ДВОЙСТВЕННЫЕ БАРЬЕРЫ И РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ В АНАЛИЗЕ НЕСОБСТВЕННЫХ ЗАДАЧ ЛП 1-ГО РОДА[1]

Л.Д. Попов

Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург
Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б.Н.Ельцина
e-mail: popld@imm.uran.ru

Пусть имеются задача линейного программирования (ЛП) в каноническом формате

$$\min\{(c,x)\colon Ax=b,\ x\geq 0\} \tag{1}$$

и двойственная к ней задача

$$\max\{(b,y)\colon A^T y\leq c\}, \tag{2}$$

причем известно, что допустимая область Y задачи (2) не пуста. Это означает, что задача (1) может оказаться либо разрешимой (если ее ограничения совместны), либо несобственной 1-го рода [1] (если ее ограничения противоречивы). В последнем случае ее можно привести к разрешимому виду путем корректировки правых частей ее ограничений.

Вслед за [1] погрузим исходную задачу в параметрическое семейство задач вида

$$\min\{(c,x)\colon Ax=b-u,\ x\geq 0\} \tag{3}$$

и обозначим через Ω совокупность тех u, при которых ограничения (3) совместны (соответственно, сама задача (3) разрешима). Определим вектор оптимальной коррекции как

$$u_0 := \arg\ \min\{\|u\|\colon u\in\Omega\};$$

здесь $\|\cdot\|$ — евклидова норма. Понятно, что в собственном случае $u_0=0$.

Пусть X_0 — оптимальное множество задачи (3), отвечающее $u=u_0$; $e=(1,\ldots,1)$, $A_1,\ldots,A_n$ — столбцы матрицы A. Чтобы совместить процесс корректировки исходной задачи с процессом оптимизации ее целевого критерия, сформируем для задачи (2) обычную логарифмическую барьерную функцию, дополненную стандартным квадратичным регуляризирующим слагаемым:

$$B(\varepsilon;y)=(b,y)+\varepsilon_1\sum_{i=1}^{n}\ln(c_i-(A_i,y))-\frac{\varepsilon_2}{2}\|y\|^2. \tag{4}$$

Теорема. *В предположении телесности области Y для каждой пары $\varepsilon=(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2)>0$ найдется единственный вектор $\hat{y}_\varepsilon$, принадлежащий внутренности Y и доставляющий максимум функции* (4), *причем имеет место сходимость:*

$$\hat{x}_\varepsilon := \varepsilon_1 \mathrm{diag}\Big(c-A^T\hat{y}_\varepsilon\Big)^{-1}e\to X_0,\qquad \varepsilon_2\hat{y}_\varepsilon\to u_0$$

при $\varepsilon=(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2)\to+0$.

Заметим, что для максимизации гладкой функции $B(\varepsilon;\cdot)$ можно применять методы второго порядка.

ЛИТЕРАТУРА

1. И.И. Еремин, Вл.Д. Мазуров, Н.Н. Астафьев. *Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования.* М.: Наука, 1983. –336 с.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 13-01-00210, 13-07-00181) и программ президиума УрО РАН (проекты 12-П-1-1016, 12-С-1-1017/1, 12-П-1-1023 и 12-П-1-1034).