ИНСТИТУТ СИСТЕМ ЭНЕРГЕТИКИ
им. Л.А. Мелентьева СО РАН

Зоркальцев В.И.

ИВАН ИВАНОВИЧ ЕРЕМИН
И
ЛИНЕЙНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Иркутск
2017

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт систем энергетики имени Л.А. Мелентьева
Сибирского отделения Российской академии наук

Зоркальцев В.И.

ИВАН ИВАНОВИЧ ЕРЕМИН
И
ЛИНЕЙНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Иркутск
2017

УДК 519.6

Зоркальцев В.И. Иван Иванович Еремин и линейные неравенства. – Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2017. – 25 с.

ISBN 978-5-93908-158-0.

Приводятся некоторые факты из биографии и результатов исследований И.И. Еремина (годы жизни 1933–2013). Обсуждается необходимость введения теории линейных неравенств в учебные программы. Излагается ряд основополагающих, полезных фактов из теории линейных неравенств, линейной оптимизации, вычислительной математики.

При поддержке гранта РФФИ №15-07-07412а.

ISBN 978-5-93908-158-0

Содержание

Предисловие... 4

1. Некоторые факты из теории линейных неравенств....................................... 7

2. О «граничных решениях» и «свертках» 9

3. Альтернативные системы линейных неравенств... 10

4. Проблема наглядности формулировок теорем об альтернативах............... 12

5. Решения с минимальными наборами активных ограничений 14

6. Проблема простоты и естественности доказательства исходной теоремы об альтернативах 15

7. Неравенства-следствия 15

8. Теория двойственности 16

9. Несобственные задачи линейного программирования 19

Литература 24

Предисловие

Данная брошюра посвящена памяти замечательного человека, крупного ученого Ивана Ивановича Еремина, лидера свердловской (ныне екатеринбургской) школы по теории и методам оптимизации и исследования операций. Эта школа известна своими результатами в теории линейных неравенств и линейной оптимизации. Именно «*Теория линейной оптимизации»* назвал Еремин свою последнюю монографию [1]. Она содержала основные, хотя и не все результаты многолетних исследований автора. Наверно было бы очень правильно, если бы все ученые писали подобные обобщающие монографии в конце своего научного пути. Конечно, хорошо бы знать точно, когда это надо уже делать.

Безусловно, о биографии И.И. Еремина, его человеческих качествах и поступках лучше напишут его непосредственные ученики и коллеги. Здесь будут отмечены только некоторые события из его научно-организационной жизни, в которых я принимал участие. Эти события тесно связаны с другим организатором науки под названием «*Оптимизация*» в восточной части России – с Валерьяном Павловичем Булатовым, другом и соратником И.И. Еремина. По просьбе Валерьяна Павловича мне пришлось его заменить в начале 90-х годов в качестве заведующего отделом Прикладной математики ИСЭМ СО РАН и, вследствие этого, активно участвовать в организационных мероприятиях Российской Ассоциации Математического программирования, тесно взаимодействовать с И.И. Ереминым. К тому же мои математические интересы находятся, в большей части, в области теории и методов решения линейных уравнений и неравенств, в линейной оптимизацией и ее непосредственных обобщений.

Ученый – организатор. Иван Иванович Еремин был общепризнанным лидером движения «Теория и методы оптимизации» на обширном восточном советском пространстве. Хотя он и не проявлял какие–то яркие организационные замашки. Когда в 80-х годах возникла идея создания Российской Ассоциации математического программирования, то совсем не случайно Председателем этой Ассоциации был избран И.И. Еремин.

Активным инициатором создания Ассоциации и избрания Ивана Ивановича на руководство был Валерьян Павлович. Он даже организовывал специальную поездку иркутских математиков в Новосибирск в целях согласования этой идеи. Иван Иванович ответственно относился к своей общественной должности. В Екатеринбурге по его инициативе регулярно выходили бюллетени Ассоциации по разным аспектам ее деятельности. Увы, теперь эта деятельность прекратилась, Ассоциация умерла со смертью ее лидеров и организаторов.

В 90-х годах была реализована давно бродившая идея создания научного журнала на востоке России по теории и методам оптимизации, объединяющего обе составляющие оптимизации – математическое программирование и оптимальное управление. Такой журнал начал выходить в 1995 г. в Иркутске. Он назывался «Оптимизация, управление, интеллект». Последнее странное в этом ряду слово в названии отражало направление поиска директора Ир ВЦ СО РАН, на базе которого издавали журнал. Главным его редактором изначально был избран И.И. Еремин. Инициатором издания журнала и назначения И.И. Еремина главным редактором был опять-таки В.П. Булатов. Надо отметить, что И.И. Еремин крайне серьезно относился к изданию журнала. Он специально готовил для него крупные, содержательные публикации по результатам проводимых им в это время исследований, в том числе статью в первый номер журнала по многокритериальной оптимизации [2].

К сожалению, после нескольких первых хороших номеров, журнал стал мельчать, потерял регулярность и превратился в вариант сборника несколько случайно собранных статей. На одной из конференций в Екатеринбурге И.И. Еремин пожаловался мне, что он является только формально Главным редактором. А фактически он никак не участвует в отборе статей, не видит даже номера журнала до его выхода в свет. Поэтому попросил передать, чтобы его освободили от этой должности. Такая простая просьба честного человека. Все это было мною передано. И, вместо того, чтобы отрегулировать регламент издания журнала, было принято «руководством» иркутских математиков решение о смене главного редактора. Журнал измельчал и умер. А жаль, мог бы жить и приносить пользу.

С именем И.И. Еремина для многих ассоциируется регулярно проводившаяся под Свердловском («Кунгурка», а потом «Трубник») конференция *«Математическое программирование и его приложения»*. На ней побывали многие, почти все советские специалисты в области оптимизации и исследования операций. Раньше, скажем, в нашем институте, прежде чем выйти на защиту кандидатской или докторской диссертации в области исследования операций (по математическим моделям или методам) считалось обязательным выступить на «Ереминской» конференции. Получить одобрение на этой конференции – в некотором роде «знак качества» проведенным исследованиям. Можно сожалеть, что за последние два десятилетия традиция обязательной тщательной «обкатки» на математических семинарах и конференциях диссертаций, содержащих математические методы и модели, отмерла. Это наносит ущерб качеству таких диссертаций, да и самим математическим исследованиям (удаляет их от жизни). Широко распространилась имитация математического моделирования, что дискредитирует научные исследования.

Были и другие аналогичные конференции. В том числе конференция ЦЭМИ (У.Х. Малкова), конференция ВЦ (Н.Н. Моисеева, ныне ее возродил Ю.Г.Евтушенко), байкальская школа-семинар (она же «Булатовская» конференция). Свердловская конференция имела свое лицо. Она отличалась домашней обстановкой, теплотой (возможно поэтому, что проводилась в зимнее время). Обязательным атрибутом этих конференций были лыжные соревнования. Особую естественность отношениям на конференции придавал и сам Иван Иванович, Галина Федоровна Корнилова и другие сотрудники, занимавшиеся ее проведением. Обычно на какой-то вечер организаторы приглашали интересных людей. Особенно запомнился приезд Родыгина (известный композитор, автор «Уральской рябины») – какой живчик, какие частушки, песни, как классно подыгрывал на баяне симпатичной молодой исполнительнице.

Любопытный факт. В число организаций, представляемых журналом «Оптимизация, управление, интеллект», входила и «Международная Академия нелинейных наук». Хотя некоторые вполне серьезные ученые состояли «членами» этой «Академии», есть, на мой взгляд, что-то очень несерьезное в самом словосочетании «нелинейные науки».

В 90-х годах расплодилось много разных «Академий», жизнеописание которых еще ждут своих Ильфа и Петрова. Парадоксальность данной ситуации состояла в том, что сам Главный редактор был, прежде всего, крупным специалистом в теории линейных неравенств, в линейной оптимизации. Именно таким «линейным» наукам (и их обобщениям, расширениям) посвящена основная часть его работ, значительная часть всех его монографий (у меня имеется 8, но возможно их больше). Конечно, И.И. Еремин хорошо знал теорию оптимизации в целом, имел крупные результаты в нелинейной оптимизации (например, в методе штрафных функций), был научным редактором интересной, переведенной и изданной в 1985 г. немецкой книги по нелинейному программированию [3]. Вместе с тем даже выпуклое программирование Иван Иванович и его ближайшие соратники предпочитали иногда рассматривать через бесконечные системы линейных неравенств [4, 5], что, кстати, не только оригинально, но и конструктивно во многих отношениях.

Не будет преувеличением, если сказать, что в Свердловске сложилась наиболее сильная школа по теории линейных неравенств, ее непосредственным расширениям. И не только на всем советском пространстве. Прочный фундамент этой школы заложил Сергей Николаевич Черников [6], учитель Ивана Ивановича. Кстати будет напомнить, что среди учеников С.Н. Черникова был и другой известный ученый, и организатор науки Виктор Михайлович Глушков, основатель киевского института Кибернетики [7]. Это подчеркивает важную роль Черникова в формировании крупных российских и украинских математических школ и неразрывную научную связь украинской и российской науки.

Большой вклад в развитие теории линейных неравенств и оптимизации внесли ближайшие сподвижники и ученики И. И. Еремина – Н. Н. Астафьев, Л. Д. Попов, В.Д. Скарин и др. Для меня их отзывы, замечания (обычно очень деликатные, даже когда я или мои аспиранты совершали серьезные ошибки) всегда оказывались очень ценными.

1. Некоторые факты из теории линейных неравенств

Благодаря работам школы Черникова–Еремина, теория линейных неравенств стала развитым, интересным (не только своими приложениями, но и установленной системой научных фактов) разделом современной математики. Считаю, что давно уже настало время включать теорию линейных неравенств в базовые университетские курсы линейной алгебры [8]. На этой основе, скажем, теория линейных уравнений, линейное и выпуклое программирование могли бы рассматриваться как частные, легко осваиваемые случаи. Ниже приведены соображения по некоторым ключевым составляющим теории линейных неравенств и линейной оптимизации. Речь будет идти только о фактах в рамках конечномерных евклидовых пространств.

Строение полиэдров – множества решений систем линейных неравенств. И.И. Еремин этот объект называл также выпуклым полиэдральным множеством, многогранником решений системы линейных неравенств. Изучение устройства полиэдров имеет основополагающее значение для теории и методов решения линейных неравенств.

Иногда, особенно начинающие исследователи, используют чрезмерно упрощенные представления об этом объекте. Применяются без всяких необходимых предварительных оговорок рассуждения о «вершинах», «ребрах» и «гранях». Уместно будет заметить, что частным случаем множества решений системы линейных неравенств является линейное многообразие, в т.ч. множество решений систем линейных уравнений. В линейном многообразии нет никаких «вершин» или «ребер».

Теоретические основы строения полиэдров достаточно полно и строго изложены как раз в работах С. Н. Черникова, И. И. Еремина, Н. Н. Астафьева [1, 4, 6]. Полиэдр представляется в виде векторной суммы трех множеств: 1) политопа, 2) остроконечного выпуклого конуса с конечным числом образующих векторов, 3) линейного подпространства (ядро матрицы ограничений). Политоп определяется как выпуклая оболочка решений системы неравенств с максимальными (нерасширяемыми) наборами активных ограничений. Остроконечность конуса означает, что если какой–то ненулевой вектор ему принадлежит, то вектор, противоположный данному, не может находиться в таком конусе. Векторная сумма остроконечного конуса и линейного подпространства образует конус рецессивных векторов - множество решений однородной системы неравенств, порождаемой данной.

И вот если в указанном представлении линейное пространство содержит ненулевые вектора, то термины типа «вершина» полиэдра теряют смысл. Можно отметить, что на фоне несколько «затеоретизированной» книги [6] (сказались глубокие «алгебраические корни» автора), в [1] теория линейных неравенств представлена в более наглядном для «широкой массы» читателей виде. Вместе с тем есть необходимость в поиске еще более простых для восприятия (и конечно не менее строгих) схем изложения материала об устройстве полиэдров.

Особо следует выделять отдельные важные типы полиэдров. В частности, полезно отдельно рассматривать случай ограниченного полиэдра, когда он является политопом. В монографиях [1, 4] приводятся интересные, конструктивные и изящные критерии для идентификации такого случая.

Этот случай имеет многие преимущества (в т.ч. при использовании геометрических представлений о «вершинах», «ребрах» и пр.). При этом, как ни странно, он достаточно общий в прикладном плане. Любой разработчик модели, если он специалист в «моделируемой» им области, должен быть способен априори оценить диапазоны возможных значений переменных.

Введение этих диапазонов непосредственно в модель делает множество решений системы линейных неравенств политопом.

2. О «граничных решениях» и «свертках»

В работах И.И. Еремина подчеркивалась важность введенного С.Н. Черниковым принципа граничных (иногда называемых угловыми) решений. Это решения систем линейных неравенств с максимальными (не расширяемыми) наборами активных ограничений. Для остроконечного конуса рецессивных направлений таковыми являются его образующие, то есть ненулевые вектора, не выражающиеся в виде выпуклой комбинации других (не совпадающих с ним по направлению) векторов из этого множества. Такие решения играют определяющую роль для описания полиэдров, для описания конуса рецессивных направлений и имеют важное значение для некоторых алгоритмов решения систем линейных неравенств (в т.ч. для алгоритмов симплекс-метода).

Граничные решения активно применяются в методе свертки Фурье – Черниковой. Мне приходилось слышать не очень справедливое и несколько ехидное замечание о том, что решать системы линейных неравенств методом Черниковой это то же самое, что считать определитель по его определению. Надо понимать, что метод «свертки» имеет особую цель. Его не целесообразно использовать для поиска какого–либо одного решения. Он предназначен для описания всего множества решений системы линейных неравенств (в т.ч. задачи линейного программирования). Как показывает мой опыт исследования вариантов развития и функционирования систем энергетики, обычно интерес представляет не какое-то одно оптимальное решение, а все множество оптимальных и даже субоптимальных решений. В т.ч. из-за объективно существующих неточностей в задании ограничений и целевых функций, неопределенности исходных данных, необходимости учета дополнительных, не введенных в модель факторов.

Существуют и другие области приложений алгоритмов «свертки», в том числе для описания множества возможных решений модели второго этапа задачи двухэтапного линейного программирования Данцига-Маданского. Это направление активно развивалось Дмитрием Шапотом и его учениками – Ларисой Шевчук, и Тиитом Тамм (эстонский в 70-х годах молодой ученый-энергетик, я как-то его специально знакомил на Булатовской школе в «Песчанке» с Иваном Ивановичем). Это может быть полезно для решений активно разрабатываемых ныне двухуровневых задач оптимизации (классические двухэтапные задачи можно интерпретировать как частный случай двухуровневых задач).

Наряду с «граничными решениями» особый интерес представляет исследование и применение их «антиподов» – решений с минимальными наборами активных ограничений, которые являются относительно внутренними точками полиэдра решений системы линейных неравенств. В частности, такие решения активно используются и вырабатываются в алгоритмах метода «внутренних точек [9].

3. Альтернативные системы линейных неравенств

В начале семидесятых годов, будучи еще молодым специалистом, на одной из конференций в Кунгурке я услышал фразу И.И. Еремина: «Вся теория двойственности линейного программирования содержится в лемме Фаркаша». Это фраза тогда меня удивила, крепко запала и привела в конечном итоге к моим специальным изысканиям в этой области. Постепенно я убедился в том, что линейное программирование должно восприниматься всего лишь как фрагмент, частный случай линейных неравенств. Что теоремы об альтернативных системах линейных неравенств (исторически первыми авторами их были Гордон, потом Минковский и только затем уже Фаркаш) являются очень интересным и полезным во многих отношениях инструментом [8].

Каждой системе линейных неравенств соответствует другая, альтернативная ей система, конструируемая из тех же исходных данных, но в иных ограничениях и с иным составом переменных. Причем априори известно, что одна, и, только одна из этих систем совместна, имеет решение. Имеет место симметрия – альтернативная к альтернативной является исходная система.

Одно из «практических» приложений теорем об альтернативных системах линейных неравенств – конструктивное доказательство отсутствия решения у рассматриваемой системы. Чтобы доказать это достаточно указать решение для альтернативной системы.

Линейные уравнения являются частным случаем линейных неравенств. Частным случаем теорем об альтернативных системах линейных неравенств является теорема Фредгольма. И именно ей уместно пользоваться для доказательства несовместности системы линейных уравнений. Приходилось слышать даже на экзамене в аспирантуру по вычислительной математике и такие рассуждения (предполагаю, аналогичные ответы студентов слышали многие): «Прежде чем начать решать системы линейных уравнений (речь шла о методе Гаусса), следует убедиться, что определитель матрицы ненулевой». Здесь сразу три неточности. Во-первых, системы могут быть и с не квадратными матрицами. Во - вторых, нулевой определитель не означает несовместность (справедливо только обратное утверждение для квадратных матриц). Наконец, вычисления определителя, намного, более сложная задача, чем решение самой системы. Кстати, еще Гейл во введении к книге [10] писал о целесообразности исключить определители из курсов по математической экономике. В работах И.И. Еремина, я также не припоминаю, чтобы он пользовался определителями.

В процессе подготовки этой брошюры я получил от санкт-петербургского ученого Г.Ш. Тамасяна редакционные замечания по тексту рукописи и электронную копию учебника по линейной алгебре Василия Николаевича Малоземова [11]. За оба события выражаю признательность Григорию Шаликовичу. В. Н. Малоземов написал действительно очень полезный учебнике по линейной алгебре (в России давно ощущается нехватка в продуманных учебниках по этому курсу). И прямо в название этого учебника автор вынес утверждение, что линейная алгебра в нем будет рассматриваться без определителей!

В связи с теоремой Фредгольма можно показать одно из преимуществ от введения упоминавшихся интервальных ограничений на переменные. Рассматривается система линейных уравнений относительно вектора переменных x:

$$Ax = b,$$

где A – $m \times n$ матрица. Альтернативной будет система относительно вектора u:

$$A^T u = 0, \;\; b^T u = 1.$$

Из-за погрешностей счета возможны проблемы в установлении точного выполнения первого из условий альтернативной системы. Если же, вместо исходной, решать систему

$$Ax = b, \;\; \underline{x} \le x \le \overline{x},$$

где $\underline{x}, \overline{x}$ – векторы, задающие интервалы возможных значений переменных, то альтернативная система приобретает вид неравенства

$$b^T u + \overline{x}^T (A^T u)_- + \underline{x}^T (A^T u)_+ > 0,$$

где $(\ )_-$, $(\ )_+$ – срезки векторов, обнуляющие соответственно положительные и отрицательные компоненты. Проверить такое «альтернативное» условие гораздо проще и оно устойчивей к погрешностям счета.

4. Проблема наглядности формулировок теорем об альтернативах

Существует большое количество внешне сильно различающихся теорем об альтернативных системах линейных неравенств и равносильных им утверждений. Причем эти варианты можно дополнять до бесконечности. Есть необходимость в поведении порядка в этом море фактов.

Уместно отметить, что убежденность в особой важности этой задачи у меня возникла в результате ее обсуждений, в частной беседе с Николаем Николаевичем Астафьевым на одной из конференций в Новосибирске. Это, к слову, о пользе непосредственного общения в противовес получившим широкое распространение в последние годы заочным научным конференциям, дистанционным формам обучения и др. «бесконтекстным» методам обмена научной информацией.

В качестве решения обсуждаемой проблемы необходимо использование некоторого простого, наглядного легко запоминающегося утверждения, из которого на базе небольшого числа стандартных идей можно получать все другие формы теорем об альтернативах. В качестве «исходного» утверждения в [8] было предложено использовать теорему об альтернативах в следующей «геометрической» форме.

Теорема 1. *Для любых взаимно дополняющих ортогональных линейных подпространств L и $L^{\perp}$ в R^n при любом $j \in \{1,...,n\}$ существует вектор $x \geq 0$, находящийся, либо в L, либо в $L^{\perp}$, такой что $x_j > 0$.*

Из этого утверждения, используя различные алгебраические формы записи взаимно ортогональных линейных подпространств можно получать различные теоремы об альтернативах. Взаимно дополняющие, ортогональные линейные подпространства можно определять как ядро (нуль – пространство) некоторой матрицы и образ транспонированной из нее матрицы. При любой матрице A размера $m \times n$ теорема 1 приобретает вид: *при любом $j \in \{1,...,n\}$ существует вектор $x \geq 0$, такой что $x_j > 0$ который, либо является решением системы*

$$Ax = 0,$$

либо представим при некотором $u \in R^m$ *в следующем виде*

$$x = A^T u.$$

Используя стандартные приемы линейной алгебры из теоремы 1 можно получать многие другие утверждения, в том числе **теорему Гордона**: *либо существует вектор* x*, такой что*

$$Ax = 0,\ x \ge 0,\ x \ne 0,$$

либо существует вектор $u \in R^m$ *такой что*

$$A^T u > 0.$$

Здесь приведены две теоремы об альтернативных системах однородных линейных неравенств. Можно сформулировать и ряд других теорем [8] с использованием в частности следующих приемов:

1. Обращение на противоположные всех, либо части условий – неравенств.
2. Задания линейного многообразия по одним переменным в виде образа одной матрицы и по другим переменным в виде ядра другой матрицы.

В теореме 1 вместо общего условия $x_j > 0$ можно было использовать конкретное положительное значение этой компоненты, а именно условия $x_j = 1$. Это позволяет переходить к конструированию теорем об альтернативах для неоднородных систем линейных неравенств. В частности, таким путем легко получить утверждение известное как **теорема Фаркаша**: *либо имеет решение систем*

$$Ax = b,\ x \ge 0,$$

либо разрешима система

$$A^T u \le 0,\ b^T u > 0,$$

при заданном $b \in R^m$.

Для вывода этого утверждения из теоремы 1 достаточно рассмотреть первую из этих систем в виде однородной системы от вектора переменных из R^{n+1}:

$$Ax - x_{n+1} b = 0,\ x \ge 0,\ x_{n+1} = 1.$$

Таким же приемом можно прийти к утверждению, известному **как теорема Гейла:** *либо разрешима система*

$$Ax = 0,\ x \ge 0,\ c^T x = -1,$$

либо разрешима система

$$A^T u \le c.$$

Здесь c *заданный вектор в* R^n.

5. Решения с минимальными наборами активных ограничений

Одно из многочисленных приложений теории альтернативных систем линейных неравенств – критерии для выявления относительно внутренних точек полиэдров, т.е. решений систем линейных неравенств с максимальными (не расширяемыми) наборами неактивных ограничений. Это же самое, что и решения систем линейных неравенств с минимальными (не сужаемыми) наборами активных ограничений. Их можно рассматривать как антиподы «узловым» решениям, т.е. векторам с максимальными наборами активных ограничений.

Приведенная выше теорема об альтернативных неравенствах в геометрической форме равносильна следующему утверждению.

Теорема 2. *В любых взаимодополняющих ортогональных линейных подпространствах* L, $L^{\perp}$ *в* R^n *существуют векторы* $x \in L$, $y \in L^{\perp}$ *такие что,*

$$x \geq 0,\ \ y \geq 0,\ \ (x + y) > 0.$$

Здесь последнее неравенство можно назвать условием дополняющей нежесткости в строгой форме: для любого j либо $x_j > 0$, либо $y_j > 0$. Оба эти строгие неравенства выполняться не могут в силу ортогональности L, $L^{\perp}$.

Решения системы линейных неравенств с минимальными наборами активных ограничений имеют один и тот же набор таких ограничений. В него входят ограничения, которые будут активными для любого решения системы. Решения с минимальными наборами активных ограничений являются относительно внутренними точками полиэдра решений – внутренними относительно минимального линейного многообразия содержащего данный полиэдр.

Такие особые решения полезны для анализа устойчивости решений к погрешностям исходных данных, для решения многокритериальных задач с лексикографически упорядоченными решениями и в др. приложениях [12].

6. Проблема простоты и естественности доказательства исходной теоремы об альтернативах

Теоремы об альтернативных системах линейных неравенств или равносильные им утверждения обычно доказываются математической индукцией по n. Еще Гейл [10] отмечал, что такой путь не позволяет легко воспринимать исходную идею этих теорем. К тому же он громоздок. В [8] предложен другой путь доказательства, базирующийся и по утверждению, которое можно назвать условием оптимальности Ферма.

Теорема 3. *Вектор $\bar{x}$ является результатом решения задачи минимизации дифференцируемой выпуклой функции f на линейном подпространстве L в том и только в том случае, если* $\nabla f(\bar{x}) \in L^{\perp}$.

В частности если $L = R^n$, то согласно этой теореме в точке минимума $\nabla f(x) = 0$.

Пусть, $\bar{x}$ решение задачи минимизации функции $f(x) = \sum_{l \neq j} (x_l)_-^2 + (1 - x_j)^2$ на некотором линейном подпространстве L. Если $f(\bar{x}) = 0$, то вектор $\bar{x}$ будет иметь все компоненты неотрицательные, а компоненту с номером j равной единице. Если $f(\bar{x}) \neq 0$, то вектор $\nabla f(x)$ будет иметь все компоненты неотрицательные, а компоненту с номером j положительную. И по теореме 3 этот вектор находится в $L^{\perp}$. Получили короткое и довольно прозрачное доказательство теоремы 1.

7. Неравенства-следствия

Теоремы об альтернативных системах линейных неравенств можно представить в виде равносильных им утверждений о свойствах (критериях для выявления) неравенств-следствий, исключение которых не влияет на множество решений рассматриваемой системы. Именно в таком виде представлены леммы Минковского–Фаркаша в работах Черникова и Еремина. Такое представление обращает внимание на еще один «прикладной» аспект теорем об альтернативных системах – избавление с их помощью от излишних неравенств.

Это полезно для улучшения свойств исследуемых моделей в т. ч. как способ борьбы с разного рода вырожденностями. Это также конструктивный путь повышения вычислительной эффективности многих алгоритмов, базирующихся на последовательном расширении наборов линейных ограничений. К ним относятся: алгоритмы типа Гомори для решения задач целочисленного программирования; метод Келли и его модификации для решения задач выпуклого программирования и их обобщений; метод свертки Фурье–Черниковой.

Рассмотрим для примера утверждение о неравенстве-следствии для однородных линейных неравенств. В каком случае справедливо утверждение о том, что любое решение системы неравенств

$$Ax \le 0$$

будет обязательно удовлетворять условию

$$(c,\ x) \le 0\,.$$

Здесь A – $m \times n$ матрица, с вектор R^n, x– вектор переменных.

Равносильным является утверждение несовместности системы

$$Ax \le 0,\ \ (c,\ x) > 0\,.$$

А это, согласно теореме 1, равносильно существованию решения у системы

$$A^T u - u_{m+1} c = 0,\ \ u \ge 0,\ \ u_{m+1} > 0$$

переменные, которой составляют вектор $u \in R^m$ и величину u_{m+1}. Отсюда, при $u_{m+1} = 1$ приходим к тому, что вектор c должен выражаться в виде конусной оболочки строк матрицы A: при некотором $u \ge 0$

$$A^T u = c\,.$$

8. Теория двойственности

Действительно, из теорем об альтернативных системах линейных неравенств легко и просто выводится вся теория двойственности в линейной оптимизации [8] и даже в существенно большем объеме, чем обычно приводится в учебниках по линейному программированию. В частности, на базе теории альтернативных систем можно и «по делу» целесообразно вводить в теоремы двойственности линейного программирования конструктивные критерии по выявлению случаев несовместности ограничений прямой и двойственной задач. Несовместность ограничений одной из этих задач равносильна непустоте множества рецессивных направлений другой задачи. Рецессивными здесь названы направления, не выводящие из области допустимых решений (даже если эта область пуста), при которых неограниченно улучшается целевая функция.

В процессе ввода в область допустимых решений одной из задач любым из известных алгоритмов формируются и векторы, которые можно проверять на допустимость множествам рецессивных направлений. Как показывают проведенные А. Ю. Филатовым многочисленные расчеты [13, 14], такая проверка на совместность для алгоритмов внутренних точек очень эффективна – она позволяет обычно выявлять несовместность исходной или двойственной задач сразу на первоначальных итерациях. Кстати сказать, что идея обязательного введения в учебные курсы такого конструктивного критерия несовместности условий исходной и двойственной задач возникла в результате редактирования статьи Н.Н. Астафьева [15], одного из ближайших сподвижников И.И. Еремина.

Проиллюстрируем это на примере двойственных задач линейного программирования:

$$c^T x \to \min,\ \ Ax = b,\ \ x \geq 0; \tag{1}$$

$$b^T u \to \max,\ \ A^T u \leq c\,. \tag{2}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема двойственности для задач линейного программирования. *Для задач (1), (2) возможны четыре ситуации.*

1. Ограничения задачи (1) несовместны, ограничения задачи (2) совместны. Тогда у первой задачи нет оптимальных решений. У задачи (2) нет решений из-за неограниченности сверху ее целевой функции на области допустимых решений, не пусто множество регрессивных направлений задачи (2), удовлетворяющих условиям

$$A^T \upsilon \leq 0,\ \ b^T \upsilon > 0\,. \tag{3}$$

2. Ограничения задачи (2) несовместны, ограничения задачи (1) совместны. Тогда у обеих этих задач нет оптимального решения. У задачи (1) целевая функция неограниченна снизу по множеству ее оптимальных решений. Не пусто множество регрессивных направлений задачи (1), удовлетворяющих условиям

$$As = 0,\ \ s \geq 0,\ \ c^T s < 0. \tag{4}$$

3. Ограничения задачи (1) и задачи (2) несовместны. Тогда обе задачи не имеют оптимальных решений. Не пусты множества рецессивных направлений обоих этих задач.

4. *Обе задачи имеют допустимые по ограничениям решения. Тогда они имеют оптимальные решения. Для любых допустимых решений значения целевой функции задачи (2) не превосходит значения целевой функции задачи (1). Для оптимальных решений и только для них значения целевых функций задач (1), (2) совпадают.*

Первые три случая в теореме двойственности приведенной выше названы И.И. Ереминым несобственными задачами линейного программирования 1-го, 2-го и 3-го рода. Это если считать исходной задачу (1), а задачу (2) считать двойственной. Если в качестве исходной рассматривать задачу (2), то для нее порядок нумерации первых двух несобственных задач поменяется. Приведенная теорема двойственности демонстрирует полную симметрию взаимно-двойственных задач линейного программирования. Это та же симметрия, что отмечалась выше для теорем об альтернативных системах линейных неравенств.

Обе эти задачи удобно и полезно рассматривать как единую самосопряженную (двойственную самой себе) задачу:

$$c^T x - b^T u \to \min;\ \ Ax = b,\ \ x \ge 0,\ \ A^T u \le c.$$

Эти задачи можно представить и просто как проблему поиска решений системы линейных уравнений и неравенств

$$c^T x - b^T u = 0;\ \ Ax = b,\ \ x \ge 0,\ \ A^T u \le c.$$

Такие представления в явной форме иллюстрирует этот факт, что линейное программирование – составная часть теории линейных неравенств. Совпадение значений целевых функций и выполнение условия дополняющей нежесткости для допустимых решений задач (1), (2) являются равносильными (любое из них прямо следует из другого) критериями оптимальности этих решений. Условие дополняющей нежесткости имеет некоторые операционные преимущества. С помощью его можно выявить относительно внутренние точки оптимальных решений, которые имеют особо важные значения в некоторых приложениях.

Проиллюстрируем это на примере двухкритериальных задач. Пусть получено оптимальное решение $\bar{x}$ задачи (1). Требуется на множестве оптимальных решений этой задачи найти оптимальное решение по другому линейному критерию, с вектором коэффициентов целевой функции c^1. Стандартный путь состоит в расширении состава ограничений, в решении задачи

$$(c^1,\ x) \to \min,\ \ Ax = b,\ \ (c,\ x) = (c,\ \bar{x}),\ \ x \ge 0.$$

Если же $\bar{x}$ является относительно внутренней точкой оптимальных решений, то задача упрощается, не надо вводить дополнительного условия, надо только исключить из рассмотрения те компоненты вектора переменных, которые являются нулевыми для вектора $\bar{x}$. То есть можно решать задачу

$$(c^1,\, x) \to \min,\ \ Ax = c,\ \ x \geq 0,\ \ x_j = 0 \ \text{ для }\ j \in J_0,\ \text{где}\ \ J_0\{j\colon \bar{x}_j = 0\}.$$

В приведенной теореме введены критерии для выявления, в процессе решения задач линейного программирования, ситуации отсутствия у нее решения. Для этого достаточно найти вектор $\upsilon \in R^m$ удовлетворяющий условиям (3) или вектор $s \in R^n$ удовлетворяющий условиям (4).

Следует особо подчеркнуть, что в случае, когда обе двойственные задачи (1), (2) имеют противоречивые условия, множества регрессивных направлений у обеих из них не пусты.

Попутно отметим еще один «плюс» от введения двусторонних ограничений на переменные. В этом случае заведомо двойственная задача совместна, поэтому возможен случай несобственной задачи только одного из трех потенциально возможных типов.

Действительно, наличие ограничений снизу на все переменные означает, что у вектора из конуса рецессивных направлений должны быть неотрицательными все компоненты. Ограничения сверху означают не положительность компонент у этого вектора. Следовательно, все компоненты этого вектора нулевые, что противоречит требованию улучшения по нему целевой функции. Множество рецессивных направлений исходной задачи пусто, что означает наличие допустимых решений у двойственной задачи.

Можно отметить и такое вычислительное преимущество модификации задачи (1) введением в нее двусторонних ограничений на переменные. В этом случае легко априори формировать допустимое решение двойственной задачи с максимальным набором неактивных ограничений. Это решение может служить стартовой точкой для использования двойственных алгоритмов внутренних точек.

9. Несобственные задачи линейного программирования

Одним из направлений исследований И.И. Еремина и возглавляемой им школы являлись несобственные, не имеющие решения задачи оптимизации

[15–19]. С математической точки зрения такая ситуация может быть по двум причинам. Во-первых, могут быть несовместны (противоречивы) условия (ограничения) задачи из-за чего у нее нет даже допустимых по ограничениям решений.

Вторая причина – неограниченность снизу (для задачи минимизации) или сверху (для задачи максимизации) целевой функции на множестве допустимых решений. Эти два случая тесно связаны, что мы видим в приведенной выше теореме двойственности.

В публикациях свердловской школы исследования операций предложены общая теория и несколько конкретных способов регуляризации несобственных задач линейного программирования. Приведем для примера один из возможных подходов к регуляризации несобственной задачи линейного программирования второго рода. Введем вектор невязок $y \in R^m$ ограничений равенств этой задачи. Пусть заданы некоторые весовые коэффициенты $h_i > 0,\ i = 1,\dots,m$. Вместо (1) рассмотрим задачу

$$c^T x + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} h_i (y_i)^2 \to \min,\ \ Ax + y = b,\ \ x \ge 0. \tag{5}$$

Не сложно убедиться, что данная задача всегда имеет решение и оно единственное по вектору невязок y

Двойственная к (5) задача имеет следующий вид

$$b^T u - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{h_i} (u_i)^2 \to \max,\ \ A^T u \le c. \tag{6}$$

Отличие от исходной двойственной задачи линейного программирования (2) здесь состоит в том, что в целевую функцию введена квадратичная составляющая.

Отметим одну важную особенность квадратичных составляющих в задачах (5) и (6). В задаче (5) эта составляющая предназначена для минимизации невязок ограничений-равенств в исходной задаче (1). Поэтому в ней весовые коэффициенты h_i должна иметь большие значения.

В задаче (6) квадратичная составляющая сдерживает неограниченность возрастания целевой функции, обуславливает единственность, устойчивость решения. В ней напротив, весовые коэффициенты $\frac{1}{h_i}$ должны иметь небольшие значения. Такого типа симметрия при регуляризации имеет место и во многих других случаях.

Задачи (5), (6) равносильные. На основе решения одной из них не сложно определить решение другой. Вместе с тем эти задачи имеют разный состав, разное количество переменных. Переход от одной задачи к другой может быть полезен для решения большеразмерных задач. Подобные факты относительно проблем поиска нормальных решений систем линейных неравенств и в др. случаях активно использовались и развивались в работах А.Ю. Голикова и Ю.Г. Евтушенко (см., например, [20, 21]).

Часто квадратичные штрафные функции используются с одинаковыми весовыми коэффициентами. Во многих отношениях полезно применение разных весовых коэффициентов [22].

Содержательно несобственные задачи оптимизации могут возникать по разным причинам. Во-первых, это может произойти из-за ошибок в задании исходных данных. Модели могут иметь большие размерности, при которых априори даже почти неизбежны разного типа ошибки в описаниях отдельных фрагментов модели или в задании конкретных числовых характеристик.

Приведу один факт из личного опыта. Как-то через длительный период времени после передачи модели функционирования топливно-энергетического комплекса «серьезного заказчику» меня попросили приехать и пояснить несуразицы, которые проявились в одной из ситуаций. Оказалось, что при кодировке потоки одного из энергоресурсов были представлены в модели не как транспорт между районами Дальнего Востока и Восточной Сибири, а как прямая, физически невозможная транспортная связь по этому энергоресурсу регионов Дальнего Востока с Прибалтикой. Это очень простая, но не сразу заметная ошибка. Эта связь «включалась» только в редких ситуациях и никак не проявила себя на этапе приемо-сдаточных испытаний. Анализ двойственных оценок позволил выявить эту несуразность. Для моделей большой размерности такого сорта ошибки практически неизбежны. Необходимо заранее разрабатывать специальные способы, средства их выявления.

Во-вторых, несовместность условий могут быть и по вполне объективным причинам, когда формулируемые в модели желания превышают формулируемые в той же модели возможности. Что также, увы, бывает не редко. Чрезмерный «оптимизм» наносил огромный вред российской экономике, начиная с периода первой пятилетки.

В обоих указанных случаях расширение исходных и двойственных задач оптимизации путем введения в них векторов возможных невязок ограничений полезно для определения причин несовместности этих ограничений, для выяснения из-за чего именно происходит их несовместность.

В некоторых случаях априори модель специально формируется в условиях несовместимости всех ограничений. Для преодоления несовместимости вводятся возможности возникновения дефицита продукции. Большое разнообразие такого сорта модели рассмотрено в книге [23] Владимира Николаевича Фролова, одного из сподвижников И.И. Еремина. Интересно, что занятие математикой в начальном этапе жизни не помешало Владимиру Николаевичу в 90-х уйти с головой в «рыночную» стихию и стать одним из крупных екатеринбургских «банкиров».

Мне приходилось заниматься созданием такого типа модели – оптимизации функционирования топливно-энергетического комплекса в условиях крупных возмущений [12]. В этой модели были введены возможности появления дефицита энергоресурсов. Физически это означало остановку предприятий потребителей энергоресурсов. При этом потребители ранжировались по степени их важности после крупномасштабного возмущения. Проблема сводилась к решению большеразмерной задачи многокритериальной линейной оптимизации с лексикографически упорядоченными целевыми функциями. Эту задачу удобно было представить в виде единой задачи линейного программирования, у которого целевая функция является взвешенной суммой исходных критериев. Чтобы такая свертка обеспечивала необходимую лексекографическую упорядоченность критериев необходимо использование набора «возрастающих» весов. В целях вычислительной устойчивости и удобств анализа решения разброс весов должен быть достаточным, чтобы гарантировать лексекографическую упорядоченность, но по возможности минимальным. Выбор таких весов, в полном соответствии с теорией разрабатывавшейся И.И. Ереминым [1, 2], определялся исходя из анализа только коэффициентов матрицы ограничений.

Здесь приведен далеко не полный перечень тем, которые хотелось бы обсудить, рассматривая научную деятельность И.И. Еремина. В частности, необходимо хотя бы упомянуть следующие направления исследований, где Иваном Ивановичем Ереминым получены интересные результаты, нуждающиеся в специальном детальном рассмотрении:

1) бесконечномерные задачи линейного и выпуклого программирования [4, 5];

2) многокритериальная парето-оптимизация и лексикографическая оптимизация [1, 2];

3) алгебра кусочно-линейных функций и кусочко линейное программирование [1];

4) фееровские процессы [1, 24-26].

В некоторой мере фееровские процессы будут рассмотрены в [27].

Литература

1. **Еремин И.И.** Теория линейной оптимизации. – Екатеринбург: Изд-во «Екатеринбург», 1999, 312 с.
2. **Еремин И.И.** Двойственность для Парето – последовательных задач линейного программирования // Труды Российской Ассоциации математического программирования. Международной академии нелинейных наук, Российской ассоциации искусственного интеллекта: Оптимизация управления, интеллект». – Иркутск: Ир ВЦ СО РАН, 1995, №1, С. 3-19.
3. **Эмстер К.Х.**, Лейнгард Р., Шойдле М., Докат Г. Введение в нелинейное программирование.-М.: Наука, 1985, 264 с.
4. **Еремин И.И.**, Астафьев Н.Н. Введение в теорию линейного и выпуклого программирования. – М.: Наука, 1970, 191 с.
5. **Еремин И.И.**, Ватолин А.А. Двойственность для несобственных бесконечномерных задач линейного и выпуклого программирования // Методы аппроксимации несобственных задач математического программирования. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1984, С. 3–19.
6. **Черников С.И.** Линейные неравенства. – М.: Наука, 1968, 488 с.
7. **Глушков В.М.** Прошлое, устремленное в будущее. К 90-летию со дня рождения. Киев: Академпереодика., 2015, 290 с.
8. **Зоркальцев В.И.**, Киселева М.А. Системы линейных неравенств (уч. пособие). – Иркутск: ИГУ, 2008, 127 с.
9. **Дикин И.И.**, Зоркальцев В.И. Итеративное решение задач математического программирования: алгоритмы метода внутренних точек. Новосибирск: Наука, 1980.
10. **Гейл Д.** Теория линейных экономических моделей. – М.: Изд-во иностр. лит., 1963, 418 с.
11. **Малоземов В.Ш.** Линейная алгебра без определителей. Квадратичная функция. – СПб: СПбУ, 1997, 80 с.
12. **Зоркальцев В.И.** Методы прогнозирования и анализ эффективности функционирования системы топливоснабжения. – М.: Наука, 1988, 144 с.
13. **Филатов А.Ю.** Развитие алгоритмов внутренних точек и их приложения к системам неравенств: авторск. дис. к.ф.-м.н. – Иркутск: ИГУ, 2001, 19 с.
14. **Зоркальцев В.И.** Решение систем линейных неравенств алгоритмами внутренних точек // Современные методы оптимизации и их приложения к моделям энергетики: сб. научн. Тр. – Новосибирск: Наука, 2003. – С. 110–141.

15. **Астафьев Н.Н.** Некоторые элементарные преобразования двойственных задач линейного программирования. Попарная альтернативность // Современные методы оптимизации и их приложения к моделям энергетики: сб. науч. тр. – Новосибирск: Наука, 2003, С. 46–65.

16. **Еремин И.И.** Двойственность для несобственных задач линейного и выпуклого программирования // Докл. АН СССР, 1981, т. 256, № 2, с. 272–276.

17. **Еремин И.И.**, Мазуров В.Д., Астафьев Н.Н. «Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования». – М.: Наука, 1983, 336 с.

18. **Еремин И.И.** Противоречивые модели оптимального планирования. – М.: Наука, 1988, 160 с.

19. **Еремин И.И.** Противоречивые модели экономики. – Свердловск: Среднеуральское книжное издательство, 1986, 96 с.

20. **Голиков А.И.**, Евтушенко Ю.Г. Двойственный подход к решению систем линейных равенств и неравенств // Труды XII Байкальской международной конф. «Методы оптимизации и их приложения». – Иркутск, ИГУ, 2001. – С. 91–99.

21. **Голиков А.И.,** Евтушенко Ю.Г. Новый метод решения систем линейных равенств и неравенств // Доклады РАН, 2001, Т. 381, №4, с. 444-447.

22. **Зоркальцев В.И.** Метод наименьших квадратов: геометрические свойства, альтернативные подходы, приложения. – Новосибирск: ВО «Наука» Сиб. Изд. Фирма. 1995, 220 с.

23. **Фролов В.Н.** Оптимизация плановых программ при согласованных ограничениях. – М.: Наука, 1986, 165 с.

24. **Еремин И.И.** Метод фееровских приближений в выпуклом программировании // Математические заметки, 1968, №2.

25. **Еремин И.И.,** Мазуров В.Д. «Нестационарные процессы математического программирования». – М.: Наука, 1974, 287 с.

26. **Еремин И.И.,** Попов Л.Д. Фееровские итерационные процессы применительно к несовместным системам линейных неравенств и несобственным задачам линейного программирования // Современные методы оптимизации и их приложения к моделям энергетики: сб. науч. тр. – Новосибирск: Наука, 2003, с. 86–109.

27. **Зоркальцев В.И.** Теорема Пифагора. – ИСЭМ СО РАН, 2017, 25 с.

Научное издание

Зоркальцев Валерий Иванович

Иван Иванович Еремин
и линейные неравенства

Утверждено к печати Институтом систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН

Подписано к печати 7 февраля 2017 г.

Формат 70*80*1/16
Печ. л. 1,3.
Тираж – 200 экз.
Заказ N 10

Отпечатано на ризографе ИСЭМ СО РАН
664033, Иркутск, ул. Лермонтова, 130