1-d и 2-d ЭЛЛИПСОИДЫ В ВЫПУКЛОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ

П.И. Стецюк

Институт кибернетики им. В.М. Глушкова, Киев
e-mail: stetsyukp@gmail.com

В докладе обсудим вопрос "построения алгоритма, который по своей практической эффективности не уступал бы r-алгоритму и был столь же хорошо обоснован как метод эллипсоидов", поставленный Н.З. Шором в 1982 году. Метод эллипсоидов использует оператор растяжения пространства $R_\alpha(\xi) = I + (\alpha - 1)\xi\xi^T$. С его помощью эллипсоид минимального объема, содержащий полушар в n-мерном евклидовом пространстве, преобразовывается в новый шар за одно растяжение пространства (1d-эллипсоид).

Лемма [1]. *Пусть B_k – невырожденная $n\times n$-матрица и такая, что $\|B_k^{-1}(x_k - x^*)\| \le r$; g_1 и g_2 – n-мерные векторы, такие, что $(x_k - x^*, g_1) \ge 0$ и $(x_k - x^*, g_2) \ge 0$. Если выполняется условие $-\|B_k^T g_1\|\|B_k^T g_2\| < (B_k^T g_1, B_k^T g_2) < 0$ и матрица B пересчитывается по правилу*

$$B_{k+1} = B_k R_{\beta_1}\left(\frac{\xi - \eta}{\|\xi - \eta\|}\right) R_{\beta_2}\left(\frac{\xi + \eta}{\|\xi + \eta\|}\right), \quad \xi = \frac{B_k^T g_1}{\|B_k^T g_1\|},\ \eta = \frac{B_k^T g_2}{\|B_k^T g_2\|},$$

где $\beta_1 = \sqrt{1 + (\xi, \eta)}$ и $\beta_2 = \sqrt{1 - (\xi, \eta)}$, то матрица B_{k+1} – невырожденная и обладает такими свойствами:

(i) $\|B_{k+1}^{-1}(x_k - x^*)\| \le r$; (ii) $\det(B_{k+1}) = \det B_k \sqrt{1 - (\xi, \eta)^2}$; (iii) $(B_{k+1}^T g_1, B_{k+1}^T g_2) = 0$.

Лемма имеет следующую интерпретацию. Свойство (i) означает локализацию точки x^* в очередном 2d-эллипсоиде, а свойство (ii) – уменьшение его объема в сравнении с объемом предыдущего эллипсоида. Свойство (iii) позволяет использовать антиовражный прием по типу того, который используется в r-алгоритмах. Оно означает, что субградиенты с тупым углом в текущем пространстве переменных стают ортогональными в преобразованном пространстве, что позволяет улучшить поверхности уровня овражной функции. Коэфициенты растяжения пространства в направлении разности нормированных субградиентов и в направлении суммы нормированных субградиентов определяются углом между субградиентами. Чем более тупым будет этот угол, тем большим будет коэффициент растяжения пространства в направлении разности двух нормированных субградиентов.

2d-эллипсоид можно использовать при построении ускоренных вариантов методов эллипсоидов для широкого класса задач: задача выпуклого программирования, задача отыскания седловых точек выпукло-вогнутых функций, частные случаи задач решения вариационных неравенств, специальные классы задач линейной и нелинейной дополнительности. Для этих методов можно обеспечить скорость сходимости, близкую к r-алгоритмам. Это подтверждают субградиентные методы с преобразованием пространства для нахождения точки минимума выпуклой функции при априорном знании значения функции в точке минимума [2]. Они оказались эффективными при работе с овражными функциями.

ЛИТЕРАТУРА

1. П.И. Стецюк *r-Алгоритмы и эллипсоиды.* – Кибернетика и системный анализ. – 1996, №1, с. 113–134.
2. П.И. Стецюк *Методы эллипсоидов и r-алгоритмы.* Кишинеу: Эврика, 2014, 488 с.