Метод отсечений с обновлением аппроксимирующих множеств и его комбинирование с другими алгоритмами

И.Я. Заботин, Р.С. Яруллин

Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань
e-mail: IYaZabotin@mail.ru, YarullinRS@gmail.com

Предлагается метод условной минимизации, относящийся к классу методов отсечений с аппроксимацией надграфика целевой функции (напр., [1]). Одна из принципиальных его особенностей заключается в возможности периодического отбрасывания отсекающих плоскостей, что удобно с практической точки зрения.

Решается задача минимизации выпуклой функции $f(x)$ на выпуклом замкнутом множестве $D \subset R_n$. Предлагаемый для ее решения метод заключается в следующем. Для каждого $j \in J = \{1, \ldots, m\}$ выбирается точка $v^j \in intE$, где $E = \{(x, \gamma) \in R_{n+1} : x \in R_n, \gamma \geq f(x)\}$, строится выпуклое замкнутое множество $M_0 \subset R_{n+1}$, содержащее E, задаются числа $\varepsilon_k > 0$, $k \in K = \{0, 1, \ldots\}$, $\varepsilon_k \to 0$, $k \to \infty$, $\bar{\gamma} \leq f^* = \min\{f(x) : x \in D\}$, полагается $i = 0$, $k = 0$.

1. Отыскивается решение (y_i, γ_i), где $y_i \in R_n$, $\gamma_i \in R_1$, задачи

$$\min\{\gamma : (x, \gamma) \in M_i,\ x \in D,\ \gamma \geq \bar{\gamma}\}.$$

2. Если $f(y_i) - \gamma_i > \varepsilon_k$, то полагается $Q_i = M_i$, $u_i = y_i$. В противном случае выбираются выпуклое замкнутое множество $Q_i \subset R_{n+1}$, содержащее E, и такая точка $x_k \in D$, что $f(x_k) \leq f(y_i)$, полагается $\sigma_k = \gamma_i$, $u_i = x_k$, значение k увеличивается на единицу.

3. Для каждого $j \in J$ в интервале $(v^j, (u_i, \gamma_i))$ определенным образом выбирается точка $z_i^j \notin intE$ и строится конечное множество A_i^j нормированных обобщенно-опорных в точке z_i^j к множеству E векторов.

4. Полагается $M_{i+1} = Q_i \bigcap\limits_{j \in J} \{w \in R_{n+1} : \langle a, w - z_i^j \rangle \leq 0 \ \forall a \in A_i^j\}$, значение i увеличивается на единицу, и следует переход к п. 1.

Обоснована теорема оптимальности для точки y_i. Доказано, что наряду с последовательностью вспомогательных точек y_i, $i \in K$, методом будет построена также основная последовательность $\{x_k\}$, $k \in K$, и для последней справедливо равенство $\lim\limits_{k \in K} f(x_k) = f^*$.

При каждом $k \in K$ имеют место неравенства $\sigma_k \leq f^* \leq f(x_k)$, а в случае сильной выпуклости $f(x)$ получена оценка $||x_k - x^*|| \leq \sqrt{\varepsilon_k / \mu}$, где x^* – решение задачи, а μ – константа сильной выпуклости.

Обсуждаются способы задания чисел ε_k и множеств M_0, Q_i, A_i^j. Показано, как за счет выбора множеств Q_i, отличных от M_i, в частности, $Q_i = R_{n+1}$, можно обновлять аппроксимирующие множества M_{i+1}, отбрасывая любое число накопленных ранее отсекающих плоскостей. Подчеркнем, что условие выбора точек x_k позволяет при $x_k \neq y_i$ комбинировать данный метод с другими алгоритмами, сохраняя сходимость, а также использовать для нахождения x_k параллельные вычисления.

ЛИТЕРАТУРА

1. В.П. Булатов *Методы погружения в задачах оптимизации.* Новосибирск: Наука, 1977, 161 с.