О СХОДИМОСТИ ЭКСТРАГРАДИЕНТНЫХ МЕТОДОВ ЗА КОНЕЧНОЕ ЧИСЛО ИТЕРАЦИЙ[1]

А.В. Зыкина, Н.В. Меленьчук

Омский государственный технический университет, Омск
e-mail: avzykina.mail.ru, melenchuknv@gmail.com

В данной работе показывается конечность числа итераций экстраградиентных методов в нелинейном случае.

Решить *вариационное неравенство* – значит найти вектор $z^* \in \Omega$, удовлетворяющий условиям:

$$\langle H(z^*), z - z^* \rangle \geq 0, \quad \forall\, z \in \Omega, \tag{1}$$

где $H : R^n \to R^n$, Ω – замкнутое, выпуклое множество, $\Omega \subset R^n$, $z^* \in \Omega^*$ – множество решений вариационного неравенства, $\Omega^* \subset \Omega$.

Сходимость двухшагового экстраградиентного метода к решению $z^* \in \Omega^*$ вариационного неравенства (1) с монотонным оператором $H(z)$, удовлетворяющим условию Липшица с константой $L > 0$, обеспечивается величиной шага α из условия $0 < \alpha < \frac{1}{\sqrt{3}L}$ [1].

Рассмотрим дополнительное условие на непрерывный монотонный оператор $H(z)$ – *условие остроты*, состоящее в следующем [2] : для вариационного неравенства (1) при некотором $\gamma > 0$ выполняется условие

$$\langle H(z), z - z^*(z) \rangle \geq \gamma \|z - z^*(z)\|, \quad \forall\, z \in \Omega, \quad z^*(z) = P_{\Omega^*}(z). \tag{2}$$

Более строгое условие остроты $\langle H(z), z - z^* \rangle \geq \gamma \|z - z^*\|$, предполагающее выполнение единственности решения $z^* \in \Omega$, введено в [3]. Условие остроты (2) для вариационных неравенств (1) с потенциальным отображением $H(z) = \nabla f(z)$ является известным условием острого минимума $f(z) - f(z^*(z)) \geq \gamma \|z - z^*(z)\|$, $\forall\, z \in \Omega$, для соответствующей задачи выпуклой оптимизации с выпуклым замкнутым множеством решений $\Omega^* \subset \Omega$ [4].

При выполнении условия остроты (2) для вариационного неравенства (1) показана сходимость последовательности $\{z^k\}$, определяемой рекуррентными соотношениями двухшагового экстраградиентного метода, к решению $z^* \in \Omega^*$ вариационного неравенства (1) за конечное число итераций.

Аналогичный результат при выполнении условия остроты получается в одношаговом экстраградиентном методе [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. А.В. Зыкина, Н.В. Меленьчук *Двухшаговый экстраградиентный метод для вариационных неравенств.* – Изв. вузов. Математика. – 2010, № 9, с. 82-85.
2. I.V. Konnov *Combined relaxation methods for variational inequalities.* Berlin: Springer-Verlag, 2001, 184 с.
3. А.С. Антипин *Градиентный и экстраградиентный подходы в билинейном равновесном программировании.* М.: ВЦ РАН, 2001, 69 с.
4. Б.Т. Поляк *Введение в оптимизацию. Изд. 2-е, испр. и доп.* М.: ЛЕНАРД, 2014, 393 с.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 12-07-00326-а)