

$$u_2 = -0.398u_6,$$

$$u_3 = 0,$$

$$u_4 = 0.$$

Подставляя это выражение вместо первых k переменных в целевую функцию (27), приходим к задаче безусловной минимизации квадратичной выпуклой функции относительно переменных составляющих вектора v^2 . Найдя вектор

$$\hat{v}^2 = \begin{pmatrix} 0.2183 \\ 0.4407 \\ -0.3133 \end{pmatrix},$$

по условию (34) определяем вектор $\hat{v}^1$

$$\hat{v}^1 = \begin{pmatrix} 0.5939 \\ 0.1247 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

При этом соблюдается условие (24).

По формулам (25), (26) определяем вектор $\hat{y}$:

$$z = \begin{pmatrix} 44.6863 \\ 20.8936 \\ 23.7926 \\ 20.8440 \end{pmatrix},$$

$$\hat{y} = \begin{pmatrix} 446.8630 \\ 208.9360 \\ 237.9258 \\ 208.4399 \end{pmatrix}.$$

Далее, согласно (19) находим вектор $\hat{x}$:

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} -208.4399 \\ -207.7973 \\ -444.5929 \\ -236.7956 \end{pmatrix}.$$

2 Способ. Алгоритм оценки параметров, использующий линейные комбинации уравнений.

Согласно данному алгоритму приводим систему ограничений к виду (36):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.489 & 0 & 0.398 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{2-1} \\ P_{3-1} \\ P_{3-2} \\ P_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0.776 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_{1-2} \\ P_{1-3} \\ P_{2-3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4962 \\ 1.1302 \\ 0.6426 \\ 1.7728 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицу $\tilde{A}$ разбиваем на две подматрицы:

$$C^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.489 & 0 & 0.398 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вектор u также разобьем на два подвектора v^1 и v^2 :

$$v^1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}, v^2 = \begin{pmatrix} u_5 \\ u_6 \\ u_7 \end{pmatrix}.$$

Согласно (35)

$$u_1 = u_6 - 0.489u_7$$

$$u_2 = 0,$$

$$u_3 = -0.398u_7,$$

$$u_4 = 0.$$

Подставляя это выражение вместо первых k переменных в целевую функцию (27), приходим к задаче безусловной минимизации квадратичной выпуклой функции относительно переменных составляющих вектора v^2 . Найдя вектор

$$\hat{v}^2 = \begin{pmatrix} 0.2183 \\ 0.4407 \\ -0.3133 \end{pmatrix},$$

по условию (29) определяем вектор $\hat{v}^1$

$$\hat{v}^1 = \begin{pmatrix} 0.5939 \\ 0 \\ 0.1247 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

При этом соблюдается условие (24).

По формулам (25), (26) определяем вектор $\hat{y}$:

$$z = \begin{pmatrix} 44.6863 \\ 20.8936 \\ 23.7926 \\ 20.8440 \end{pmatrix},$$

$$\hat{y} = \begin{pmatrix} 446.8630 \\ 208.9360 \\ 237.9258 \\ 208.4399 \end{pmatrix}.$$

Далее, согласно (19) находим вектор $\hat{x}$:

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} -208.4399 \\ -236.7956 \\ -207.7973 \\ -444.5929 \end{pmatrix}.$$

Не трудно убедиться, что при решении задачи двумя способами, получен один и тот же результат.

Заключение. В данном разделе приведены результаты решения задачи оценивания состояния электроэнергетической системы для трех тестовых схем. Имитировались разные точности измерений: для SCADA дисперсии измерений находились в диапазоне от 25 до 400, для PMU дисперсии измерений перетоков мощности и инъекций были равны 0.16. Оценки множителей Лагранжа $\hat{u}$ реагируют на точности измерений – чем больше ошибок в измерениях, входящих в уравнение, соответствующее данному $\hat{u}$ (см.(4)), тем дальше значения $\hat{u}$ от нуля.

В дальнейшем планируется отработка техники оценивания состояния ЭЭС на базе симметричной двойственности [15,16] при наличии в уравнениях модели ЭЭС неизмеренных переменных, а также в случае двусторонних ограничений-неравенств на переменные [17].

3. Метод внутренних точек для решения задачи оценки параметров режима при интервальных ограничениях на переменные

3.1. Исходная и двойственная задача оптимизации

В данном разделе будем рассматривать задачу квадратичного программирования:

$$f(y) = \frac{1}{2} y^T H y - c y \rightarrow \min \quad (45)$$

при условиях

$$Ax + By = b, \quad (46)$$

$$\bar{x} \geq x \geq \underline{x}, \quad \bar{y} \geq y \geq \underline{y}. \quad (47)$$

Заданными являются A , B , H и вектор b , такие же, как и в задаче (11), (13). Переменные составляют вектора x , y такой же размерности как в задаче (11), (13). Заданной является вектор-строка

$$c = \bar{y}^T H. \quad (48)$$

Поэтому функция f совпадает с функцией (13). Новым моментом в рассматриваемой задаче (45)-(47) является введение интервальных ограничений (47).

Заданными являются векторы $\bar{x}$, $\underline{x}$ из R^m и векторы $\bar{y}$, $\underline{y}$ из R^n . Считаем, что для всех компонент векторов, задающих верхние и нижние границы переменных, выполняются строгие неравенства

$$\bar{x}_j > \underline{x}_j, \quad j = 1, \dots, m, \quad (49)$$

$$\bar{y}_j > \underline{y}_j, \quad j = 1, \dots, n. \quad (50)$$

В условиях (47) введены интервальные ограничения на все рассматриваемые в задаче переменные. По некоторым переменным эти ограничения имеют техническое происхождение: по физическим условиям параметр не может оказаться вне заданного интервала значений.

По другим переменным интервальные ограничения введены из тех соображений, что при описании параметров функционирования электроэнергетической системы эксперт априори может, пусть даже с запасом, оценить интервал, в котором должен оказаться этот параметр. Введение интервальных ограничений дает большие преимущества [18]. В частности, из (47) непосредственно следует, что задача (45) – (47) имеют ограниченное множество решений (возможно пустое, если ее ограничения противоречивые).

Двойственная задача состоит в минимизации квадратичной строго выпуклой функции

$$-b^T u - \underline{x}^T v + \bar{x}^T \omega - \underline{y}^T \rho + \bar{y}^T \delta + \frac{1}{2} z^T H^{-1} z \rightarrow \min \quad (51)$$

при ограничениях

$$\omega - A^T u - v = 0, \quad (52)$$

$$z - B^T u - \rho + \delta = H\bar{y}, \quad (53)$$

$$v \geq 0, \quad \omega \geq 0, \quad \rho \geq 0, \quad \delta \geq 0. \quad (54)$$

Переменные здесь составляют векторы $u \in R^r$, v , ω из R^m , $\rho, \delta, z \in R^n$. Связь с переменными исходной задачи состоит в соотношении (25). Вектор переменных x является вектором множителей Лагранжа ограничений (52). Вектор переменных y исходной задачи является вектором множителей Лагранжа ограничений (53).

Задача (51)-(54) привлекательна в вычислительном отношении. Для ее решения могут эффективно использоваться двойственные алгоритмы метода внутренних точек [15].

3.2. Алгоритмы внутренних точек

В данном разделе излагается алгоритм внутренних точек, осуществляющий монотонное улучшение решение исходной линейаризованной задачи оценки параметров ЭЭС при интервальных ограничениях на переменные (45) – (47). Алгоритм включает два этапа вычисления. На первом этапе осуществляется ввод в область допустимых решений задачи, то есть удовлетворяющих ограничениям (46), (48).

Обозначим $k = 0, 1, 2, \dots$ - номер итерации решения. На всех итерациях вырабатываемым алгоритмом приближения к решениям x^k, y^k удовлетворяют ограничениям-неравенствам в (47) в строгой форме:

$$\bar{x} > x^k > \underline{x}, \quad \bar{y} > y^k > \underline{y}. \quad (55)$$

Исходным приближением служат любые векторы x^0, y^0 , удовлетворяющие этим неравенствам. Например, можно положить

$$x^0 = \frac{1}{2}(\bar{x} + \underline{x}), \quad y^0 = \frac{1}{2}(\bar{y} + \underline{y}). \quad (56)$$

Обозначим Δx^k , Δy^k - векторы, задающие направление улучшения решения на каждой итерации. Итеративный переход осуществляется по правилам

$$x^{k+1} = x^k + \lambda_k \Delta x^k, \quad y^{k+1} = y^k + \lambda_k \Delta y^k, \quad (57)$$

где λ_k - положительная величина шага корректировки решения.

3.2.1 Алгоритм ввода в область допустимых решений

Основной вычислительной проблемой в рассматриваемых алгоритмах внутренних точек является решение вспомогательной задачи выбора направления.

Вспомогательная задача выбора направления корректировки решения формулируется в виде проблемы минимизации квадратичной сепарабельной выпуклой функции при линейных ограничениях в форме равенств. Векторы Δx^k , Δy^k определяются как результат решения следующей задачи с переменными, составляющими векторы Δx , Δy :

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \frac{(\Delta x_j)^2}{d_j^k} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{(\Delta y_j)^2}{g_j^k} \rightarrow \min \quad (58)$$

при ограничениях

$$A \Delta x + B \Delta y = r^k. \quad (59)$$

Заданными (предварительно вычисленными) здесь являются векторы

$$r^k = b - A \Delta x^k - B \Delta y^k \quad (60)$$

и векторы d^k , g^k с компонентами

$$d_j^k = (\min\{\bar{x}_j - x^k, x^k - \underline{x}_j\})^2, \quad j = 1, \dots, m, \quad (61)$$

$$g_j^k = (\min\{\bar{y}_j - y^k, y^k - \underline{y}_j\})^2, \quad j = 1, \dots, n. \quad (62)$$

Обозначим

$$D_k = \text{diag } d^k, \quad G_k = \text{diag } g^k \quad (63)$$

диагональные матрицы, составленные из векторов d^k и g^k . Согласно условиям оптимальности, чтобы векторы Δx^k и Δy^k составляли оптимальное решение задачи (58), (59), необходимо выполнение равенств

$$A^T u = D_k^{-1} \Delta x, \quad B^T u = G_k^{-1} \Delta y, \quad (64)$$

где u - вектор R' множителей Лагранжа ограничений (59) вспомогательной задачи.

Соотношения (64) являются достаточными условиями, если из выражаемых по ним векторов

$$\Delta x = D_k A^T u, \quad \Delta y = G_k B^T u, \quad (65)$$

выполняются ограничения (60).

Подставив выражения (65) в условие (60) приходим к следующей системе линейных уравнений относительно вектора u

$$F_k u = r^k, \quad (66)$$

где

$$F_k = AD_k A^T + BG_k B^T \quad (67)$$

симметричная неотрицательно определенная матрица.

Обозначим u^k - решение системы (66). Найдя этот вектор, исходя из (65) определяем составляющие направления улучшения решения

$$\Delta x^k = D_k A^T u^k, \quad \Delta y^k = G_k B^T u^k. \quad (68)$$

Итак, поиск направления улучшения решения включает следующие этапы вычислений. Сначала определяется по правилу (60) вектор невязок ограничений-неравенств r^k . Затем, по правилам (61), (62), вычисляются компоненты векторов весовых коэффициентов $d^k \in R^m$, $g^k \in R^n$. На основе этих векторов и матриц A, B строится квадратная матрица F_k по правилу (67).

После этого ищется решение системы линейных уравнений (66).

Это является наиболее сложным вычислительным этапом алгоритма. Из полученных решений системы (66) – вектора u^r , по правилам (68) определяются требуемые векторы Δx^k , Δy^k .

Вычисление шага корректировки решения. Шаг корректировки вычисляется по правилу

$$\lambda_k = \min \{1, \tilde{\lambda}_k\}, \quad (69)$$

где

$$\lambda_k = \gamma \max \{ \lambda : \underline{x} \leq x^k + \lambda \Delta x^k \leq \bar{x}, \underline{y} \leq x^k + \lambda \Delta y^k \leq \bar{y} \}, \quad (70)$$

γ - заданный параметр из интервала (0,1). Рекомендуется принять γ равным 0,9.

Правило (70) гарантирует, что при $\lambda_k = \tilde{\lambda}_k$ после итеративного перехода (57) для векторов x^{k+1} , y^{k+1} , будет выполняться неравенства (55).

Из (69) следует, что после итеративного перехода (57), неравенства (55) будут выполняться для векторов x^{k+1} , y^{k+1} и при $\lambda_k = 1$.

Заметим, из (47), (48), (49) следует выполнение равенства

$$r^{k+1} = (1 - \lambda_k) r^k. \quad (71)$$

Этим объясняется правило (69) в вычислении шага корректировки решения. При $\lambda_k = 1$ получаем, что векторы x^{k+1} , y^{k+1} будут удовлетворять ограничениям-равенствам,

$$r^{k+1} = 0, \quad (72)$$

то есть

$$Ax^{k+1} + By^{k+1} = b. \quad (73)$$

При этом для векторов x^{k+1} , y^{k+1} будет выполняться ограничения-неравенства (55). С этих векторов можно начать процесс оптимизации в области допустимых решений.

3.2.2. Оптимизация в области допустимых решений

В процессе ввода в область допустимых решений получены решения x^0, y^0 , удовлетворяющие ограничениям-равенствам (46) и ограничениям-неравенствам (47) в строгой форме. На всех итерациях $k = 0, 1, 2, \dots$ также будут выполняться ограничения-равенства (46)

$$Ax^k + By^k = b, \quad (74)$$

и ограничения-неравенства в строгой форме (55). Итеративный переход при оптимизации в область допустимых решений осуществляется также по формулам (57).

Направление улучшения решения на этапе оптимизации в области допустимых решений определяется в результате решения следующей вспомогательной задачи

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \frac{(\Delta x_j)^2}{d_j^k} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{(\Delta y_j)^2}{g_j^k} + f(y^k + \Delta y) \rightarrow \min, \quad (75)$$

при ограничениях

$$A\Delta x + B\Delta y = 0. \quad (76)$$

Здесь d^k, g^k - вектора весовых коэффициентов, вычисляемых по правилам (61), (62).

Отметим, что

$$f(y^k + \Delta y) = f(y^k) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n h_j (\Delta y_j)^2 + c^k \Delta y, \quad (77)$$

где

$$c^k = (y^k - \bar{y})H = y^k H - c. \quad (78)$$

Необходимым условием оптимальности для задачи (75), (76) является существование такого вектора $u \in R^r$, что

$$A^T u = D_k^{-1} \Delta x, \quad (79)$$

$$B^T u = G_k^{-1} \Delta y + H \Delta y + c^k. \quad (80)$$

При этом достаточным условием оптимальности будет выполнение ограничения (76). Подставляя выражения Δx и Δy из (79), (80) в условие (76), получаем систему линейных уравнений относительно вектора переменных u из R^r

$$(AD_k A^T + B(G_k^{-1} + H)^{-1})u = -c^k. \quad (81)$$

Пусть u^k - вектор решения этой системы. Найти его можно, вычислив значения

$$\Delta x^k = D_k A^T u^k, \quad (82)$$

$$\Delta y^k = (G_k^{-1} + H)^{-1} B^T u^k + c^k.$$

Шаг корректировки решения определяется по правилу

$$\lambda_k = \min \{ \lambda_k^1, \lambda_k^2 \}, \quad (83)$$

где

$$\lambda_k^1 = \min_{\lambda} f(y^k + \lambda \Delta y^k),$$

$$\lambda_k^2 = \gamma \max \{ \lambda : \bar{x} \geq x^k + \lambda \Delta x^k \geq \underline{x}, \bar{y} \geq y^k + \lambda \Delta y^k \geq \underline{y} \}.$$

при заданном параметре $\gamma \in (0, 1)$.

Второй вариант алгоритма внутренних точек. Кроме (61) – (62) могут использоваться и другие правила задания весовых коэффициентов. Как конкурирующий вариант, можно рассматривать следующее правило при оптимизации в области допустимых решений

$$d_j^k = \min\{\bar{x} - x_j^k, x_j^k - \underline{x}_j\} / \max\{\varepsilon, |\delta x_j^k|\}, \quad (84)$$

$$g_j^k = \min\{\bar{y} - y_j^k, y_j^k - \underline{y}_j\} / \max\{\varepsilon, |\delta y_j^k|\}, \quad (85)$$

при некотором положительном малом ε . Здесь,

$$\delta x^k = A^T u^k, \quad \delta y^k = B^T u^k - \nabla f(x^k). \quad (86)$$

3.3. Двойственные алгоритмы внутренних точек

Двойственные алгоритмы внутренних точек осуществляют монотонное улучшение решения двойственной задачи (51) – (54) по правилам

$$u^{k+1} = u^k + \lambda_k \Delta u^k, \quad (87)$$

$$z^{k+1} = z^k + \lambda_k \Delta z^k, \quad (88)$$

$$v^{k+1} = v^k + \lambda_k \Delta v^k, \quad (89)$$

$$\omega^{k+1} = \omega^k + \lambda_k \Delta \omega^k, \quad (90)$$

$$\rho^{k+1} = \rho^k + \lambda_k \Delta \rho^k, \quad (91)$$

$$\delta^{k+1} = \delta^k + \lambda_k \Delta \delta^k. \quad (92)$$

Здесь $u^k, z^k, v^k, \omega^k, \rho^k, \delta^k$ - векторы, являющиеся приближениями к решению задачи (51) – (54) на итерациях $k=0,1,2,\dots$. Эти векторы на всех итерациях удовлетворяют ограничениям (52) – (54). Причем неравенства (54) выполняются в строгой форме. В качестве начальных приближений можно использовать векторы

$$u^0 = 0, \quad z^0 = H\bar{y}, \quad (93)$$

$$v^0 = \omega^0 = e^m, \quad (94)$$

$$\rho^0 = \delta^0 = e^n, \quad (95)$$

где e^m, e^n - векторы R^m, R^n , состоящие из единиц.

Векторы $\Delta u^k, \Delta z^k, \Delta v^k, \Delta \omega^k, \Delta \rho^k, \Delta \delta^k$ задают направление улучшения решения на итерации k . Они определяются как решение следующей вспомогательной задачи:

$$\Delta \omega - \Delta v - A^T \Delta u = 0, \quad (96)$$

$$\Delta z - B^T \Delta u - \Delta \rho + \Delta \delta = 0, \quad (97)$$

$$\begin{aligned} & -b^T \Delta u - \underline{x}^T \Delta v + \bar{x}^T \Delta \omega - \underline{y}^T \Delta \rho + \bar{y}^T \Delta \delta + \frac{1}{2}((z^k + \Delta z)^T H^{-1}(z^k + \Delta z) + (\Delta v)^T D_k^{-1} \Delta v + \\ & + (\Delta \omega)^T \tilde{D}_k^{-1} \Delta \omega + (\Delta \rho)^T G_k^{-1} \Delta \rho + (\Delta \delta)^T \tilde{G}_k^{-1} \Delta \delta + (\Delta u)^T \Delta u) \rightarrow \min \end{aligned} \quad (98)$$

Здесь $D_k, \tilde{D}_k, G_k, \tilde{G}_k$ - диагональные матрицы, составленные из весовых коэффициентов:

$$d_j^k = (v_j^k)^2, \quad j=1,\dots,m, \quad (99)$$

$$\tilde{d}_j^k = (\omega_j^k)^2, \quad j=1,\dots,m, \quad (100)$$

$$g_j^k = (\rho_j^k)^2, \quad j=1,\dots,n, \quad (101)$$

$$\tilde{g}_j^k = (\delta_j^k)^2, \quad j=1, \dots, n. \quad (102)$$

Обозначим x^k, y^k векторы множителей Лагранжа ограничений (96), (97) задачи (96) – (98). За счет использования метода неопределенных множителей Лагранжа, по аналогии с рассмотренным выше в предыдущем разделе «прямым» методом внутренних точек, вспомогательная задача (96) – (98) сводится к проблеме поиска решения системы линейных уравнений относительно векторов $x \in R^m, y \in R^n$ с симметричной неотрицательной определенной матрицей. Решения этой системы будут как раз векторы x^k, y^k . Найдя их, определяем

$$\Delta u^k = b - Ax^k - By^k, \quad (103)$$

$$\Delta z^k = H^{-1}y^k, \quad (104)$$

$$\Delta v^k = -D_k x^k, \quad (105)$$

$$\Delta \omega^k = \tilde{D}_k x^k, \quad (106)$$

$$\Delta \rho^k = -G_k y^k, \quad (107)$$

$$\Delta \delta^k = \tilde{G}_k y^k. \quad (108)$$

Величина шага корректировки определяется из правил

$$\lambda_k = \min\{\lambda_k^1, \lambda_k^2\}, \quad (109)$$

где

$$\lambda_k = \arg \min\{\lambda : (z^k + \lambda \Delta z^k)^T H(z^k + \lambda \Delta z^k) + \lambda(-b^T \Delta u - \underline{x}^T \Delta v + \bar{x}^T \Delta \omega - \underline{y}^T \Delta \rho + \bar{y}^T \Delta \delta)\}, \quad (110)$$

$$\lambda_k^2 = \gamma \max\{\lambda : v^k + \lambda \Delta v^k \geq 0, \omega^k + \lambda \Delta \omega^k \geq 0, \rho^k + \lambda \Delta \rho^k \geq 0, \delta^k + \lambda \Delta \delta^k \geq 0, \}. \quad (111)$$

При заданном параметре $\gamma \in (0, 1)$.

Второй вариант двойственного алгоритма внутренних точек. Как конкурирующий вариант можно использовать следующие правила задания весовых коэффициентов вместо (99) – (102):

$$d_j^k = v_j^k / \min\{\varepsilon, |x_j^{k-1} - \underline{x}_j|\}, \quad j=1, \dots, m,$$

$$\tilde{d}_j^k = \omega_j^k / \min\{\varepsilon, |\bar{x}_j - x_j^{k-1}|\}, \quad j=1, \dots, m,$$

$$g_j^k = \rho_j^k / \min\{\varepsilon, |y_j^{k-1} - \underline{y}_j|\}, \quad j=1, \dots, n,$$

$$\tilde{g}_j^k = \omega_j^k / \min\{\varepsilon, |\bar{y}_j - y_j^{k-1}|\}, \quad j=1, \dots, n$$

при некотором достаточно малом (чтобы избежать деления на ноль) положительном ε .

Заключение

Выше рассмотренные две постановки задачи оценивания состояния ЭЭС:

- 1) без введения ограничений-неравенств на переменные;
- 2) с введением интервальных ограничений-неравенств попеременно.

Обе постановки были рассмотрены применительно к линеаризованной задаче. Решение линеаризованной задачи рассматривается как этап (итерация) в решении исходной нелинейной задачи.

При решении линеаризованной задачи без ограничений-неравенств по переменным возможны два способа организации вычислений:

1.1. Можно было, выражая из линейных уравнений одни переменные через другие, свести исходную задачу к безусловной минимизации квадратичной выпуклой функции от исходных переменных, количество которых уменьшено в результате выражения одних переменных через другие. Этот путь организации вычислений здесь не рассматривался, но его можно легко организовать.

1.2. Можно воспользоваться двойственной задачей. Сначала найти множители Лагранжа ограничений исходной задачи. Затем по этим множителям, исходя из простых в вычислительном отношении правил, определить искомые значения исходных переменных.

На основе фактов симметричной двойственности задача поиска множителей Лагранжа представляется в виде минимизации квадратичной сепарабельной функции при однородных линейных ограничениях. Выше были рассмотрены два способа сведения данной задачи к вычислительной проблеме минимизации квадратичной выпуклой функции (что равносильно проблеме поиска решения системы линейных уравнений с симметричной неотрицательно определенной матрицы). Отметим, что однородная система линейных уравнений формировалась только относительно той части матрицы ограничений исходной задачи, которая относится к неизмеренным переменным.

1.2.1. Учет системы линейных однородных уравнений путем выражения одних искомых множителей Лагранжа через другие. Такой алгоритм в вычислительном отношении представляется как использование специальных процедур вычисления линейных комбинаций: столбцов подматрицы, соответствующих неизмеренным переменным.

1.2.2. Преобразование всей задачи путем использования процедур вычислений линейных комбинаций отдельных ограничений к виду, когда у подматрицы столбцов неизмеренных переменных максимален (не расширяем далее) набор строк с ненулевыми компонентами.

Хотя оба эти варианта должны приводить к одному и тому же результату, сравнительный их анализ может быть полезен, в том числе в целях минимизации общего времени решения исходной задачи. Важно также, что при втором варианте алгоритма происходит изменение структуры всех уравнений исходной задачи, в то время как при первом варианте изменяются только наборы части переменных. Вместо исходных неизмеренных переменных рассматриваются их линейные комбинации.

Для решения задачи оценивания состояния ЭЭС с интервальными ограничениями на переменные здесь были изложены четыре варианта алгоритма внутренних точек. Два варианта «прямых» алгоритмов внутренних точек, осуществляющих монотонное улучшение решения исходной задачи. Два варианта – двойственные алгоритмы, осуществляющие монотонное улучшение двойственной задачи. Сравнительный анализ этих четырех

вариантов алгоритма на основе экспериментальных исследований – цель дальнейшей работы.

Список литературы

1. H. Lin, Y. Deng, S. Shukla, J. Thorp, L. Mili, "Cyber Security Impacts on All-PMU State Estimator – A Case Study on Co-Simulation Platform GECON," in Proc. 5-8 Nov. 2012 Smart Grid Communications (SmartGridComm), 2012 IEEE Third International Conf., pp. 587-592.
2. Колосок И.Н., Гурина Л.А. Достоверизация измерений при оценивании состояния ИЭС как средство повышения кибербезопасности системы SCADA / Методические вопросы надежности больших систем энергетики: Вып. 64. Надежность систем энергетики: достижения, проблемы, перспективы / Отв. ред. Н.И. Воропай – ИСЭМ СО РАН, 2014. С. 296 – 306.
3. Гамм А.З. Оценка текущего состояния электроэнергетической системы как задача нелинейного программирования // Электричество. - 1972. - № 9.- С.12-18.
4. Гамм А.З. Методологические вопросы оценивания и идентификации в электроэнергетических системах. // Вопросы оценивания и идентификации в энергетических системах.-Иркутск: СЭИ СО АН СССР. - 1974. - С. 29-51.
5. Гамм А.З. Статистические методы оценивания состояния электроэнергетических систем.-М.: Наука. - 1976.-220с.
6. Информационное обеспечение диспетчерского управления в электроэнергетике / Отв. Ред. А.З. Гамм и И.А. Шер. - Новосибирск: Наука, 1985. - 223 с.
7. Оценивание состояния в электроэнергетике. / А.З. Гамм, Л.Н. Герасимов, Ю.А. Гришин и др. / Под ред. Ю.Н. Руденко – М.: Наука. – 1983. – 320 с.
8. Гамм А.З., Голуб И.И. Наблюдаемость электроэнергетических систем. –М.: Наука. - 1990. - 220с.
9. Методы решения задач реального времени в электроэнергетике. / А.З. Гамм, Ю.Н. Кучеров, С.И. Паламарчук и др. / Новосибирск: Наука. Сиб. Отделение. – 1990. – 294 с.
10. Гамм А.З. Вероятностные модели режимов электроэнергетических систем. - Новосибирск: Наука, 1993. - 133 с.
11. Гамм А.З., Колосок И.Н. Обнаружение грубых ошибок телеизмерений в электроэнергетических системах. Новосибирск: Наука. - 2000. – 152 с.
12. Аметистов Е.В. Основы современной энергетики. Современная электроэнергетика. – М: Издательский дом МЭИ, 2010. – Т.2 – 632 с.
13. Enrique Acha, Claudio R. Fuerte-Esquivel, Hugo Ambriz-Perez, Cesar Angeles-Camacho. FACTS Modelling and Simulation in Power Networks. John Wiley & Sons Ltd, 2004, 421 p.
14. Зоркальцев В.И. Симметричная двойственность. Приложение к моделям электрических и гидравлических цепей. – Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2004. – 40 с.

15. В.И. Зоркальцев. Симметричная двойственность в оптимизации и её приложения. – Математика. Известия ВУЗов, 2006, №22. С.1-10.
16. С.П.Епифанов, В.И. Зоркальцев. Приложения теории двойственности к моделям потокораспределения.- Вычислительные технологии – 2009, № 1. - С.67-74.
17. В.И. Зоркальцев. Элементы оптимизации. – Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2014. - 100с.
18. Зоркальцев В.И. Решение систем линейных неравенств алгоритмами внутренних точек // Современные методы оптимизации и их приложения к моделям энергетики (сборник научных трудов). Новосибирск: Наука, 2001. – с. 142-161.

Научное издание

Гурина Л.А., Зоркальцев В.И., Колосок И.Н., Коркина Е.С., Мокрый И.В.

**ОЦЕНИВАНИЕ СОСТОЯНИЯ ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ:
АЛГОРИТМЫ И ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ
ЛИНЕАРИЗОВАННЫХ ЗАДАЧ**

Подписано к печати 20 апреля 2016 г.

Формат 60*80*1/16

Печ. л. 2.1

Тираж – 100 экз.

Заказ N 40

Отпечатано на ризографе ИСЭМ СО РАН
664033, Иркутск, ул. Лермонтова, 130

ISBN 978-5-93908-148-1



9 785939 081481