XVI Байкальская международная
школа-семинар

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

30 июня – 6 июля 2014 г.
о. Ольхон, Байкал

Иркутск
2014

Институт систем энергетики им. Л.А.Мелентьева СО РАН

Лаборатория алгоритмов и технологий сетевых структур национального исследовательского университета «Высшая школа экономики», Нижний Новгород

Иркутский государственный университет

Российский фонд фундаментальных исследований

XVI Байкальская международная школа-семинар

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Тезисы докладов

30 июня – 6 июля 2014 г.
о. Ольхон, Байкал

Иркутск
2014

УДК 519.6+519.7+519.8

Тезисы докладов XVI Байкальской международной школы-семинара "Методы оптимизации и их приложения". Иркутск, ИСЭМ СО РАН. – 2014. – 184 с.

ISBN 978-5-93908-139-9.

В данном томе представлены работы, посвященные теории и методам линейного, выпуклого, нелинейного программирования, дискретной и глобальной оптимизации, многокритериальной оптимизации и теории игр, а также программам и программным комплексам для решения различных задач математического программирования.

Для научных работников, студентов и аспирантов, специализирующихся в соответствующих областях прикладной математики.

Ответственные за выпуск: *Колосницын А.В.*
Минарченко И.М.
д.ф.-м.н. Хамисов О.В.

ISBN 978-5-93908-139-9

Школа-семинар посвящается 75 летию со дня рождения проф. О.В. Васильева (1939-2002).

Васильев Олег Владимирович — заслуженный профессор Иркутского государственного университета, известный и признанный ученый-математик, эрудированный и квалифицированный преподаватель высшей школы, незаурядный и выдающийся организатор и созидатель в области науки и образования, яркая и творческая личность, достойный обладатель целого ряда почетных званий и степеней: доктор физико-математических наук, профессор по кафедре методов оптимизации; заслуженный деятель науки и техники Российской Федерации; член-корреспондент Российской Академии естественных наук; член Американского математического общества; заслуженный деятель науки Бурятии; заслуженный деятель народного образования Монголии.

Административная деятельность Олега Владимировича отмечена следующими вехами: заведующий кафедрой вычислительной математики; основатель и заведующий кафедрой методов оптимизации; декан математического факультета ИГУ, основатель и директор Института математики и экономики ИГУ; председатель специализированного Совета по защите диссертаций при ИГУ. Государственные награды: медаль ордена «За заслуги перед Отечеством» 2-й степени; медаль «За трудовую доблесть».

СОДЕРЖАНИЕ

ПЛЕНАРНЫЕ ДОКЛАДЫ

ТЕРМИНАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ГРАНИЧНЫМИ ЗАДАЧАМИ[1]

А.С. Антипин

Вычислительный центр Российской Академии Наук
e-mail: asantip@yandex.ru

Напомним постановку задачи о вычислении неподвижной точки экстремельного отображения: найти неподвижную точку $v^* \in W$, удовлетворяющую экстремальному включению

$$v^* \in \text{Argmin}\{\Phi(v^*, w) + \varphi(w) |\ w \in W \subset R^n\}. \tag{1}$$

здесь $(v, w) \in W \times W \subset R^n \times R^n$, W – выпуклое замкнутое ограниченное множество. Функция $\Phi(v, w) + \varphi(w)$ – выпуклая по w при любом $v \in W$. В регулярном случае экстремальное отображение (1) всегда имеет неподвижную точку. Эта постановка включает в себя многие известные конечномерные (статические) задачи, такие как задачи выпуклого и равновесного программирования, седловые задачи, игры n-лиц с равновесием по Нэшу, многокритериальные равновесные задачи, седловые игры, модели экономического равновесия, вариационные неравенства. Перечисленные задачи интерпретируются как как математические модели для объектов из различных областей науки и практики. Предполагается, что объекты погружены в среду характеристики (свойства) которой меняются со временем. Измененения свойств среды описываются с помощью линейной управляемой динамической системы. Объекты и их математические модели также меняются вместе с изменением среды. В этой ситуации рассматривается задача перевода объекта из одного состояния (начальное) в другое (терминальное) за конечный промежуток времени. .

$$v_0^* \in \text{Argmin}\{\Phi_0(v_0^*, v_0) + \varphi_0(v_0) \mid\ A_0 v_0 \leq a_0\}, \tag{2}$$

$$v_1^* \in \text{Argmin}\{\Phi_1(v_1^*, v_1) + \varphi_1(v_1) \mid\ A_1 v_1 \leq a_1, \tag{3}$$

$$\frac{d}{dt} v(t) = D(t)v(t) + B(t)u(t),\ t_0 \leq t \leq t_1, \tag{4}$$

$$v(t_0) = v_0^*,\ v(t_1) = v_1^*,\ u(t) \in U\},$$

Здесь множества $W_i, i = 0, 1$, из (1) заданы в виде функциональных ограничений типа неравенств. Управления для простоты рассуждений берутся из шара гильбертова пространства. $U = \{u(\cdot) \in L_2^r[t_0, t_1] \mid \parallel u(\cdot) \parallel_{L_2^r}^2 \leq \mathrm{C}^2\}$, $D(t), B(t)$ – $n \times n, n \times r$-матричные функции, непрерывно зависящие от времени, A_0, A_1 – фиксированные матрицы, a_0, a_1 – заданные векторы. В случае, если $\Phi_0(v_0^*, v_0) \equiv 0, \Phi_1(v_1^*, v_1) \equiv 0$, то (2),(3) переходят в задачи выпуклого программирования.

Динамическая система (2)-(4) рассматриввается в гильбертовом пространстве. Последнее означает, что с точностью до множества меры нуль все значения функции-управления $u(\cdot)$ принадлежат множеству $U \subseteq L_2^r[t_0, t_1]$. В случае, когда управления пробегают все множество $u(\cdot) \in U$, дифференциальная система (4) порождает траектории $v(t), t \in [t_0, t_1]$, которые являются абсолютно непрерывными функциями. Левые $v(t_0) = v_0$ и правые

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 12–01–00783) и Программы государственной поддержки ведущих научных школ (проект НШ-4640.2014.1.)

$v(t_1) = v_1$ концы траекторий описывают множество начальных и терминальных условий. В линейном случае эти множества являются подпространствами из R^n, которые, в частности, могут совпадать со своими пространствами.

Система (2)-(4), в докладе, трактуется как задача выпукло-вогнутого программирования сформулировыанная на прямом произведении пространств $R^n \times L_2^n[t_0, t_1] \times L_2^r[t_0, t_1] \times R^n$. В этой ситуации естественно вводятся две линеаризованные функции Лагранжа (прямая и двойственная), которые имеют вид [1]

$$\mathcal{L}(v_0^*, v_1^*, p_0, p_1, \psi(\cdot); v_0, v_1, v(\cdot), u(\cdot)) = \langle \nabla_2 \Phi_0(v_0^*, v_0^*) + \nabla \varphi_0(v_0^*), v_0 \rangle$$

$$+\langle p_0, A_0 v_0 - a_0 \rangle + \langle \nabla_2 \Phi_1(v_1^*, v_1^*) + \nabla \varphi_1(v_1^*), v_1 \rangle + \langle p_1, A_1 v_1 - a_1 \rangle$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} \langle \psi(t), D(t)v(t) + B(t)u(t) - \frac{d}{dt} v(t) \rangle dt, \tag{5}$$

и

$$\mathcal{L}^T(v_0^*, v_1^*, p_0, p_1, \psi(\cdot); v_0, v_1, v(\cdot), u(\cdot)) =$$

$$\langle \nabla_2 \Phi_0(v_0^*, v_0^*) + \nabla \varphi_0(v_0^*) + A^T p_0 + \psi_0, v_0 \rangle + \langle -a_0, p_0 \rangle$$

$$+\langle \nabla_2 \Phi_1(v_1^*, v_1^*) + \nabla \varphi_1(v_1^*) + A^T p_1 - \psi_1, v_1 \rangle + \langle -a_1, p_1 \rangle$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} \langle D^T(t)\psi(t) + \frac{d}{dt}\psi(t), v(t) \rangle + \int_{t_0}^{t_1} \langle B^T(t)\psi(t), u(t) \rangle dt \tag{6}$$

для всех $p_0, p_1 \in R_+^m$, $\psi(\cdot) \in \Psi_2^n[t_0, t_1]$, $(v_0, v_1) \in R^n \times R^n$, $(v(\cdot), u(\cdot)) \in AC^n[t_0, t_1] \times U$, где $AC^n[t_0, t_1]$ – линейное многообразие абсолютно непрерывных функций из $L_2^n[t_0, t_1]$, $\Psi_2^n[t_0, t_1]$ – класс абсолютно непрерывных функций из пространства $(L_2^n[t_0, t_1])^T$, сопряженного к пространству прямых переменных. Линейное многообразие $AC^n[t_0, t_1]$ является всюду плотным в $L_2^n[t_0, t_1]$, т.е. замыкание многообразия $AC^n[t_0, t_1]$ по норме $L_2^n[t_0, t_1]$ совпадает с $L_2^n[t_0, t_1]$. Здесь v_0^*, v_1^* - параметры линеаризованных функций Лагранжа.

Обе функции Лагранжа имеют одну и туже седловую точку $(p_0^*, p_1^*, \psi^*(\cdot); v_0^*, v_1^*, v^*(\cdot), u^*(\cdot))$ компоненты которой образуют прямое $(v_0^*, v_1^*, v^*(\cdot), u^*(\cdot))$ и двойственное $(p_0^*, p_1^*, \psi^*(\cdot))$ решения задачи (2)-(4).

В докладе представлен седловой (относительно прямых и двойственных переменных) итеративный метод для вычисления седловой точки обеих функций Лагранжа. Доказана сходимость процесса к седловой точки по всем компонентам прямого и двойственного решений исходной задачи термиминального (оптимального) управления [1],[2]. Точнее, слабая сходимость по управлениям, сильная по фазовым и сопряженным траекториям, а также по терминальным седловым переменным краевых задач, соответствующим концам временного интервала.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.С. Антипин. *Терминальное управление краевыми моделями.* — Журнал вычисл. матем. и мат. физ. — 2014, т. 54, №2, с. 257-285.
2. А.С. Антипин, Е.В. Хорошилова. *Терминальное управление краевыми задачами выпуклого программирования.* — Оптимизация и приложения. — 2013, Вычислительный центр РАН. с. 17-55.

SCATTERING AND INVERSE SCATTERING FOR A LEFT-DEFINITE STURM-LIOUVILLE PROBLEM

B. M. Brown

Computer Science & Informatics, Cardiff University
e-mail: Malcolm.Brown@cs.cardiff.ac.uk

This talk reports on a scattering and an inverse scattering theory for the Sturm–Liouville equation with a weight that changes sign, but with non negative potential. The crucial ingredient of the approach is a generalized transform built on the Jost solutions of the problem and hence termed the Jost transform and the associated Paley–Wiener theorem linking growth properties of transforms with support properties of functions. One motivation for this investigation comes from the Camassa–Holm equation for which the solution of the Cauchy problem can be achieved by the inverse scattering transform of a certain Sturm-Liouville problem.

ON EFFICIENTLY COMBINING LIMITED–MEMORY AND TRUST–REGION TECHNIQUES

Oleg Burdakov†, Lujin Gong, Ya-xiang Yuan, Spartak Zikrin

†*Linkoping University, Sweden*
e-mail: oleg.burdakov@liu.se

Limited memory quasi-Newton methods and trust-region methods represent two efficient approaches used for solving unconstrained optimization problems. A straightforward combination of them deteriorates the efficiency of the former approach, especially in the case of large-scale problems. For this reason, the limited memory methods are usually combined with a line search. We show how to efficiently combine limited memory and trust-region techniques. One of our approaches is based on the eigenvalue decomposition of the limited memory quasi-Newton approximation of the Hessian matrix. The decomposition allows for finding a nearly-exact solution to the trust-region subproblem defined by the Euclidean norm with an insignificant computational overhead compared with the cost of computing the quasi-Newton direction in line-search limited memory methods. The other approach is based on two new eigenvalue-based norms. The advantage of the new norms is that the trust-region subproblem is separable and each of the smaller subproblems is easy to solve. We show that our eigenvalue-based limited-memory trust-region methods are globally convergent. Moreover, we propose improved versions of the existing limited-memory trust-region algorithms. We presented results of numerical experiments demonstrating the efficiency of our approach which is competitive with line-search versions of the L-BFGS method.

DOMINATING SETS IN GRAPHS: OPTIMIZATION AND EXTENSIONS

S. Butenko

Texas A&M University, College Station, TX
e-mail: butenko@tamu.edu

This talk will discuss several variations of dominating sets in graphs that are motivated by applications in wireless networks. Given a simple undirected graph, the minimum connected dominating set problem is to find a minimum cardinality subset of vertices D inducing a connected subgraph such that each vertex outside D has at least one neighbor in D. Approximations of minimum connected dominating sets are often used to represent a virtual routing backbone in wireless networks. We consider the following optimization problems dealing with dominating sets in wireless networks:

- The edge-weighted bottleneck connected dominating set problem, which seeks a minimum edge weight in the graph such that the corresponding bottleneck subgraph has a connected dominating set of size k [3, 5].
- The problem of finding a minimum dominating set of restricted diameter, which bounds the distance that information must travel through the network [1].
- A fault-tolerant version of the minimum dominating set problem that, in addition to restricting the diameter enforces a desired connectivity for the set [2].

In addition, we will show how the concept of domination can be used to develop efficient approximation algorithms and scale-reduction procedures for other important problems in wireless networks modeled as unit-disk graphs [4].

REFERENCES

1. A. Buchanan, J. Sung, V. Boginski, and S. Butenko *On connected dominating sets of restricted diameter.* — European Journal of Operational Research, vol. 236, 2014, pp. 410-418.
2. A. Buchanan, J. Sung, S. Butenko, and E. L. Pasiliao *An integer programming approach for fault-tolerant connected dominating sets.* — INFORMS Journal on Computing, Submitted.
3. S. Butenko, S. Kahruman-Anderoglu, and O. Ursulenko *On connected domination in unit ball graphs.* — Optimization Letters, vol. 5, 2011, pp. 195-205.
4. J. Pattillo, Y. Wang, and S. Butenko *Approximating 2-cliques in unit disk graphs.* — Discrete Applied Mathematics, vol. 166, 2014, pp. 178-187.
5. A. Verma and S. Butenko *A distributed approximation algorithm for the bottleneck connected dominating set problem.* — Optimization Letters, vol. 6, 2012, pp. 1583-1595.

Optimal control methods for conservation biology: a case of non-harvesting utility[1]

Olga Vasilieva

Universidad del Valle, Cali, Colombia
e-mail: olga.vasilieva@correounivalle.edu.co

The main purpose of this paper is to retrace the evolution of mathematical models focused on relation and interaction between economic growth, sustainable development and natural environment conservation. The starting point is a simple model of common-property harvesting, where renewable resource grows according to the course of nature. Further, this model is amended with defensive expenditures that favor the species growth. Apart from solely harvesting models, a transition model comprising both harvesting and non-harvesting values of wild biological species is presented. Preponderantly, all these models are designed to seek for long-term optimal and/or sustainable strategies for harvesting, where species preservation guarantees the profit stability for future generations and thus contributes to the economic development.

On the other hand, there is a group of purely non-harvesting models where anthropic activities and economic growth may have positive or negative impact on the natural evolution of wild species. Several scholars have proved that optimal strategies that are relatively good for harvesting purposes are not merely transferrable to the context of conservation of wildlife biological species with no harvesting value. However, existence of long-term conservation policies for all biological species (with or without harvesting value) cannot be guaranteed without having relatively large species populations at initial time. Therefore, all such strategies are incapable to enhance scarce population of endangered species and save them from eventual (local) extinction.

As an alternative, policy makers are compelled to design and implement short-term defensive actions aimed at enhancement of wildlife species populations. The latter is referred to as an emergent area of research in conservation biology.

[1]Supported by IRD-PEERS Project *"Modèles d'optimisation et de viabilité en écologie et en èconomie"*, Université Paris-Est (France) and Universidad del Valle (Colombia).

О СУЩЕСТВОВАНИИ НЕБЛОКИРУЕМЫХ ДЕЛЕЖЕЙ В НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ НЕЧЕТКИХ КООПЕРАТИВНЫХ ИГР [1]

В.А. Васильев

Институт математики им. С.Л.Соболева, Новосибирск
e-mail: vasilev@math.nsc.ru

В докладе анализируются так называемые $\mathcal{S}$-представления нечетких кооперативных игр, позволяющие в ряде случаев значительно упростить получение условий существования неблокируемых дележей таких игр. Большое внимание уделяется играм, для которых удается получить простое формульное описание их $\mathcal{S}$-представлений. В частности, найдены аналоги условий суперлинейности, обеспечивающие непустоту ядер непрерывных однородных нечетких игр.

Введенное автором $\mathcal{S}$-представление v^* нечеткой кооперативной игры n лиц с побочными платежами $v : [0,1]^n \to \mathbf{R}$ определяется как сужение v на стандартный симплекс $\mathcal{S} := \{\tau \in [0,1]^n \bigm| \sum_{i=1}^n \tau_i = 1\}$, задаваемое формулой

$$v^*(\tau^*) := \sup\{v(t\tau^*)/t \bigm| t \in (0, 1/ \parallel \tau^* \parallel_\infty]\}, \quad \tau^* \in \mathcal{S},$$

где, как обычно, $\parallel \tau \parallel_\infty = \max \{|\tau_i| \bigm| i = 1, \ldots, n\}$ для $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$ (дополнительные подробности, касающиеся используемых понятий, см. в [1, 2]). Понижение размерности исследуемой части области определения v облегчает анализ структуры доминирования игры v. Наибольший эффект достигается при изучении ядер однородных нечетких игр.

Теорема. *Если игра v однородна и непрерывна, то ее ядро непусто тогда и только тогда, когда для любого вектора $g \in \mathbf{R}^n$ такого, что $\sum_{i=1}^n g_i = 0$ и $\parallel g \parallel_\infty \leq 1/n$ выполняется неравенство*

$$v(c^*) \geq \frac{1}{2}[v(c^* + g) + v(c^* - g)],$$

где $c^* = (1/n, \ldots, 1/n)$ - центр тяжести симплекса $\mathcal{S}$.

Доклад завершается демонстрацией применения полученных теоретических результатов к анализу условий существования неблокируемых дележей в таких прикладных задачах кооперации, как определение рационального уровня затрат при долевом участии в строительстве взлетно-посадочных полос аэродрома, максимального уровня потока в совместно регулируемых сетях и отыскание эффективного поведения инвесторов при коллективном управлении линейным производством.

ЛИТЕРАТУРА

1. J.-P. Aubin *Optima and Equilibria.* Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1993. — 417p.
2. V.A. Vasil'ev *An extension of Bondareva-Shapley theorem to fuzzy cooperative games.* — VII Moscow International Conference on Operation Research (ORM2013): Moscow, October 15-19, 2013: Proceedings: Vol.I. — Moscow, MAKS Press, 2013. — p.209-212.

[1]Работа выполнена при поддержке фондов РФФИ (грант 13-06-00311) и РГНФ (грант 13-02-00226)

UNIFIED MODELING AND THEORY FOR GLOBAL OPTIMIZATION

D.Y. Gao

Australian National University, Australia
e-mail: david.gao@anu.edu.au

Traditionally, global optimization problems in literature are usually formulated as

$$\min f(x) \ s.t. \ g(x) \leq 0,$$

where the «objective» function $f(x)$ and constraint $g(x)$ are assumed to be differentiable or simply Lipschitzian. It is well-known in nonlinear analysis [1] and mathematical physics [2] that a real-valued function is called objective only if it satisfies the frame-invariance principle [3]. However, in mathematical programming the objective function has been misused with other concepts such as cost, target, utility, and energy functions, etc [4]. Clearly, without detailed structural information on $f(x)$ and $g(x)$, it is difficult (or impossible) to have a general theory and effective methods for solving this artificially challenging problem. This could be one of main reasons why there has been no fundamental break-through in nonconvex programming over the past 50 years.

In this plenary lecture, the speaker will first present a unified mathematical model:

$$\min P(x) = W(Dx) + F(x) \ s.t. \ x \in X,$$

where D is a linear operator, $W(y)$ is an objective function, i.e. $W(y) = W(Qy)$, $\forall Q^T = Q^{-1}$, which depends only physical property of the system; while $F(x)$ is a «subjective» (or cost) function which depends each problem and must be linear. The feasible set X contains only linear constraints (boundary conditions). The speaker will show how the canonical duality-triality theory [2] is naturally developed, why this theory can be used not only for model complex systems within a unified framework, but also for solving a large class of nonconvex, nonsmooth, and discrete problems in both nonlinear analysis and global optimization. Some fundamental and conceptual mistakes in recent papers by C. Zalinescu and his co-workers will be revealed. Applications will be illustrated by a list of global optimal solutions to some well-known challenging problems in global optimization, nonlinear PDEs, and information technology [5,6], and in certain cases, the global minimal solution could be the worst decision.

This talk should bring some fundamentally new insights into complex systems theory, nonlinear optimization and computational science.

REFERENCES

1. Ciarlet *Linear and Nonlinear Functional Analysis with Applications.* — SIAM, Philadelphia, 2013
2. D.Y. Gao *Duality Principles in NonconvexSystems.* — Theory, Methods and Applications, Springer, New York, 2000
3. Wikipedia: $http://en.wikipedia.org/wiki/Objectivity\_(frame\_invariance)$.
4. Wikipedia: $http://en.wikipedia.org/wiki/Mathematical\_optimization$.
5. D.Y. Gao *Canonical duality theory: Unified understanding and generalized solution for global optimization problems.* — Computers & Chemical Engineering, vol. 33, 2009, pp. 1964–1972.
6. N. Ruan, D.Y. Gao, *Global optimal solutions to a general sensor network localization problem.* — Performance Evaluations, 2014.

ДОСТИЖЕНИЕ ЭКЗАФЛОПСНОЙ ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ В ЗАДАЧАХ ГЛОБАЛЬНОЙ ОПТИМИЗИЦИИ

В.П. Гергель

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
e-mail: gergel@unn.ru

Колоссальный вычислительный потенциал современных суперкомпьютерных систем позволяет приступить к решению многих сложнейших научно-прикладных проблем, анализ которых ранее находился за гранью возможного. По оценкам специалистов, суперкомпьютерные системы с рекордными вычислительными показателями будут существенно многопроцессорными (до миллиарда вычислительных ядер), гибридными с разными типами вычислительных устройств с многоуровневой структурой организации вычислений (распределенные вычислительные устройства вычислительные узлы с общей разделяемой памятью – многоядерные процессорные элементы – ускорители вычислений). Эффективное использование огромных вычислительных возможностей экзафлопсных систем представляет собой глобальную проблему "вызова"всему спектру вычислительных наук. Условиями для успешного преодоления этой проблемы являются:
– значительная вычислительная трудоемкость решаемых задач (свыше 10^{18} операций);
– высокий запас параллелизма (масштабируемость) вычислений (вплоть до использования 10^9 процессоров);
– низкая интенсивность информационных взаимодействий (локальность) параллельно выполняемых вычислений;
– устойчивость вычислений к аппаратным сбоям вычислителей, которые неизбежно будут происходить при столь больших количествах вычислительных элементов.

В работе показывается, что все перечисленные условия достижимы для задач глобальной оптимизации.

В работе рассматриваются задачи многомерной многоэкстремальной оптимизации и параллельные методы их решения. В рамках рассматриваемого подхода решение многомерных задач сводится к решению эквивалентных им одномерных задач. Для редукции размерности задачи предложена многоуровневая схема, комбинирующая идеи разверток на основе кривых Пеано и многошаговой оптимизации. Предложен параллельный алгоритм, использующий многоуровневую схему редукции размерности для эффективного распараллеливания. Проведены численные эксперименты, подтверждающие сходимость и ускорение параллельного алгоритма по сравнению с его последовательным прототипом.

ЗАДАЧИ ОТЫСКАНИЯ НЕСКОЛЬКИХ НЕСМЕЖНЫХ СТРУКТУР В ПОЛНОМ ВЗВЕШЕННОМ ГРАФЕ [1]

Э. Х. Гимади

Институт Математики им. Соболева СО РАН, Новосибирский госуниверситет, Новосибирск
e-mail: gimadi@math.nsc.ru

В настоящем докладе дан обзор некоторых результатов, полученных за последние пять лет автором и его коллегами, при разработке эффективных алгоритмов с оценками качества для решения таких трудных задач дискретной оптимизации и исследования операций, как задачи маршрутизации, многоиндексные задачи о назначениях, задачи кластеризации, задачи размещения на графах и сетях и т.п. [1-6].

Часто задачи дискретной оптимизации на графе связаны с отысканием некоторого подграфа экстремального суммарного веса. Некоторые такие задачи полиномиально разрешимы, например, задача отыскания остовного дерева минимального веса и задача о назначении. Примерами труднорешаемых проблем такого рода являются задача коммивояжера и задача поиска клики заданного размера. В последнее время пристальное внимание стало уделяться исследованию задач, в которых в полном взвешенном графе требуется найти не один объект (типа гамильтонова цикла, подстановки, клики, остовного дерева), а несколько (два или более) подобных подграфов, попарно непересекающихся по ребрам. Некоторые из таких расширенных проблем остаются эффективно разрешимыми (например, проблема нахождения нескольких реберно непересекающихся остовных деревьев минимальной суммарного веса). Однако чаще эти задачи являются NP-трудными, и потому для их решения актуальной остается разработка эффективных (полиномиальных) алгоритмов с оценками качества их работы.

В пленарном докладе представлены три подхода к анализу оптимизационных алгоритмов поиска нескольких дискретных несмежных структур в полном взвешенном графе на примере следующих задач:

1) Задача m-Weighted Clique Problem (m-WCP) поиска нескольких вершинно-несмежных клик заданных размеров минимального суммарного веса входящих в них вершин и ребер. Для задачи m-WCP дается полиномиальный алгоритм временной сложности $O(n^2)$ с гарантированной оценкой точности 2 в случае Metric m-WCP и Quadratic Euclidean m-WCP [4].

2) Задача m-Peripatetic Salesman Problem (m-PSP) поиска m реберно-несмежных маршрутов коммивояжера на максимум. На графах с вершинами в многомерном евклидовом пространстве задача решается посредством асимптотически точного алгоритма за время $O(n^3)$ [2].

3) Задача m-PSP на минимум на случайных входах. Дается алгоритм с временной сложностью $O(mn^2)$ и проводится обоснование условий его асимптотической точности для функций распределения, мажорирующих a) равномерное распределение на ограниченном интервале [3] и b) экспоненциальное распределение на интервале, неограниченном сверху [6]. К числу случайных входов типа b) относится усеченно-нормальное распределение.

[1] Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 12-01-00093), целевой программы президиума РАН (проект № 227) и междисциплинарного интеграционного проекта ИМ СО РАН и УрО РАН(№ 7Б).

ЛИТЕРАТУРА

1. Гимади Э. Х. *Алгоритмы с оценками для некоторых трудных задач дискретной оптимизации в исследовании операций.* — Сборник докладов 9-й междун. конференции. ИОИ 2012: Черногория, г. Будва, 2012. М.: Торус Пресс, С. 234–237.
2. А. Е. Бабурин, Э. Х. Гимади. *Об асимптотической точности эффективного алгоритма решения задачи m-PSP на максимум в многомерном евклидовом пространстве.* — Труды ИММ УрО РАН. — 2010. Том 16, № 3, С. 12–24.
3. Э. Х. Гимади, Ю. В. Глазков, О. Ю. Цидулко. *Вероятностный анализ алгоритма решения трехиндексной m-слойной планарной задачи о назначениях на одноциклических подстановках.* — Дискретный анализ и исследование операций, 2014, Том 21, № 1, С. 10–19.
4. Э. Х. Гимади, А. В. Кельманов, А. В. Пяткин, М. Ю. Хачай. *Эффективные алгоритмы для некоторых задач поиска нескольких клик в полном неориентированном графе.* — Труды ИММ УрО РАН. — 2014. Том 2, № 2. С. 99–112.
5. Э. Х. Гимади, А. А. Курочкин. *Эффективный алгоритм решения двухэтапной задачи размещения на древовидной сети.* — Дискретный анализ и исследование операций. 2012. Том 19, № 6. С. 9–22.
6. Э. Х. Гимади, А. М. Истомин, И. А. Рыков, О. Ю. Цидулко. *Вероятностный анализ приближённого алгоритма для решения задачи нескольких коммивояжеров на случайных входных данных, неограниченных сверху* — Труды ИММ УрО РАН. — 2014. Т. 20, № 2, С. 88–98.

ПРОБЛЕМА РЫНОЧНОГО СПРОСА И ЭКОНОМИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ В ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ И МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ[1]

В.К. Горбунов

Ульяновский государственный университет
e-mail: vkgorbunov@mail.ru

Для развития количественных методов экономического анализа и построения реалистичных моделей экономического равновесия, выявляющих оптимальные цены для данной экономики, необходима теория рыночного (коллективного) потребительского спроса, адекватная реальности. Однако в экономической теории (микроэкономике), изучаемой почти во всех университетах мира, таковая до настоящего времени отсутствует (см.[1, 2, 3], любой учебник микроэкономики). Теория спроса, основанная во второй половине XIX века работами Г. Госсена, У. Джевонса, К. Менгера и Л. Вальраса, относится до настоящего времени к индивидуальному потребителю. Современная теория индивидуального спроса имеет строгий математический характер, однако соответствующий рыночный спрос, понимаемый как сумма известного количества индивидуальных спросов, своими аналитическими свойствами не соответствует представлениям о рациональности поведения потребителей, сформировавшимися на основе анализа торговых статистик. Это было впервые установлено В. Горманом в 1953 г. (см. [2]), и позже более точный результат был получен В.И. Зоркальцевым [4].

Отсутствие адекватной теории рыночного спроса предопределило дефекты теории экономического равновесия, построенной на основе статьи К. Эрроу и Ж. Дебре [5], развивающей теорию равновесия Вальраса. В этой теории доказано существование равновесия, но при «правильных» предпочтениях индивидуумов равновесий может быть сколько угодно и их многообразие может быть достаточно произвольным, вопреки поведению реальных рынков в квазистационарных условиях. Кроме того, в модели Эрроу и Дебре продукты универсальны и теория потребительского спроса некорректно распространяется на производственные факторы. Дефекты теории спроса предопределили системный кризис всей неоклассической теории [6, 7].

Неоклассическая теория спроса не имела абсолютного признания у ряда авторитетных экономистов. Отметим здесь позицию Г. Касселя [8], который не принял теорию индивидуума, максимизирующего субъективную полезность, и предложил свою систему экономического равновесия с консолидированным представлением потребителей и производства. Однако Кассель не предложил теории рыночного спроса. Модель равновесия Касселя была исследована в 30-х годах А. Вальдом [9], который нашёл аналитическое условие на функцию рыночного спроса, обеспечившее как существование, так и единственность равновесия. Это условие было независимо предложено в 1938 году П. Самуэльсоном и позже названо Слабой Аксиомой выявленного предпочтения. Слабой Аксиоме удовлетворяют функции индивидуального спроса, но в общем случае ей не удовлетворяет рыночный спрос Вальраса. По этой причине модель Касселя-Вальда, исследованная позже в рамках линейного программирования [10], но без условия Вальда-Самуэльсона, осталась на периферии теории экономического равновесия.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-06-00401)

В докладе будут изложены основные результаты наших работ [11-16] по пересмотру теории спроса и теории экономического равновесия на основе концепции статистического ансамбля потребителей как исходного объекта теории и математического моделирования, и представления коллективных предпочтений векторным полем. Эта концепция является альтернативой неоклассическому индивидуализму, но в основном сохраняет богатый аналитический аппарат неоклассической микроэкономики и позволяет строить теоретически обоснованные и практически реализуемые (вычислимые) аналитические индексы и модели общего экономического равновесия.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Mas-Colell , M. Whinston , J. Green *Microeconomic Theory.* — N.Y.: Oxford University Press, 1995.
2. Бусыгин В.П., Желободько Е.В., Цыплаков А.А. *Микроэкономика: третий уровень.* — Новосибирск: Издательство СО РАН, 2008.
3. T. Negishi *Elements of neo-Walrasian economics. A survey (Advances in Japanese Business and Economics 5).* — Tokyo: Springer, 2014.
4. Зоркальцев В.И. *Проблема агрегирования экономических субъектов.* — Вестник Новосиб. гос. унив-та, серия: Социально-экономические науки, т.10, 2010.
5. K.J. Arrow, G. Debreu *Existence of an equilibrium for a competitive economy.* — Econometrica, vol. 22, 1954.
6. Полтерович В.М. *Кризис экономической теории.* — Экономическая наука современной России, 1998. № 1.
7. Kirman, Alan *The Economic Crisis is a Crisis for Economic Theory.* — CESifo Economic Studies, CESifo, vol. 56, 2010.
8. G. Cassel *The theory of social economy.* — N.Y.: Augustus M. Kelley, 1967.
9. A. Wald *On some systems of equations of mathematical economics.* — Econometrica, vol. 19, 1951.
10. R. Dorfman , P. Samuelson, R. Solow *Linear Programming and Economic Analysis.* N.Y.: McGraw-Hill, 1958.
11. Горбунов В.К. *Математическая модель потребительского спроса: Теория и прикладной потенциал.* — М.: Экономика, 2004.
12. Горбунов В.К. *Особенности агрегирования потребительского спроса.* — Журнал экономической теории. 2009. № 1.
13. Горбунов В.К. *Модель потребительского спроса, основанная на векторном поле предпочтений.* — Вестник Московского ун-та, серия 6: Экономика, 2009. № 1.
14. Горбунов В.К. *Экономическое равновесие и агрегирование покупателей: реабилитация теоремы Вальда.* — Журнал экономической теории, 2011. № 3.
15. Горбунов В.К. *Модель экономики с обобщённым рыночным спросом и единственным равновесием.* — Журнал экономической теории, 2012. № 4.
16. Горбунов В.К. *К теории рыночного спроса: регулярность и экономическое равновесие.* — Экономическая наука современной России, 2013. №4.

BILEVEL OPTIMIZATION: MODEL, OPTIMALITY CONDITIONS AND FIRST SOLUTION APPROACHES [1]

S. Dempe

Faculty of Mathematics and Computer Science, TU Bergakademie Freiberg, Germany
e-mail: dempe@tu-freiberg.de

Considering the convex parametric optimization problem $\varphi(x) := \min_y\{f(x,y) : g(x,y) \leq 0\}$ with the solution set mapping Ψ, the bilevel optimization problem reads as

$$\text{"}\min_x\text{"}\{F(x,y) : G(x) \leq 0,\ y \in \Psi(x)\}. \tag{1}$$

Here $F, f, g_i, i = 1, \ldots, p$, are real functions mapping the $m \times n$-dimensional Euclidean spaces to the real line, and the functions $G_i, i = 1, \ldots, q$, are defined on the n-dimensional real space. First note, that problem (1) is not well posed in case that the set $\Psi(x)$ does not reduce to a singleton for all feasible x. In that case there are at least two possible ways out. Here we will use the optimistic approach $\min_{x,y}\{F(x,y) : G(x) \leq 0,\ y \in \Psi(x)\}$.

To solve this problem, it needs to be replaced with a one-level optimization problem. For that, at least two approaches are possible:

1. The use of the Karush-Kuhn-Tucker (KKT) conditions to replace the lower level problem. This leads to a mathematical program with complementarity constraints (MPCC) which, unfortunately, is not fully equivalent to (1), see Dempe and Dutta [1]. Necessary optimality conditions using this approach can be formulated for the bilevel optimization problem using ideas of nonsmooth analysis, see Zemkoho [2]. First algorithms for computing stationary solutions of problem (1) are presented. These algorithms have to respect that the Lagrange multipliers for the lower level problem need to be carefully selected such that a local optimum of the (MPCC) is really related to a local optimum of problem (1).

2. Replacing the lower level problem using the optimal value function $\varphi(x)$ leads to a nonsmooth (since the function $\varphi(\cdot)$ is not differentiable even under very restrictive assumptions) optimization problem

   $$\min_{x,y}\{F(x,y) : G(x) \leq 0,\ g(x,y) \leq 0,\ f(x,y) \leq \varphi(x)\}.$$

   Partial calmness can be used to replace this problem using an exact penalty function approach. For the obtained Lipschitz optimization problem, necessary optimality conditions can be formulated using variational analysis again. Solution algorithms using this approach need to approximate the optimal value function, see e.g. Dempe and Franke [3] in the linear case.

REFERENCES

1. S. Dempe and J. Dutta, *Is bilevel programming a special case of a mathematical program with complementarity constraints?*, Mathematical Programming, 131(2012), 37-48.
2. A. B. Zemkoho, *Bilevel Programming: Reformulations, Regularity, and Stationarity*, PhD Thesis TU Bergakademie Freiberg, 2012.
3. S. Dempe and S. Franke, *Solution algorithm for an optimistic linear Stackelberg problem*, Computers & Operations Research, 41(2014), 277-281.

[1] Support by project DE 650/7-1 from Deutsche Forschungsgemeinschaft is kindly acknowledged.

PROGRESS IN SOLVING THE COMPOUND MONOTONIC REGRESSON (CRM) PROBLEM

J. Dunn, O. Burdakov, M Kalish, O. Sysoev

University of Adelaide, Linkoping University, Syracuse University

The compound monotonic regression (CMR) problem arises in the context of testing psychological theories where the relationship between manifest variables (e.g., percent correct performance) and underlying latent variables (e.g., amount of learning) is assumed monotonic. If two manifest variables are products of the same latent variable, they will be comonotonic (i.e., monotonic functions of each other).

The CMR problem is to find the best-fitting values of a set of observations under comonotonicity (or isosign) constraints. That is, given vectors, $a, b, v, wn \in R^n$, and a set E of pairs (i, j) corresponding to edges of a directed acyclic graph, find x and y that minimize:

$$\sum_i v_i(x_i - a_i)^2 + \sum_i w_i(y_i - b_i)^2$$

Subject to:

$$\begin{array}{c} x_i \leq x_j,\ \forall(i,j) \in E \\ y_i \leq y_j, \forall(i,j) \in E \end{array} \qquad (MR\ constrains)$$

And

$$\begin{array}{c} x_i < x_j \Rightarrow y_i \leq y_j,\ \forall i,j,\ 1 \leq i,j \leq n \\ y_i < y_j \Rightarrow x_i \leq x_j,\ \forall i,j,\ 1 \leq i,j \leq n \end{array} \qquad (CMR\ constrains)$$

We present a branch-and-bound algorithm for solving this problem and examine its properties.

ВАРИАЦИОННЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ С ПОЗИЦИОННЫМИ УПРАВЛЕНИЯМИ, УСИЛИВАЮЩИЕ ПРИНЦИП МАКСИМУМА

В.А. Дыхта

Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Иркутск
e-mail: dykhta@gmail.com

Доклад посвящен необходимым условиям оптимальности для следующей задачи (P):

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad x(t_0) = x_0, \quad u(t) \in U, \quad t \in T = [t_0, t_1], \tag{1}$$

$$J[x, u] = l(x(t_1)) \to \min .$$

Здесь множество U компактно, функция f непрерывна, локально липшицева по x и обеспечивает относительную компактность в $C(T, R^n)$ множества всех допустимых траекторий системы, функция l локально липшицева, но для краткости в анонсируемых результатах она предполагается класса $C^2(R^n)$.

Хотя задача (P) рассматривается в стандартном классе программных управлений $\mathcal{U} = L_\infty(T, U)$, обсуждаемые условия оптимальности формулируются с использованием позиционных управлений, т.е. произвольных однозначных функций $v : T \times R^n \to U$. В качестве решений системы (1) с позиционным управлением v рассматриваются решения Каратеодори и конструктивные движения Красовского-Субботина; объединение таких решений обозначается через $\mathcal{X}(v)$. Управление v назовем *управлением спуска* по функционалу J в допустимой точке $\bar{\sigma} = (\bar{x}, \bar{u})$, если $\exists\, x \in \mathcal{X}(v) : l(x(t_1)) < J[\bar{\sigma}]$. Ясно, что если $\bar{\sigma}$ — оптимальная пара в задаче (P), то в точке $\bar{\sigma}$ отсутствуют управления спуска.

В рассматриваемых условиях оптимальности управления потенциального спуска генерируются по правилу экстремального прицеливания произвольной опорной мажорантой функционала J в точке $\bar{\sigma}$, т.е. слабо убывающим решением $\varphi(t, x)$ соответствующего неравенства Гамильтона-Якоби со специальным краевым условием. В простейшем варианте опорные мажоранты порождаются решениями сопряженной системы, а получаемые с ними необходимые условия являются прямым усилением ПМ. Ввиду особого интереса к подобного рода результатам сформулируем это усиление для негладкой задачи (P).

Пусть $\Psi(\bar{\sigma})$ — множество решений сопряженного включения Кларка

$$-\dot{\psi}(t) \in \partial_x[\psi(t) \cdot f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))], \quad \psi(t_1) = l_x(\bar{x}(t_1)),$$

$$p(t, x) := \psi(t) + l_x(x) - l_x(\bar{x}(t)), \quad \psi \in \Psi(\bar{\sigma}),$$

$$U_\psi(t, x) := \operatorname*{Argmin}_{u \in U} p(t, x) \cdot f(t, x, u)$$

и $\mathcal{V}_\psi$ — множество селекторов многозначного отображения $U_\psi(t, x)$.

Теорема (позиционный принцип минимума). *Если пара $\bar{\sigma} = (\bar{x}, \bar{u})$ оптимальна в задаче (P), то существует такое $\psi \in \Psi(\bar{\sigma})$, что траектория $\bar{x}$ оптимальна в задаче*

$$l(x(t_1)) \to \min; \quad x \in \bigcup_{v \in \mathcal{V}_\psi} \mathcal{X}(v).$$

Нетрудно видеть, что эта теорема включает в себя негладкий ПМ Кларка для рассматриваемой задачи. Примечательно, что необходимое условие теоремы носит вариационный характер — оно формулируется через вспомогательную бесконечномерную задачу оптимизации. Более общие необходимые условия с опорными мажорантами также имеют вариационный характер. В современной теории Гамильтона-Якоби это первые необходимые условия оптимальности, сравнимые по конструктивности и эффективности с ПМ.

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ СТОХАСТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С КВАНТИЛЬНЫМ КРИТЕРИЕМ

А.И. Кибзун

Московский авиационный институт
e-mail: kibzun@mail.ru

Многие прикладные задачи описываются в терминах стохастического программирования (см. [1]). Среднее значение функции потерь - традиционный критерий в задачах стохастического программирования. Однако, этот критерий во многих случаях не полностью соответствует реальной задаче. Например, такая ситуация возникает, когда нужно гарантировать высокую точность управления летательным аппаратом с заданной надежностью (см. [2]). В этом случае более адекватным является квантильный критерий (VaR-критерий) (см. [3]). Но квантильный критерий оказывается намного сложнее, чем критерий в виде математического ожидания.

В данной работе предлагаются два алгоритма решения задачи квантильной оптимизации в двух-этапной постановке. На первом этапе выбирается стратегия первого этапа, после чего реализуется некоторое случайное событие, неблагоприятное воздействие которого корректируется за счет стратегии второго этапа. При этом критерием оптимальности служит функция квантили. Рассматривается частный случай, когда функция потерь билинейна, т.е. когда она линейна отдельно по стратегиям и случайному вектору. Предполагается, что случайный вектор имеет нормальное распределение.

Первый алгоритм основывается на дискретизации гауссовой меры и последующим сведении полученной задачи к задаче смешанного целочисленного линейного программирования. Для сокращения объема перебора целочисленных переменных используются доверительный метод (см. [3]) и свойства ядра гауссовой меры. Второй алгоритм также основывается на доверительном методе, но исходная стохастическая задача сводится к последовательному решению ряда задач выпуклого программирования с проверкой исходного вероятностного ограничения с помощью метода Монте-Карло. Эффективность обоих алгоритмов иллюстрируется на примере решения тестовой задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д.Б. Юдин *Задачи и методы стохастического программирования.* М.: Советское радио, 1979.
2. В.В. Малышев, А.И. Кибзун *Анализ и синтез высокоточного управления летательными аппаратами.* М.: Машиностроение, 1987.
3. А.И. Кибзун, Ю.С. Кан *Задачи стохастического программирования с вероятностными критериями.* М.: Физматлит, 2009.

SOLVING HUGE CONTINUOUS OPTIMIZATION PROBLEMS

N. Mladenovic, D. Kovacevic, B. Petrovic, P. Milicic

Universite Valenciennes, France
e-mail: Nenad.Mladenovic@brunel.ac.uk

Many practical non-convex continuous optimization problems have a very large number of variables. Therefore, solution methods that are able to solve them exactly or approximately are very welcome. Recently we have suggested DE-VNS [1], a new heuristic that combined two well known meta-heuristic approaches: Differential Evolution (DE) and Variable Neighborhood Search (VNS). Both of them attracted a considerable attention by academics as well as by practitioners. In our hybrid heuristic, the idea of neighborhood change is used to estimate the crossover parameter of DE. Family of distributions are introduced, their parameters estimated during the search and then used to control the distances among solutions in the search space. It turned out that DE-VNS is more favorable than the recent DE approaches when tested on standard and large instances from the literature [2], such as Ackley and Rastrigin functions. In this talk I will show that DE-VNS is also able to solve exactly huge problems with up to 10,000 continuous variables. To the best of our knowledge, no attempt has been made so far to solve problems with such a huge number of continuous variables. In order to measure both the method quality and the instance hardness, we introduce terms of dimensional convergence and the dimensional stability. To the best of our knowledge no attempt has been made to evaluate the behavior of a method in as many as 100,000 dimensions, thus rendering our work as an initial one in the area of extremely large scale continuous optimization.

REFERENCES

1. Kovacevic D., Mladenovic N., Petrovic B., Milosevic P. DE-VNS: Self-adaptive Differential Evolution with crossover neighborhood search for continuous global optimization // Computers and Operations Research. (in press).

2. Kovacevic D., Mladenovic N., Petrovic B., Milosevic P. Comparative Analysis of Continuous Global Optimization Methods, GERAD Technical Report G-2013-41.

О ТЕОРЕТИКО-ГРАФОВОМ ПОДХОДЕ К РЕШЕНИЮ ОПТИМИЗИЦИОННЫХ ЗАДАЧ БОЛЬШОЙ РАЗМЕРНОСТИ [1]

Е.А. Нурминский

Дальневосточный федеральный университет, Владивосток
e-mail: nurmi@dvo.ru

В представляемом докладе рассматривается проблема решения стандартной задачи линейного программирования $\min cx : Ax = b,\ x \geq 0$ большой размерности с разреженной, но не имеющей особой структуры матрицей A. Рассматриваемая задача сводится к ортогональной проекции на допустимый полиэдр и далее редуцируется к проекции некоторой фиксированной точки на выпуклый многогранный конус, порожденный строками матрицы ограничений [1].

Вычисление проекции существенно облегчается декомпозицией матрицы ограничений с помощью решения задачи о минимальной вершинной раскраске графа связности ограничений. Вершины графа, окрашенные одним цветом будут соответствовать множеству структурно-независимых ограничений, проекция на которые выполняется с линейной по мощности этого множества трудоемкостью, а количество этих множеств, в силу разреженности графа связности ограничений, весьма невелико. Хотя задача вершинной раскраски минимальным числом цветов является NP-трудной [2], для ее приближенного решения могут быть применены многочисленные эвристики нахождения, например, максимального независимого множества в графе [3], дающие на практике вполне удовлетворительные результаты.

Доклад посвящен текущему состояниию реализации этой вычислительной идеи, особое внимание уделено решению координирующей проблемы взаимоувязки проекций на подмножества ограничений и приложениям развиваемого подхода к задачам транспортного моделирования и логистики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нурминский Е.А. Проекция на внешне заданные полиэдры // Журн. вычисл. матем. и матем. физики, вып. 3, С. 387-396, 2008.
2. Дистель Р., Теория графов, Новосибирск:Институт математики СО РАН, 2002.
3. Halldorsson M. M., Radhakrishnan J. Greed is good: Approximating independent sets in sparse and bounded-degree graphs // Algorithmica 18 (1): 145–163, 1997.

[1] Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 13-07-12010)

OPTIMIZATION AND ECONOMIC MODELING OF ENERGY SYSTEM CENTERING CO_2 ISSUES

Panos M. Pardalos

University of Florida
e-mail: pardalos@ufl.edu

Global warming has become a critical issue to our planet, Earth. The continuing rise in the average temperature of the atmosphere and ocean causes serious problems such as: glacier shrinkage, sea level elevation, species extinction, agricultural output decrease, and extreme weather events. Many countries, territories, and international organizations have joined together to curb the global warming trend. The United Nations Framework Convention on Climate Change (UNFCCC) began in 1992 and Kyoto protocol, initiated in 1997. Among the many efforts, curbing Carbon Dioxide (CO_2) emission has been an important one.

Along this line, research efforts to incorporate CO_2 in energy systems operations have surged in recent years. This talk will review the mathematical modeling, optimization techniques, and economic analysis of CO_2 in energy systems. This will include CO_2 policy and market modeling, integration of CO_2 mitigation into power systems' operations and strategic planning. On the other side, as the silver bullet for solving CO_2 emission problems, carbon capture and storage will be discussed by showing the techno-economic analysis and related optimization models.

RECENT DEVELOPMENTS IN LIPSCHITZ GLOBAL OPTIMIZATION[1]

Ya.D. Sergeyev

University of Calabria, Rende (Italy)
N.I.Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod (Russia)
e-mail: yaro@si.dimes.unical.it

In this lecture, the global optimization problem of a multidimensional function satisfying the Lipschitz condition over a hyperinterval with an unknown Lipschitz constant is considered. It is supposed that the objective function can be "black box", multiextremal, and non-differentiable. It is also assumed that evaluation of the objective function at a point is a time-consuming operation. Many algorithms for solving this problem have been discussed in literature (see [1–8] and references given therein). They can be distinguished, for example, by the way of obtaining information about the Lipschitz constant and by the strategy of exploration of the search domain. Different exploration techniques based on various adaptive partition strategies are analyzed.

The main attention is dedicated to two types of algorithms: (i) methods using space-filling curves to reduce the dimensionality of the global optimization problem; (ii) diagonal global optimization algorithms. Both classes of methods have a number of attractive theoretical properties and have proved to be efficient in solving applied problems. Several families of deterministic derivative-free numerical algorithms are discussed. A number of unconventional ideas, such as adaptive strategies for estimating Lipschitz constant, balancing global and local information to accelerate the search, etc. are presented. Results of extensive numerical experiments performed on the GKLS-generator (see [1]) demonstrate advantages of the proposed methods with respect to a number of traditional algorithms.

REFERENCES

1. M. Gaviano, D.E. Kvasov, D. Lera, and Ya.D. Sergeyev, *Algorithm 829: Software for generation of classes of test functions with known local and global minima for global optimization* — ACM Transactions on Mathematical Software, vol. 29(4), 2003, pp. 469-480.
2. D.E. Kvasov and Ya.D. Sergeyev, *Lipschitz gradients for global optimization in a one-point-based partitioning scheme* — Journal of Computational and Applied Mathematics, vol. 236(16), 2012, pp. 4042-4054.
3. D. Lera and Ya.D. Sergeyev, *Acceleration of univariate global optimization algorithms working with Lipschitz functions and Lipschitz first derivatives* — SIAM Journal on Optimization, vol. 23(1), 2013, pp. 508-529.
4. R. Paulavičius and J. Žilinskas, *Simplicial Global Optimization* — Springer, New York, 2014.
5. Ya.D. Sergeyev and D.E. Kvasov, *Diagonal Global Optimization Methods* — FizMatLit, Moscow, 2008. In Russian.
6. Ya.D. Sergeyev, R.G. Strongin, and D. Lera, *Introduction to Global Optimization Exploiting Space-Filling Curves* — Springer, New York, 2013.
7. R.G. Strongin, *Numerical Methods in Multi-Extremal Problems (Information-Statistical Algorithms)* — Nauka, Moscow, 1978. In Russian.
8. R.G. Strongin and Ya.D. Sergeyev, *Global Optimization with Non-Convex Constraints: Sequential and Parallel Algorithms* — Kluwer, Dordrecht, 2000.

[1]This research was partially supported by the INdAM–GNCS 2014 Research Project of the Italian National Group for Scientific Computation of the National Institute for Advanced Mathematics "F. Severi".

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ АППАРАТА ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ИНФРАКРАСНОЙ ТОМОГРАФИИ[1]

В.С. Сизиков

Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики (НИУ ИТМО)
e-mail: sizikov2000@mail.ru

В докладе по-новому изложена известная методика инфракрасной томографии горячего газа [1] на примере пламени широко используемой лабораторной горелки (burner). Описан вариант, когда используются два режима диагностики пламени: активный (ON) – с включенным источником просвечивания и пассивный (OFF) – без источника. Активно-пассивная диагностика позволяет получить две экспериментальные функции и два новых двумерных интегральных уравнения относительно коэффициента абсорбции (поглощения) k и функции Планка B, описывающей эмиссию (излучение) среды (по которой можно рассчитать температурный профиль среды T).

В случае осевой симметрии и параллельного сканирования пламени двумерные уравнения преобразованы в одномерные сингулярные интегральные уравнения (СИУ) типа Абеля относительно k и B. Для их численного решения использованы: обобщенный метод квадратур [2] (в новой редакции) и метод регуляризации Тихонова со сглаживанием экспериментальных данных с помощью сплайнов и без сглаживания.

Разработан пакет программ на MatLab 7. С его помощью выполнена обработка результатов экспериментальной диагностики пламени горелки для ряда волновых чисел ν и в ряде сечений пламени. Эта обработка подтвердила, что СИУ обладает саморегуляризацией, задача его решения является умеренно некорректной и использование обобщенного метода квадратур с предварительным сплайн-сглаживанием экспериментальных данных, но без регуляризации Тихонова позволяет получить практически такие же результаты, как и с использованием метода регуляризации Тихонова.

Особенностью методики является то, что она не требует специального определения коэффициента абсорбции k путем его прямого измерения или с помощью базы данных, например HITRAN/HITEMP [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. В.С. Сизиков. *Инфракрасная томография горячего газа: математическая модель активно-пассивной диагностики.* — Научно-техн. вестник ИТМО. — 2013, вып. 6 (88), с. 1–17.

2. В.С. Сизиков, А.В. Смирнов, Б.А. Федоров. *Численное решение сингулярного интегрального уравнения Абеля обобщенным методом квадратур.* — Изв. вузов. Математика. — 2004, № 8 (507), с. 62–70.

3. T. Fleck, H. Jäger, I. Obernberger. *Experimental verification of gas spectra calculated for high temperatures using the HITRAN/HITEMP database.* — J. Phys. D: Applied Physics. — 2002, v. 35, № 23, pp. 3138–3144.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 13-08-00442) и DTU Denmark (project № 010246)

ГЛОБАЛЬНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ: МНОГОПРОЦЕССОРНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Р.Г. Стронгин

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Задача многомерной глобальной оптимизации липшицевой функции, определенной на N-мерном гиперкубе, может быть сведена к решению редуцированной одномерной задачи посредством применения кривой (называемой также разверткой) Пеано, отображающей гиперкуб на отрезок [0,1] вещественной оси [1,4]. Для решения возникающей одномерной задачи предложено семейство информационно-статистических алгоритмов глобального поиска, ориентированных на многопроцессорные вычислительные среды и реализующих эффективное распараллеливание [1-3].

Новым направлением, обладающим потенциалом массового параллелизма, является использование при редуцировании многомерной задачи семейства разверток (множественные развертки), что позволяет использовать для решения задачи многие тысячи процессоров и существенно ускорить решение [3,4].

Данный подход может быть распространён на задачи со сложными липшицевыми ограничениями на основе применения индексного метода учета ограничений [1]. Индексный метод не требует в отличие от классического метода штрафных функций подбора каких-либо параметров типа константы штрафа, позволяет решать задачи с многоэкстремальными частично-вычислимыми ограничениями и сохраняет возможность широкого распараллеливания.

ЛИТЕРАТУРА

1. R.G. Strongin , Ya.D. Sergeyev *Global Optimization with Non-Convex Constraints: Sequential and Parallel Algorithms.* – Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.
2. R.G. Strongin , Ya.D. Sergeyev *Global optimization: Fractal approach and non-redundant parallelism.* – Journal of Global Optimization, Vol. 27, 2003, pp. 25-50.
3. R.G. Strongin , V.P. Gergel *Parallel computing for globally optimal decision making on cluster systems.* – Future Generation Computer Systems, Vol. 21, 2005, pp. 673- 678.
4. R.G. Strongin *Global optimization using space filling curves.* – In Encyclopedia of Optimization (ed. by Floudas C.A. and Pardalos P.M.), 2nd edition, Springer, NewYork, 2009, pp. 1418-1423.

ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП МАКСИМУМА В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ МНОГОМЕРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ[1]

В.А. Терлецкий

Иркутский государственный университет, Иркутск
e-mail: vaterletskiy@gmail.com

Рассматривается задача оптимального управления гиперболическими системами многомерных полулинейных дифференциальных уравнений первого порядка с распределенным управлением. На основе многомерных аналогов инвариантов Римана, впервые введенных в работах [1,2], получено необходимое условие оптимальности в форме вариационного принципа максимума, который для одномерного варианта полулинейных гиперболических систем опубликован в статье [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Терлецкий *Вариационный принцип максимума в управляемых системах одномерных гиперболических уравнений* — Изв. вузов. Матем. — 1999, № 12, с. 82–90
2. В. А. Терлецкий *Обобщенное решение многомерных полулинейных гиперболических систем.* — Изв. вузов. Матем. — 2001, № 12, с. 68–76.
3. В. А. Терлецкий *Обобщенное решение в задачах оптимального управления гиперболическими системами.* — Изв. вузов. Матем. — 2007, № 4, с. 68–78.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 14-01-00564)

АППРОКСИМИРУЕМОСТЬ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ КОММИВОЯЖЕРА И ЕЕ ОБОБЩЕНИЙ [1]

М.Ю. Хачай

Институт математики и механики им. Н.Н.Красовского УрО РАН, Екатеринбург
e-mail: mkhachay@imm.uran.ru

Доклад посвящен вопросам эффективной аппроксимируемости серии геометрических комбинаторных задач, являющихся одновременно обобщениями классической задачи коммивояжера (TSP) и частными случаями задачи маршрутизации транспорта (VRP).

Конкретно, для произвольного натурального k исследуется задача k-МНС об оптимальном покрытии полного взвешенного графа заданным числом вершинно непересекающихся циклов. Критерий оптимизации аддитивен и равен суммарному весу дуг, входящих в построенные маршруты.

Задача обладает рядом практически важных приложений в области исследования операций и естественным образом обобщает задачу коммивояжера (которая совпадает с k-МНС при $k = 1$), исследование вопросов аппроксимируемости которой является одним из основных направлений современной теории вычислительной сложности.

Известно, что в общем случае задача TSP полиномиально не аппроксимируема с произвольной точностью 2^n (при условии $P \neq NP$), однако уже в метрической постановке принадлежит классу Apx. Как показано С. Аророй, евклидова задача TSP (в которой вершины графа являются точками в конечномерном числовом пространстве, а веса дуг определяются расстояния между ними) обладает полиномиальной приближенной схемой (PTAS), т.е. в большой класс встречающихся на практике постановок задачи может допускает эффективное приближенное решение с произвольной наперед заданной точностью.

Нами показано, что задача k-МНС при произвольном фиксированном $k \geq 1$ обладает аналогичными свойствами, а именно: задача NP-трудна в сильном смысле и сохраняет труднорешаемость в метрической и евклидовой постановках; задача неаппроксимируема в общем случае; метрическая задача k-МНС обладает 2-приближенным алгоритмом; для евклидовой задачи на плоскости предложена и обоснована полиномиальная приближенная схема. Полученные результаты легко могут быть распространены на случай произвольной фиксированной размерности пространства.

[1]Работа поддержана грантом РНФ № 14-11-00109

СЕКЦИОННЫЕ ДОКЛАДЫ

ДИСКРЕТНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ

МОДЕЛЬ КОМПАКТНОГО РАЗМЕЩЕНИЯ НАБОРА ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ НА ЛИСТЕ

А.А. Андрианова, Т.М. Мухтарова, В.Р. Фазылов

Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань
e-mail: aandr78@mail.ru, tmm116@yandex.ru, vfazylov@gmail.com

В докладе рассматривается модель задачи негильотинного размещения набора прямоугольников с заданными размерами $a_i \times b_i$, $i = 1 \ldots n$ ($a_i \geq b_i$) на листе заданного размера $A \times B$. В качестве начала координат выбирается левый нижний угол листа. Неизвестными модели являются координаты размещения прямоугольников на листе x_i, y_i $i = 1 \ldots n$ и три набора булевых переменных: z_i $i = 1 \ldots n$ (ориентация i-ого прямоугольника вдоль или поперек листа), s_{ij}, t_{ij} $i = 1, \ldots, n-1, \quad j = i+1, \ldots, n$ (используются для формулировки условий непересечения i-ого и j-ого прямоугольников по горизонтали и вертикали). Модель представляется в виде следующей системы линейных неравенств с частично булевыми переменными:

$$x_i \geq 0, x_i + (b_i - a_i)z_i \leq A - a_i, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

$$y_i \geq 0, y_i + (a_i - b_i)z_i \leq B - b_i, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{2}$$

$$-x_i + x_j - (b_i - a_i)z_i + At_{ij} + As_{ij} \geq a_i, \quad i = 1, \ldots, n-1, \quad j = i+1, \ldots, n, \tag{3}$$

$$x_i - x_j - (b_j - a_j)z_j + At_{ij} - As_{ij} \geq a_j - A, \quad i = 1, \ldots, n-1, \quad j = i+1, \ldots, n, \tag{4}$$

$$-y_i + y_j - (a_i - b_i)z_i - Bt_{ij} + Bs_{ij} \geq b_i - B, \quad i = 1, \ldots, n-1, \quad j = i+1, \ldots, n, \tag{5}$$

$$y_i - y_j - (a_j - b_j)z_j - Bt_{ij} - Bs_{ij} \geq b_j - 2B. \quad i = 1, \ldots, n-1, \quad j = i+1, \ldots, n, \tag{6}$$

$$z_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{7}$$

$$s_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \ldots, n-1, \quad j = i+1, \ldots, n. \tag{8}$$

$$t_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \ldots, n-1, \quad j = i+1, \ldots, n. \tag{9}$$

Ограничения (1), (2) определяют условия размещения отдельных прямоугольников на листе, а ограничения (3)–(6) определяют условия попарного непересечения прямоугольников. Подробно вывод и обоснование модели (1)–(9) изложены в [1].

Если добавить к модели (1)–(9) нулевую целевую функцию, то для отыскания ее решения можно использовать метод Лэнд и Дойг, который является методом ветвей и границ и предназначен для решения задачи частично целочисленного линейного программирования. Остановка вычислений производится после получения первого допустимого размещения.

Были проведены численные предварительные эксперименты, показавшие практическую применимость модели для решения задач с количеством прямоугольников до 15.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.А. Андрианова, Т.М. Мухтарова, В.Р. Фазылов. *Модели задачи негильотинного размещения набора прямоугольников на листе и полуполосе.* — Уч. зап. Казан. ун-та Сер. физ.-матем.наук. — 2013. — Т.155, №3. — с. 5-18.

ЭВРИСТИКА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ МАРШРУТИЗАЦИИ ТРАНСПОРТА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРИЦЕПОВ [1]

М.В. Бацын, А.А. Пономаренко

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Лаборатория алгоритмов и технологий анализа сетевых структур, ул. Родионова, 136, Нижний Новгород 603093, Россия
e-mail: mbatsyn@hse.ru, aponomarenko@hse.ru

В докладе представлена итеративная жадная эвристика для Задачи Маршрутизации Тягачей с Прицепами (ЗМТПРФ), возникающей в реальной практике доставки товаров со склада в магазины. Одной из первых работ, посвященных задаче ЗМТПРФ с Временными Окнами (ЗМТПРФВО), является работа Семета и Тайлларда (1993). Позднее Хофф и Локкетанген (2007) разработали алгоритм табу-поиска для задачи ЗМТПРФ с несколькими депо, возникающей при транспортировке молока. Карамиа и Гуэрриэро (2010) предложили итеративную трехэтапную эвристику для аналогичной задачи с одним депо. Дрексл (2011) разработал модель целочисленного программирования и алгоритм ветвей и цен для задачи ЗМТПРФВО.

В нашем докладе рассмотрена задача ЗМТПРФВО с ограничениями магазинов на автомобили, которые могут осуществлять доставку, с мягкими и жесткими временными окнами и с разбиением доставки для одного магазина на два и более автомобиля. Насколько известно авторам, в такой общей постановке данная задача не рассматривалась в литературе.

Наша эвристика основана на жадном алгоритме добавления магазинов в маршрут, подобном жадным алгоритмам, предложенным Соломоном (1987). Дополнительно мы применяем процедуру улучшения решения, сдвигающую все доставки в текущем маршруте на более раннее время, чтобы избежать опозданий. Алгоритм построения полного решения итеративно повторяется много раз, при этом каждый новый маршрут начинается с одного из самых удаленных магазинов, выбираемого случайным образом. Вычислительные эксперименты на реальных данных, содержащих до 400 заказов и 100 автомобилей, показывают эффективность предложенной эвристики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Caramia M., Guerriero F. *A heuristic approach for the truck and trailer routing problem.* — Journal of the Operational Research Society — 2010, V.61, p. 1168–1180.
2. Drexl M. *Branch-and-Price and Heuristic Column Generation for the Generalized Truck-and-Trailer Routing Problem.* — Journal of Quantitative Methods for Economics and Business Administration — 2011, V.12(1), p. 5-38.
3. Hoff A., Lokketangen A. *A tabu search approach for milk collection in western Norway using trucks and trailers.* — 6th triennial symposium on transportation analysis TRISTAN VI — 2007.
4. Semet F., Taillard E. *Solving real-life vehicle routing problems efficiently using tabu search.* — Annals of Operations Research — 1993, V.41, p. 469–488.
5. Solomon M. *Algorithms for the vehicle routing and scheduling problem with time window constraints.* — Operations Research — 1987, V.35, p. 254–265.

[1] Работа выполнена при поддержке Лаборатории алгоритмов и технологий анализа сетевых структур НИУ ВШЭ, грант правительства РФ дог. 11.G34.31.0057

ПОСТРОЕНИЕ ЦИКЛИЧЕСКИХ РАСПИСАНИЙ ПРИ НАЛИЧИИ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ МАШИН[1]

Е.А. Боброва, В.В. Сервах

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Омск
e-mail: eabobrova88@gmail.com, svv_usa@rambler.ru

Рассматривается задача обработки партии однотипных деталей на производственной линии, состоящей из m типов машин. Технологический маршрут детали состоит из n последовательно выполняемых операций $(O_1, O_2, \ldots, O_n)$. Операция O_j выполняется в течение p_j единиц времени на машине типа m_j, $j = 1, 2, \ldots, n$. Машины в технологическом маршруте могут повторяться, одновременное выполнение двух и более операций на одной машине не допускается. Расписание называется циклическим, если одинаковые операции двух последовательно обрабатываемых деталей начинают выполняться через фиксированный промежуток времени, равный *длине цикла* C. Задача построения допустимого расписания с минимальной длинной цикла полиномиально разрешима, и оптимальное значение целевой функции равно сумме длительностей операций на самой загруженной машине.

На практике возникают ситуации, когда одна из операций занимает гораздо больше времени, чем все остальные. В этом случае при установке еще нескольких машин, выполняющих эту операцию, длина цикла в новом расписании может быть значительно уменьшена. Возникает задача минимизации циклического времени обработки партии однотипных деталей при возможности использования нескольких параллельных машин каждого типа, которая остается полиномиально разрешимой.

Наряду с длиной цикла C, важной характеристикой циклического расписания является величина H – *максимальное число одновременно обрабатываемых деталей*. Считаем, что деталь находится в обработке, если выполнение ее операций уже началось, но последняя операция еще не завершилась. Задача минимизации циклического времени обработки партии однотипных деталей при условии, что число одновременно обрабатываемых деталей не превосходит H, является NP-трудной в сильном смысле [1]. Для случая, когда число H фиксировано, в [2] предложен алгоритм псевдополиномиальной трудоемкости.

В работе представлен алгоритм решения задачи минимизации длины цикла при наличии параллельных машин и ограничения на максимальное число деталей, одновременно находящихся в обработке. Алгоритм основан на динамическом программировании и имеет трудоемкость $O((2P)^{2H-1}H^He^H)$, где P – суммарная длительность операций одной детали.

Теорема. *При фиксированном H задача обработки однотипных деталей при наличии параллельных машин псевдополиномиально разрешима.*

Исследуется возможность обобщения данного результата на случаи возможности прерывания операций и дополнительных ресурсных ограничений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hanen C. *Study of a NP-hard cyclic scheduling problem: The recurrent job-shop.* — European Journal of Operational Research. — 1994, Vol. 72, P. 82–101.
2. Romanova A. A., Servakh V. V. *Optimization of processing identical jobs by means of cyclic schedules.* — Journal of Applied and Industrial Mathematics. — 2009, Vol. 3, Is. 4, P. 496-504.

[1]Работа поддержана грантами РФФИ (проекты 12-01-00184а, 12-01-00122) и грантом целевой программы СО РАН (интеграционный проект № 7Б).

ОПТИМИЗАЦИЯ ЗАКУПОК С УЧЕТОМ АЛЬТЕРНАТИВНОГО ИСПОЛЬЗОВАНИЯ КАПИТАЛА[1]

Н.И. Бурлакова, И.А. Полянцева, В.В. Сервах

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, Омск
e-mail: surpriz87@yandex.ru, polyantsevaia@gmail.com
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Омск
e-mail: svv_usa@rambler.ru

Фирма закупает товар на бирже и реализует его на рынке. Заданы следующие величины и функции: λ – интенсивность продажи товара, $\alpha+\beta v$ – затраты на закупку и доставку товара объемом $v > 0$, c – цена продажи одной единицы, c_{xp} – удельные затраты на хранение. Требуется определить периодичность T и объем закупки товара $v = T\lambda$, чтобы полученная прибыль была максимальной. Модель без учета затрат на хранения рассматривалась авторами в [1].

Для сравнения затрат и поступлений в разные моменты времени используем технологию дисконтирования. Через r_0 обозначим ставку альтернативного ликвидного безрискового размещения капитала. Интенсивность поступления денег от продажи $c\lambda$ с учетом дисконтирования выражается функцией $\frac{c\lambda}{(1+r_0)^t}$. За период T доход, дисконтированный к начальному моменту времени доход равен

$$\int\limits_0^T \frac{c\lambda}{(1+r_0)^t}dt = \frac{c\lambda}{ln(1+r_0)} \cdot \left(1 - \frac{1}{(1+r_0)^T}\right).$$

Затраты связаны как с закупкой и доставкой товара в момент завоза $\alpha + \beta v$, так и с издержками на хранение

$$\int\limits_0^T \frac{(T\lambda - t\lambda)c_{xp}}{(1+r_0)^t}dt = \frac{c_{xp}\lambda}{ln^2(1+r_0)} \cdot \left(T \cdot \ln(1+r_0) + \frac{1}{(1+r_0)^T} - 1\right).$$

Требуется максимизировать удельную прибыль:

$$\frac{1}{T}\left(\frac{c\lambda}{ln(1+r_0)} \cdot \left(1 - \frac{1}{(1+r_0)^T}\right) - \alpha - \beta v - \frac{c_{xp}\lambda}{ln^2(1+r_0)} \cdot \left(T \cdot \ln(1+r_0) + \frac{1}{(1+r_0)^T} - 1\right)\right).$$

В работе показано, что данная функция является выпуклой вверх и имеет единственную точку максимума. Модель легко обобщается на случай неравномерного детерминированного спроса, но в этом случае отсутствует периодичность и оптимизировать прибыль необходимо на фиксированном интервале с учетом граничных условий на запас продукта. На основе этого подхода построена дискретная модель задачи, предложен алгоритм ее решения основанный на схеме динамического программирования. Описаны подходы к максимизации прибыли в многонаменклатурных системах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н.И. Бурлакова, В.В. Сервах *Максимизация удельной прибыли в задаче управления запасами.* — Материалы международной конференции "Дискретная оптимизация и исследование операций". — Новосибирск, 2013, С. 164.

[1]Работа поддержана грантами РФФИ (проекты 12-01-00184а, 12-01-00122) и грантом целевой программы СО РАН (интеграционный проект № 7Б).

ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ СЕГМЕНТАЦИИ ГРАФА

В.В. Быкова

Сибирский федеральный университет, Красноярск
email: bykvalen@mail.ru

В докладе рассматривается задача об оптимальной сегментации графа, которая формулируется следующим образом.

SEGMENTATION GRAPH PROBLEM (или кратко SGP)

Условие. Заданы связный граф $G = (V, E)$, где $|V| \geq 2$, $|E| \geq 1$, неотрицательное целое число $K \leq |V|$ и положительное целое число $L \leq |E|$.

Вопрос. Существует ли такое множество $B \subseteq V$ мощности K, что сегментация графа $G = (V, E)$ по B приводит к множеству его подграфов $\mathfrak{R} = \{G_1, G_2, \ldots, G_p\}$, удовлетворяющему условию: $w(G) \leq L$, где $w(G) = \max\{|E_i| : 1 \leq i \leq p\}$ — наибольший (по числу ребер) размер сегмента $G_i = (V_i, E_i) \in \mathfrak{R}$?

Здесь под сегментацией графа $G = (V, E)$ по множеству $B \subseteq V$ понимается такое разбиение множества ребер графа G, что два ребра принадлежат одному и тому же сегменту G_i, если и только если в G_i существует (a, b)-маршрут, включающий оба эти ребра и не содержащий ни одной вершины из B, кроме, возможно, вершин a и b. При этом множество вершин V_i сегмента $G_i = (V_i, E_i)$ составляют концевые вершины ребер из E_i $(1 \leq i \leq p \leq |E|)$.

Схожие постановки задачи SGP изучались ранее [1, 2] в контексте приложений, связанных с проектированием топологии магистральных сетей трубопроводов и размещения в этих сетях запорной аппаратуры. В работах [1, 2] было установлено, что подобные задачи являются NP-трудными. Известно также, что если K фиксировано или если K произвольно, а G — дерево, то задача SGP разрешима за полиномиальное время.

В данной работе продолжено исследование задачи SGP. Автором введена операция сегментации графа $G = (V, E)$ по множеству $B \subseteq V$, которая конструктивно указывает, как порождать различные варианты сегментации. Показано, что множество сегментов $\mathfrak{R} = \{G_1, G_2, \ldots, G_p\}$ связного графа $G = (V, E)$, где $|V| \geq 2$, $|E| \geq 1$, однозначно определяется множеством $B \subseteq V$, и формируется при заданном B за время $O(|V| + |E|)$. Доказаны свойства сегментов: множества вершин двух любых различных сегментов либо не пересекаются, либо пересекаются в вершинах из B; всякая вершина $a \in V \setminus B$ входит только в один сегмент; при сегментации графа G степени его вершин, не принадлежащие B, остаются неизменными; если некоторый сегмент $G_i = (V_i, E_i)$ содержит более двух вершин из B, то множество $B \cap V_i$ независимое в G_i .

Введенная в работе операция сегментации графа и установленные свойства сегментов позволяют понять, как устроены допустимые и оптимальные решения SGP, и могут быть использованы при разработке различных алгоритмов решения данной задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. H.L. Bodlaender, A. Hendriks, A. Grigoriev, N.V. Grigorieva *The valve location problem in simple network topologies.* INFORMS Journal on Computing, 2010, 22(3), pp. 433-442.

2. G. Laporte, M. Pascoal *The pipeline and valve location problem.* European Journal of Industrial Engineering, 2012, 6(3), pp. 301-321.

ОБ ИССЛЕДОВАНИИ И РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ДОСТАВКИ ОДНОРОДНОГО ПРОДУКТА РАЗЛИЧНЫМ ПОТРЕБИТЕЛЯМ[1]

А.Ф. Валеева, Ю.А. Гончарова, И.С. Кощеев

Уфимский Государственный Авиационный Технический Университет, Уфа
e-mail: aida_val2004@mail.ru

Задача доставки однородного продукта (реагента) различным потребителям (3L-EVRP, Three-Dimensional Extended Vehicle Routing Problem) включает в себя решение следующих подзадач: прогнозирование объемов спроса требуемого продукта; составление рациональных маршрутов его доставки автомобильными транспортными средствами (ТС) различной грузоподъемности (при этом учитываются временные окна, период планирования, раздельная доставка, наличие множества депо, неоднородность парка ТС) [1]; выбор емкостей для перевоза продукта в ТС; размещение емкостей параллелепипедной и цилиндрической форм с учетом массы емкостей и поддонов, которая не должна превышать вместимости ТС [3]. Для поиска рациональных маршрутов с учетом ряда ограничений разработан алгоритм P-ACO-3L-EVRP на базе метаэвристики муравьиной колонии, основанной на популяции, а для размещения емкостей эволюционный алгоритм $(\lambda + \mu)$ EA3D. Алгоритмы, разработанные для решения перечисленных подзадач, объединены в единый модуль – прототип логистической транспортной подсистемы [2]. Для исследования эффективности алгоритмов P-ACO-3L-EVRP и $(\lambda + \mu)$EA3D были проведены численные эксперименты на тестовых примерах из международной библиотеки тестов OR-library. Для решения задачи маршрутизации при проведении экспериментов учитывались такие ограничения, как временные окна, период планирования, раздельная доставка, наличие множества депо, неоднородность парка ТС. Проводились сравнения алгоритма P-ACO-3L-EVRP с генетическим алгоритмом (G.Jeon, H.R. Leep, J.Y. Shim), алгоритмом поиска с запретами (C. Archetti, M.G. Speranza, A. Hertz). На четырех примерах предложенный алгоритм показал лучшие значения целевой функции. Тестирование задачи размещения емкостей в ТС проводилось на известных тестовых наборах из OR-library, сравнение проводилось с генетическим алгоритмом (Bischoff, Ratcliff), несколькими вариантами гибридного метаэвристического алгоритма (Liang, Lee, Liang). Алгоритм показал результаты, близкие к лучшим известным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Валеева А.Ф., Гончарова Ю.А., Кощеев И.С. *Разработка логистической транспортной системы для решения задачи доставки груза различным клиентам.* Москва: Информационные технологии, 2013, 23-28 с.
2. Валеева А.Ф., Гончарова Ю.А., Кощеев И.С. *Разработка логистической транспортной системы для решения задачи доставки груза различным клиентам.* Москва: Информационные технологии, 2013, 9-14 с.
3. Mhand Hifi, Rym M'Hallah *Approximate algorithms for constrained circular cutting problems.* Computers and Operation Research V. 31, 2004, 675-694 с.

[1]Работа выполнена в рамках гранта РФФИ № 13-07-00579

ОБ ОДНОМ БИКРИТЕРИАЛЬНОМ ПОДХОДЕ К ПОИСКУ РОБАСТНЫХ РЕШЕНИЙ В ДИСКРЕТНЫХ ЗАДАЧАХ РАЗМЕЩЕНИЯ[1]

И.Л. Васильев, А.В. Ушаков

Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Иркутск
e-mail: {vil,aushakov}@icc.ru

В докладе рассматривается одни из базовых дискретных задач размещения — простейшая задача размещения и задача о p-медиане — имеющих схожую постановку. Дано множество пунктов возможного размещения предприятий $I = \{1, \ldots, m\}$, множество клиентов $J = \{1, \ldots, n\}$, величины d_{ij}, задающие транспортные затраты (расстояния) на обслуживание j-го клиента из пункта i, а также величины ω_j задающие спрос j-го клиента. Задача о p-медиане заключается в выборе p пунктов размещения предприятий из множества I, так, чтобы суммарные затраты на обслуживание всех клиентов были минимальны, т.е.

$$\min_{S \subseteq I} \Big\{ \sum_{j \in J} \omega_j \min_{i \in S} d_{ij} : \ |S| = p \Big\}.$$

В простейшей задачи размещения количество открываемых предприятий не фиксировано, однако имеются величины f_i, задающие стоимость размещения предприятия в пункте $i \in I$. Цель задачи состоит в минимизации как транспортных затрат на обслуживание всех клиентов, так и суммарной стоимости размещения с этой целью предприятий.

Для представленных оптимизационных задач в докладе рассматривается так называемые робастные версии [3], оснаванные на концепции пороговой робастности, предложенной для задач размещения на плоскости в работе [2]. Идея подхода основана на предположении, что спрос клиентов заранее не известен, но выражен некоторой оценкой $\widehat{\omega}_j$, $j \in J$, тогда робастностью решения S — на примере задачи о p-медиане — называется следующая величина

$$\rho(S) = \min \Big\{ \|(\omega_j)_{j \in J} - (\widehat{\omega}_j)_{j \in J}\| : \sum_{j \in J} \omega_j \min_{i \in S} d_{ij} > \tau \Big\}, S \subseteq I, |S| = p,$$

где τ — некоторое положительное число, которое можно интерпретировать как бюджет.

В работе исследуются бикритериальные версии представленных дискретных задач размещения с дополнительным критерием, максимизирующим робастность решения. Предлагается метод поиска Парето оптимальных решений на основе одного из известных подходов в области бикритериальной оптимизации, а также приводятся результаты обширного вычислительного эксперимента.

ЛИТЕРАТУРА

1. И.Л. Васильев, А.В. Ушаков *Об одном подходе к робастности решения в задаче о p-медиане.* — Известия ИГУ. Серия «Математика». — 2012, т.5, №4, с. 2-15.
2. E. Carrizosa, S. Nickel *Robust facility location.* — Mathematical Methods of Operations Research. — 2003. vol. 58, № 2. pp. 331-349.
3. L.V. Snyder *Facility location under uncertainty: a review.* — IIE Transactions. — 2006, vol. 38, № 7, pp. 547-564.

[1]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект №14-07-00382-а)

МЕТОДЫ УПАКОВКИ N-МЕРНЫХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОГРАННИКОВ

Л.И. Васильева, А.А. Ахтямов

Уфимский государственный авиационный технический университет
e-mail: lidav@mail.ru

В докладе рассматривается задача упаковки n-мерных заготовок определенной структуры в замкнутую ограниченную n-мерную область. Известно, что задачи раскроя-упаковки относятся к классу NP-сложных задач.

N-мерным ортогональным многогранником (n-ОМ) будем называть геометрический объект, состоящий из конечного числа n-мерных непересекающихся прямоугольных параллелепипедов, ребра которых параллельны осям координат, с фиксированным положением друг относительно друга.

Важным моментом в решении общей проблемы упаковки n-ОМ является конструирование способа упаковки (карты упаковки) (см. [1]).

В докладе предлагается алгоритм покоординатной укладки, состоящий из двух этапов. На первом происходит подготовка n-ОМ к его размещению: каждому n-ОМ сопоставляются n последовательностей прямоугольных блоков (j-кортежей). На втором - нахождение координат начальной точки n-ОМ в объекте с учетом необходимых и достаточных условий допустимости упаковки (см. [2]).

Упаковка n-ОМ в объект сводится к решению n задач размещения кортежей, которыми представляется n-ОМ, по соответствующей координатной оси. При этом размещение j-кортежа работает на определение j-й координаты начальной точки этого n-ОМ в объекте.

Для размещения заготовок определена операция сложения кортежей как сложение их блоков. На этапе сложения j-кортежей учитываются необходимые условия получения допустимого размещения. Если для рассматриваемого многогранника решены n задач размещения его j-кортежей, проверяется достаточное условие - непересечение размещаемого n-ОМ с уже расположенными в объекте элементами.

В докладе предложен метод получения нижней границы упаковки, базирующийся на двойственных функциях. Проведен численный эксперимент.

ЛИТЕРАТУРА

1. Картак В.М., Васильева Л.И. *Модели и методы оптимизации упаковки N-мерных параллелепипедов.* Деп. в ВИНИТИ. №58-В99 от 14.01.1999. - 14 с.
2. Мухачева Э.А., Картак В.М., Петунин А.А., Васильева Л.И. *Задача размещения ортогональных многоугольников: модели и алгоритм покоординатной упаковки.* — Информационные технологии, №3. 2008. - С. 34-42.

АЛГОРИТМЫ С ОЦЕНКАМИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ТРУДНЫХ ЗАДАЧ НА ГРАФАХ [1]

Э. Х. Гимади

Институт Математики им. Соболева СО РАН, Новосибирский госуниверситет, Новосибирск
e-mail: gimadi@math.nsc.ru

В настоящем докладе дан обзор некоторых результатов, полученных за последние пять лет автором и его коллегами по Институту математики, при разработке эффективных алгоритмов с оценками качества для решения таких трудных задач дискретной оптимизации и исследования операций, как задачи маршрутизации, многоиндексные задачи о назначениях, задачи кластеризации, задачи размещения на графах и сетях и т.п. Часто задачи дискретной оптимизации на графе связаны с отысканием некоторого подграфа экстремального суммарного веса. Некоторые такие задачи полиномиально разрешимы, например, задача отыскания остовного дерева минимального веса и задача о назначении. Примерами трудноразрешаемых проблем такого рода являются задача коммивояжера и задача поиска клики заданного размера. В последнее время пристальное внимание стало уделяться исследованию задач, в которых в полном взвешенном графе требуется найти не один объект (типа гамильтонова цикла, подстановки, клики, остовного дерева), а несколько (два или более) подобных подграфов, попарно непересекающихся по ребрам. Некоторые из таких расширенных проблем остаются эффективно разрешимыми (например, проблема нахождения нескольких реберно непересекающихся остовных деревьев минимальной суммарного веса). Однако чаще эти задачи являются NP-трудными, и потому для их решения актуальной остается разработка эффективных (полиномиальных) алгоритмов с оценками качества их работы. Некоторые примеры таких алгортимов приведены в работах[1-5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Гимади Э. Х. *Алгоритмы с оценками для некоторых трудных задач дискретной оптимизации в исследовании операций.* — Сборник докладов 9-й междун. конференции. ИОИ 2012: Черногория, г. Будва, 2012. М.: Торус Пресс, С. 234–237.
2. А. Е. Бабурин, Э. Х. Гимади. *Об асимптотической точности эффективного алгоритма решения задачи m-PSP на максимум в многомерном евклидовом пространстве.* — Труды ИММ УрО РАН. — 2010. Том 16, № 3, С. 12–24.
3. Э. Х. Гимади, Ю. В. Глазков, О. Ю. Цидулко. *Вероятностный анализ алгоритма решения трехиндексной m-слойной планарной задачи о назначениях на одноциклических подстановках.* — Дискретный анализ и исследование операций, 2014, Том 21, № 1, С. 10–19.
4. Э. Х. Гимади, А. В. Кельманов, А. В. Пяткин, М. Ю. Хачай. *Эффективные алгоритмы для некоторых задач поиска нескольких клик в полном неориентированном графе.* — Труды ИММ УрО РАН. — 2014. Том 2, № 2.
5. Э. Х. Гимади, А. А. Курочкин. *Эффективный алгоритм решения двухэтапной задачи размещения на древовидной сети.* — Дискретный анализ и исследование операций. 2012. Том 19, № 6. С. 9–22.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 12-01-00093 и 12–01–33028 mol-a-ved), целевой программы президиума РАН (проект № 227) и междисциплинарного интеграционного проекта ИМ СОРАН (№ 7Б).

ЭФФЕКТИВНЫЕ АЛГОРИТМЫ С ОЦЕНКАМИ ТОЧНОСТИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ПОИСКА НЕСКОЛЬКИХ КЛИК В ПОЛНОМ НЕОРИЕНТИРОВАННОМ ВЗВЕШЕННОМ ГРАФЕ[1]

Э. Х. Гимади, А. В. Кельманов, А. В. Пяткин, М. Ю. Хачай

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный университет, Новосибирск,
Институт математики и механики УрО РАН,
Уральский федеральный университет, Екатеринбург
e-mail: gimadi@math.nsc.ru, kelm@math.nsc.ru, artem@math.nsc.ru, mkhachay@imm.uran.ru

Рассматривается следующая

Задача. m-Weighted Clique Problem (m-WCP). *Дано: полный неориентированый взвешенный граф $G = (V, E, a, c)$, где $a\colon V \to \mathbb{R}$, $c\colon E \to \mathbb{R}$, и натуральные числа $L_1, \ldots, L_m$ такие, что $\sum_{i=1}^{m} L_i \leqslant n$. Найти в графе G семейство $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_m\}$ дизъюнктных клик порядков $L_1, \ldots, L_m$ с минимальным суммарным весом вершин и ребер графа, входящих в эти клики.*

В работе показано, что эта задача NP-трудна в сильном смысле как общем случае, так и в двух специальных, но важных случаях — Metric m-WCP и Quadratic Euclidean m-WCP — актуальных, в частности при решении проблем анализа данных и распознавания образов. Обоснован приближенный алгоритм для этих случаев задачи. Этот алгоритм в качестве приближенного решения использует точное решение специальной (вспомогательной) задачи поиска m дизъюнктных звезд. В работе показано, что это точное решение вспомогательной задачи может быть получено с помощью алгоритма транспортного типа за время $O(n^{m+2} \log n)$. При константном числе m искомых звезд представленный точный алгоритм решения вспомогательной задачи полиномиален. Предлагаемый алгоритм имеет ту же временную сложность, что и точный алгоритм решения вспомогательной задачи.

Показано, что для задачи Metric m-WCP гарантированная оценка точности алгоритма равна

$$2\Big(1 - \frac{\sum_{k=1}^{m} S(B_k^*)}{\sum_{k=1}^{m} L_k S(B_k^*)}\Big),$$

где $S(B_k^*)$ — суммарный вес вершин и ребер в k-й звезде вспомогательной задачи, $k = 1, \ldots, m$. Для задачи Quadratic Euclidean m-WCP доказана гарантированная оценка точности, равная 2. Установлено, что обе оценки точности достижимы.

Настоящая работа обобщает и развивает результаты, полученные в [1]. В дальнейшем предполагается расширить предложенный подход к решению других актуальных подклассов задачи m-WCP.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. И. Еремин, Э. Х. Гимади, А. В. Кельманов, А. В. Пяткин, М. Ю. Хачай. *2-приближенный алгоритм поиска клики с минимальным числом вершин и ребер.* Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. — 2013, Т. 19, № 2. с. 134–143.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 12-01-00090, 12-01-00093, 13-01-00210, 13-07-00070, 13-07-00181)

ЗАДАЧА О ДВУХ КОММИВОЯЖЕРАХ НА ГРАФЕ С ОГРАНИЧЕННЫМИ ПРОПУСКНЫМИ СПОСОБНОСТЯМИ РЕБЕР [1]

Э. Х. Гимади, А. М. Истомин, И. А. Рыков

Институт Математики СО РАН, Новосибирский госуниверситет, Новосибирск
e-mail: gimadi@math.nsc.ru, alexeyistomin@gmail.com, rykovweb@gmail.com

Рассматривается задача m коммивояжёров с ограничениями пропускной способности рёбер (m-Capacitated Peripatetic Salesman Problem, далее m-CPSP) [3]: в полном неориентированном взвешенном графе G, каждое ребро e которого имеет заданную пропускную способность $C_e \in \{1, 2, \ldots, m\}$, требуется найти m гамильтоновых циклов экстремального суммарного веса с использованием каждого ребра e не более C_e раз. Рёбра графа принимают значения из целочисленного сегмента $\{1, q\}$, каждое ребро e графа имеет пропускную способность $C_e = 2$ с вероятностью p и $C_e = 1$ с вероятностью $1 - p$. Известно, что задача m-CPSP NP-трудна [3].

В работе [2] для случая задачи 2-CPSP, когда вес каждого цикла оценивается относительно общей весовой функции, предложен приближённый алгоритм решения и престалены оценки его точности.

В настоящей работе рассматривается более общая задача 2-CPSP^d, когда каждый цикл оценивается относительно собственной весовой функции. Тем не менее и для этой задачи удалось показать аналогичные работе [2] результаты, а именно: в предположении, что известен некоторый Δ-приближённый алгоритм решения задачи TSP$_{min}$(TSP$_{max}$) на графе G, построены полиномиальные алгоритмы решения задач 2-CPSP$^d_{min}$ (2-CPSP$^d_{max}$). Обоснованы гарантированные оценки точности алгоритмов в среднем по всем возможным входам.

В частности, для задачи с весами рёбер $\{1, 2\}$, при использовании 7/6-приближенного алгоритма решения TSP_{min} из [4], построен алгоритм решения задачи 2-$CPSP^d_{min}$ с оценкой точности $(19-5p)/12$ в среднем. Соответственно, с использованием 8/9-приближенного алгоритма решения 2-$CPSP^d_{max}$ [1] строится алгоритм решения задачи 2-$CPSP^d_{max}$ [1] с оценкой точности $(25 + 7p)/36$ в среднем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Э.Х.Гимади, Е.В.Ивонина. Приближённые алгоритмы решения задачи о двух коммивояжёрах на максимум // Дискретный анализ и исследование операций, Т. 19, № 1, 2012, С. 17–32.
2. Э. Х. Гимади, А. М. Истомин, И. А. Рыков. О задаче нескольких коммивояжёров с ограничениями на пропускные способности рёбер графа // Дискретный анализ и исследование операций, Т. 20, № 5, 2013, С. 13–30.
3. E. Duchenne, G. Laporte, F. Semet. The undirected m-Capacitated Peripatetic Salesman Problem // European Journal of Operational Research, 2012, 223-3, P. 637–643.
4. C. H. Papadimitriu, M. Yannakakis. The travelling salesman problem with distance One and Two // Math. Oper. Res., 18(1), 1993. P. 1–11.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 12-01-00090а 12-01-00093а, 12-01-33028мол_а_вед, 13-07-00070), целевой программы резидиума РАН (проект № 227) и междисциплинарного интеграционного проекта ИМ СОРАН (№ 7Б).

ABOUT ONE CLASS OF CLUSTERISATION PROBLEMS ON THE NETWORK GRAPH [1]

E. Gimadi[1]
D. Chesnokov[2]
E. Shin[2]

[1]*Novosibirsk, Sobolev institute of Mathematics SB RAS,*
e-mail: gimadi@math.nsc.ru
[2]*Novosibirsk, Novosibirsk State University,*
e-mail: chesnokovds@gmail.com, shinus@gmail.com

Consider an acyclic directed graph $G(V, E)$ with n vertices. For each vertex $v \in V$ there is an initial weight $q(v) > 0$ and also there is its weight $\overline(q)(v)$ in a tree $T = T(V', E') \subset G(V; E)$

$$\overline{q}(v) = \begin{cases} q(v) \text{ , if } v \text{ is not a root of } T, \\ \big(q(v) - \sum\limits_{w \in V' \setminus \{v\}} q(w)\big)^+ \text{ , if } v \text{ is a root of } T, \end{cases}$$

Where $(a)^+ = max(0, a)$. The weight of a tree $T(V', E')$ we define as $\sum\limits_{w \in V'} \overline{q}(w)$.

The problem is to find a subset of edges $\widetilde{E} \subset E$, such that $G(V; \widetilde{E})$ is a directed spanning forest with the minimal total weight.

In paper we proved NP-hardness of a problem in general case, also we defined complexity status on some typical structures of directed graphs, such as: complete acyclic graph, chain, outtree, intree.

Also we discovered two polynomially solvable cases. For problems on chain and on intree with the optimized number of clusters there were constructed exact algorithms with the time complexity $O(n^2)$.

REFERENCES

1. Gimadi E.Kh., Chesnokov D.S., Shin E.Y. *About one class of clusterisation problems on the network graph* — Discrete analysis and operations research. — 2014.

[1]Supported by the Russian Foundation for Basic Research (project No 12-01-00093), and integration project SO RAN and UrO RAN No 7B.

ОБ УСЛОВИЯХ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ТОЧНОСТИ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ m КОММИВОЯЖЕРОВ НА МАКСИМУМ[1]

Э.Х. Гимади, О.Ю. Цидулко

Институт Математики им. Соболева СО РАН, Новосибирский Государственный Университет, Новосибирск
e-mail: gimadi@math.nsc.ru, tsidulko.ox@gmail.com

Задача m коммивояжеров (m-peripatetic salesman problem, далее m-PSP) на максимум формулируется следующим образом. В заданном полном неориентированном взвешенном графе $G = (V, E)$ требуется найти m реберно-непересекающихся гамильтоновых циклов (обходов коммивояжеров) $H_1, \ldots, H_m \subset E$, при которых достигает максимума величина

$$W(H_1, \ldots, H_m) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{e \in H_k} w(e),$$

где $w : E \to R^+$ весовая функция ребер графа G.

Задача m-PSP NP-трудна, как в случае произвольной, так и в случае евклидовой весовой функции [1]. Это стимулирует разработку приближенных алгоритмов для m-PSP с оценками качества получаемых решений.

Ранее в [2] исследовалась задача m-PSP$_{max}$ в многомерном евклидовом пространстве. Для нее был построен $O(n^3)$ приближенный алгоритм и обосновано ограничение на число коммивояжеров m, при котором алгоритм асимптотически точен.

Поскольку в большинстве прикладных задач входные данные представляются числами с фиксированным количеством разрядов, учитывая масштабируемость m-PSP, представляет интерес рассматривать Евклидову m-PSP$_{max}$ в предположении, что вершины графа G лежат в узлах целочисленной решетки. Для этой задачи в данной работе предложен приближенный полиномиальный алгоритм, основанный на идеях из работы [3] и [2]. Временная сложность алгоритма $O(n^3)$. Найдены условия асимптотической точности алгоритма, зависящие от диаметра исходного графа. Для рассматриваемого широкого класса входных данных новый алгоритм обладает лучшими оценками точности по сравнению с алгоритмом из [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. J.B. J.M. DeKort *Lower bounds for symmetric K-peripatetic salesman problems.* — Optimization. — 1991. Vol 22(1), pp. 113–122.
2. А.Е. Бабурин, Э.Х. Гимади *Об асимптотической точности эффективного алгоритма решения задачи m-PSP на максимум в многомерном евклидовом пространстве.* — Труды ИММ УрО РАН. — 2010. т.16, №3, с. 12-24.
3. А.Е. Бабурин, Э.Х. Гимади *Об асимптотической точности одного алгоритма решения задачи коммивояжера на максимум в евклидовом пространстве.* — Дискретный анализ и исследование операций. — 2002. т.9, №4, с. 23-32.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 12-01-00093, 12–01–33028 мол-а-вед), Президиума РАН (проект № 227) и целевых программ СО РАН (интеграционный проект № 7Б).

ПРОЦЕДУРА НИЖНЕЙ ОЦЕНКИ В МЕТОДЕ ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ ДЛЯ ЗАДАЧИ КАЛЕНДАРНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ С ОГРАНИЧЕННЫМИ РЕСУРСАМИ[1]

Е.Н. Гончаров

Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН
e-mail: gon@math.nsc.ru

Рассматривается многономенклатурная одномодальная задача календарного планирования в условиях ограниченных ресурсов. Пусть частичный порядок на множестве работ задается ациклическим ориентированным графом $G = (V, E)$. Каждая работа $j \in V$ характеризуется своей продолжительностью $p_j \in Z^+$ и потребностью $r_i^k(\tau)$ в ресурсе типа k на интервале времени $[\tau - 1, \tau),\ \tau = 1, ..., p_j$. Известны объемы выделяемых ресурсов в каждый момент времени. Все ресурсы являются нескладируемыми.

Необходимо найти расписание выполнения работ с минимальным сроком завершения проекта. При этом должны быть учтены технологические ограничения предшествования работ и ограничения на ресурсы.

$$C_{\max}(S) = \max_{j \in E}(s_j + p_j) \ \longrightarrow \min_{s_j} \tag{1}$$

при ограничениях:

$$s_i + p_i \leq s_j, \quad i \in Pred(j),\ j \in E; \tag{2}$$

$$\sum_{j \in U(t)} r_{jk}(t - s_j) \leq R_t^k, \quad k \in M,\ t = 1, ..., T_k; \tag{3}$$

$$s_j \in \mathbf{Z}^+, \quad j \in E, \tag{4}$$

Данная задача NP–трудна. Для ее решения предлагается использовать метод ветвей и границ. Важное место в его реализации имеет алгоритм вычисления нижней оценки.

В качестве нижней оценки используется решение релаксированной задачи, для которой все ограниченные ресурсы считаются складируемыми. Для решения этой релаксированной задачи используем быстрый асимптотически точный алгоритм [1], время работы которого зависит от числа дуг-работ n как функция порядка $n \log n$, а абсолютная погрешность стремится к нулю с ростом размерности задачи.

Приводятся результаты численных экспериментов, иллюстрирующие характеристики качества нижней оценки, получаемых при помощи этого алгоритма, тестовые примеры для которых были взяты из библиотеки тестовых задач PSPLIB.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гимади Э.Х. *О некоторых математических моделях и методах планирования крупномасштабных проектов* — Модели и методы оптимизации: Тр. АН СССР Сиб. Отд-ние. Институт математики; т.10. Новосибирск: Наука, 1988. с. 89-115

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 13-07-00809)

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ ОКРЕСТНОСТИ ДЛЯ ЗАДАЧИ БАЛАНСИРОВКИ НАГРУЗКИ НА СЕРВЕРЫ

И.А. Давыдов

Новосибирский государственный университет,
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, г. Новосибирск
e-mail: vann.davydov@gmail.com

В докладе рассматривается задача балансировки нагрузки на серверы, возникающая при организации облачного хостинга веб приложений. Имеется набор серверов, на каждом из которых размещены диски (точнее, их образы). На дисках хранятся интернет сайты с разнородной информацией. Пользователи посещают сайты, создавая определенную нагрузку на сервер, на диске которого размещен сайт. Считается, что нагрузка на сайт меняется со временем и характеризуется несколькими параметрами, такими как загрузка центрального процессора сервера, выделение оперативной памяти, использование устройств ввода-вывода и др. Таким образом, по каждому диску известна активность пользователей в течение планового периода. Эта активность позволяет определить нагрузку на каждый сервер в каждый момент времени по каждому параметру. Если нагрузка по каждому параметру не превосходит заданного порога, то сервер находится в рабочем режиме. В противном случае сервер работает с перегрузкой. Чтобы избежать перегрузки, диски можно перемещать с одного сервера на другой. Такое перемещение требует определенных вычислительных затрат. Будем называть их накладными расходами. Предполагается, что для каждого диска известны накладные расходы по каждому параметру при его изъятии с сервера и подключении к любому другому серверу. Начальное распределение дисков по серверам считается известным. Задача состоит в том, чтобы перераспределить диски по серверам и достичь минимальной суммарной перегрузки на всем плановом периоде при ограничениях на накладные расходы по каждому серверу.

Для решения задачи балансировки нагрузки на серверы предложена новая окрестность экспоненциальной мощности. Элементами этой окрестности являются оптимальные решения задачи о назначениях, которая получается при изъятии одного диска с каждого сервера и перераспределения дисков между серверами оптимальным образом. Рассматриваются различные варианты выбора дисков для извлечения. Исследуются алгоритмы локального поиска с рандомизированными версиями такой окрестности. Обсуждаются результаты численных экспериментов. Приводится сравнение с результатами, полученными в работе [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Кочетов Ю. А., Кочетова Н. А. *Задача балансировки нагрузки на серверы.* — Вестник Новосибирского государственного университета. —2013. т. 11, вып. 4, с. 71-76.

МЕТАЭВРИСТИКИ ДЛЯ ЗАДАЧИ БАЛАНСИРОВКИ НАГРУЗКИ НА СЕРВЕРЫ[1]

И.А. Давыдов, А.А. Мельников, А.А. Панин

Новосибирский государственный университет
Автор для переписки: А.А. Мельников
e–mail: melnikov@math.nsc.ru

Мы рассматриваем следующую задачу, возникающую при оптимизации работы облачного хостинга. Разнородные интернет сайты собраны в структуры, называемые дисками. Диски некоторым образом распределены между имеющимся набором серверов. Обработка пользовательских запросов к сайту создает определенную нагрузку на сервер, хранящий диск с данным сайтом. Эта нагрузка характеризуется набором параметров и меняется с течением времени, которое в модели полагается дискретным. По каждому из параметров и в каждый момент времени известна величина суммарной нагрузки, которую создают сайты каждого диска в совокупности.

Если в текущий момент времени нагрузка на сервер по некоторому параметру превосходит заданное пороговое значение, сервер работает с перегрузкой и в обработке запросов пользователей возникают задержки. Для того, чтобы избежать перегрузки, диски можно перемещать с одного сервера на другой. Такое перемещение требует определенных вычислительных затрат, которые будем называть накладными расходами. Предполагается, что для каждого диска известны накладные расходы при его изъятии с сервера и подключении к любому другому серверу. Задача состоит в том, чтобы изменить известное исходное распределение дисков между серверами и достичь минимальной суммарной перегрузки на всем плановом периоде при ограничениях на накладные расходы для каждого сервера.

Насколько нам известно, впервые исследуемая задача рассмотрена в [1], где показано, что она NP–трудна. Для ее решения там же предложен эвристический алгоритм, основанный на линейной релаксации. В данной работе рассматриваются три подхода, основанные на идеях стохастического локального поиска, генетического алгоритма, а также поиска с чередующимися окрестностями. Предлагаемые подходы значительно превосходят предложенный в [1] по точности и скорости работы, о чем свидетельствуют результаты численных экспериментов со случайно сгенерированными входными данными.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю.А. Кочетов, Н.А. Кочетова. *Задача балансировки нагрузки на серверы.* — Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Информационные технологии. — 2013, т.11, вып. 4, с. 71-76.

[1]Работа выполнена в Новосибирском госуниверситете при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (договор № 02.G25.31.0054)

ПОДХОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ СОСТАВЛЕНИЯ УЧЕБНОГО РАСПИСАНИЯ

А.М. Дудченко[1,2], А.А. Лазарев[1,2,3,4]

[1] *Институт Проблем Управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва*
[2] *Московский физико-технический институт (государственный университет), Москва*
[3] *Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Москва*
[4] *Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики Москва*
e-mail: aleksandra.dudchenko@gmail.com

Рассматриваются две задачи составления учебных расписаний. Первая — составление расписаний в зарубежных вузах, когда каждый студент рассматривается отдельно, и вторая — составление расписаний в российских вузах, когда студенты обучаются в группе. Данные задачи относятся к задачам Timetabling («Составления временных таблиц») в расширенной постановке. Первая задача называется Course Timetabling. Вторая задача является расширенной комбинацией задач School Timetabling, когда не учитывается доступность помещений, все группы занимаются в собственных аудиториях и не меняют их, и Course Timetabling, когда учитывается доступность помещений и на одном занятии могут находиться разные группы. Задача составления учебного расписания является NP-полной задачей [1].

Применительно к этим задачам рассматриваются 4 подхода:

- алгоритм гармонического поиска (harmony search) [1];
- нелинейный алгоритм большого потопа (non-linear great deluge) [2];
- алгоритм спаривания пчел (honey-bee mating optimization) [3];
- метод ветвей и сечений (branch-and-cut) [4].

Данные подходы сравниваются и делются выводы по целесообразности их применения в программных продуктах, автоматизирующих составление учебных расписаний вузов.

ЛИТЕРАТУРА

1. M.A. Al-Betar, A.T. Khader *A harmony search algorithm for university course timetabling.* // Annals of Operations Research, 2012, Volume 194, Issue 1 , pp. 3-31.
2. J.H. Obit, D. Ouelhadj, D. Landa-Silva, R, Alfred *An Evolutionary Non-Linear Great Deluge Approach for Solving Course Timetabling Problems.* // International Journal of Computer Science Issues (IJCSI), July 2012, Volume 9, Issue 4, p1.
3. N.R. Sabar, M. Ayob, G. Kendall, R. Qu *A Honey-bee Mating Optimization Algorithm for Educational Timetabling Problems.* // European Journal of Operational Research, 2012, Volume 216, Issue 3, pp. 533-543.
4. E.K. Burke , J. Marecek, A.J. Parkes, H. Rudova *A Branch-and-cut Procedure for the Udine Course Timetabling Problem* // Annals of Operations Research, April 2012, Volume 194, Issue 1 , pp. 71-87.

ПОСТ-ОПТИМАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ВЕКТОРНОЙ БУЛЕВОЙ ЗАДАЧИ ПОРТФЕЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ С КРИТЕРИЯМИ КРАЙНЕГО ОПТИМИЗМА[1]

В.А. Емеличев, Е.В. Устилко

Белорусский государственный университет, Минск
e-mail: emelichev@tut.by

Рассматривается s-критериальный дискретный вариант инвестиционной задачи Марковица [1] с критериями крайнего оптимизма:

$$\max_{x\in X}\ \max_{i\in N_m}\sum_{j\in N_n} e_{ijk}x_j,\quad k\in N_s=\{1,2,\dots,s\},\tag{1}$$

где e_{ijk} — ожидаемая оценка экономической эффективности (доходности) вида $k\in N_s$ j-го проекта в случае, когда рынок находится в i-м состоянии; $X\subset \mathbf{E}^n=\{0,1\}^n$ — множество всех допустимых инвестиционных портфелей $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$, при этом $x_j=1$, если проект $j\in N_n$ реализуется и $x_j=0$ в противном случае. Множество Парето инвестиционной задачи (1) обозначим $P^s(E)$, где $E=[e_{ijk}]\in\mathbf{R}^{m\times n\times s}$. В пространствах $\mathbf{R}^n$ и $\mathbf{R}^s$ зададим произвольную норму Гельдера l_p, $1\le p\le\infty$, а в пространстве $\mathbf{R}^m$ — норму Чебышева l_∞, т. е. под нормой матрицы $E\in\mathbf{R}^{m\times n\times s}$ будем понимать число $\|E\|_{p\infty p}=\|(\|E_1\|_{p\infty},\|E_2\|_{p\infty},\dots,\|E_s\|_{p\infty})\|_p$, где $\|E_k\|_{p\infty}=\|(\|e_{1k}\|_p,\|e_{2k}\|_p,\dots,\|e_{mk}\|_p)\|_\infty$, $k\in N_s$. Здесь $E_k\in\mathbf{R}^{m\times n}$ — k-е сечение матрицы E, а $e_{ik}=(e_{i1k},e_{i2k},\dots,e_{ink})$ — i-я строка этого сечения. Радиусом устойчивости $\rho(m,n,s,p)$ задачи (1), как обычно [2], назовем число $\sup\Xi(p)$, если $\Xi(p)\neq\emptyset$. В противном случае полагаем $\rho(m,n,s,p)=0$. Здесь $\Xi(p)=\{\varepsilon>0:\forall E'\in\Omega(p)\quad (P^s(E+E')\subseteq P^s(E))\}$, $\Omega(p)=\{E'\in\mathbf{R}^{m\times n\times s}:\|E'\|_{p\infty p}<\varepsilon\}$.

Теорема. *При $P^s(E)\neq X$, любых $m,n,s\in\mathbf{N}$ и $p\in[1,\infty]$ справедливы следующие оценки радиуса устойчивости*

$$\varphi\le\rho(m,n,s,p)\le(ns)^{1/p}\psi,$$

где

$$\varphi=\min_{x\notin P^s(E)}\ \max_{x'\in X(x,E)}\ \min_{k\in N_s}\frac{f_k(x')-f_k(x)}{\|x'\|_q+\|x\|_q},\quad \psi=\min_{x\notin P^s(E)}\ \max_{x'\in X(x,E)}\ \min_{k\in N_s}\frac{f_k(x')-f_k(x)}{\|x'-x\|_1},$$

$$X(x,E)=\{x'\in P^s(E):f(x')\ge f(x)\quad\&\quad f(x')\neq f(x)\},\quad f(x)=(f_1(x),\dots,f_s(x));$$

$$f_k(x)=\max_{i\in N_m}\sum_{j\in N_n}e_{ijk}x_j,\ k\in N_s;\quad 1/p+1/q=1.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. H.M. Markowitz *Portfolio selection: efficient diversification of investments.* New Yourk: Willey, 1991, 400 p.
2. В.А. Емеличев, В.В. Коротков *Устойчивость векторной инвестиционной булевой задачи с критериями Вальда.* — Дискретная математика. — 2012, т.24, №3, с. 3-16.

[1]Работа выполнена при частичной поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф13К-078).

О МЕТОДЕ ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ В ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ С ИНТЕРВАЛЬНОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬЮ

О.А. Емец, А.О. Емец

Полтавский университет экономики и торговли, Полтава
e-mail: yemetsli@mail.ru, yemets2008@ukr.net

В докладе обосновывается общий подход в рамках метода ветвей и границ (МВГ) к решению задачи минимизации в интервальной постановке.

Пусть есть функционал $F(x)$, заданный на множестве $X(x \in X)$ - центрированных интервалов; $F(x) \in X$, т.е. значение, которое он принимает, также пусть является элементом множества центрированных интервалов. Пусть $D \subset X$ - допустимое множество центрированных интервалов.

Введем линейный порядок на множестве $A = \{a_1, ..., a_k\}$ центрированных интервалов $a_i = (\alpha_i, \sigma_i)$, $i \in J_k = \{1, 2, ..., k\}$. Введем характеристические сравнители для центрированных интервалов $a_i = (\alpha, \sigma)$: $(\alpha - \sigma, \alpha + \sigma) \subset R^1$, $\sigma \geq 0$:

1) $H_1 = (\alpha, \sigma) = \sqrt{\alpha^2 + \sigma^2} sign(\alpha)$.

2) $H_2 = (\alpha, \sigma) = (|\alpha| + \sigma) sign(\alpha) = \begin{cases} \alpha - \sigma, \ \alpha > 0 \\ \alpha + \sigma, \ \alpha < 0 \end{cases}$, если $H_1(\alpha, \sigma) = H_1(\beta, \delta)$. Тут $sign(\alpha) = 1, alpha > 0$; $sign(\alpha) = 0, alpha = 0$; $sign(\alpha) = -1, alpha < 0$.

3) Если $H_t(a_i) = H_t(a_j)$, $t = 1, 2$, то $\alpha_i \neq 0$, $H_3(a_i) = \alpha_i$, $i \in J_k$.

Такой сравнитель назовем H и обозначим $H =< H_1, H_2, H_3 >$.

Бинарное отношение порядка $\prec$ между интервалами a_i, a_j, $i, j \in J_k$, зададим так.

1) Если $H_1(a_i) < H_1(a_j)$, то $a_i \prec a_j$.

2) Если $H_1(a_i) < H_1(a_j)$, $H_2(a_i) = H_2(a_j)$, то $a_i \prec a_j$.

3) Если $H_1(a_i) = H_1(a_j)$, $H_2(a_i) = H_2(a_j)$, то: или а) $a_i = a_j$ $H_3(a_i) = H_3(a_j)$, говорим по определению: $a_i \prec a_j$ (или $a_j \prec a_i$), потому что $a_i = a_j$; или б) $a_i \neq a_j$, $a_i = (\alpha_i, \sigma_i)$, $a_j = (\alpha_j, \sigma_j)$ и $|\alpha_i| = \sigma_j \neq 0$, $|\sigma_i| = \alpha_j \neq 0$ (в этом случае $\alpha_i \neq \alpha_j$, $\sigma_i \neq \sigma_j$, $H_3(a_i) = \alpha_i$, говорим, что $a_i \prec a_j$, если $H_3(a_i) < H_3(a_j)$; или в) $a_i \neq a_j$, $\alpha_i = \alpha_j = 0$, $\sigma_i \neq \sigma_j$, тогда $H_3(a_i) = \sigma_i$ и $H_3(a_j) = \sigma_j$, если $H_3(a_i) < H_3(a_j)$, то $a_i \prec a_j$.

Теорема. *Бинарное отношение $\prec$ между центрированными интервалами, которое задается сравнителем $H =< H_1, H_2, H_3 >$, - линейный порядок.*

Пусть $A = \{a_1, ..., a_k\}$, $a_1 \prec a_2 \prec ... \prec a_{k-1} \prec a_k$. Максимумом назовем a_k: $a_k = \max_{a_i \in A}\{a_i | i = 1, 2, ..., k\}$; минимумом - a_1: $a_1 = \min_{a_i \in A}\{a_i | i = 1, 2, ..., k\}$.

С использованием операций над центрированными интервалами и определениям элементарных функций [1], задача оптимизации на множестве центрированных интервалов D может быть сформулирована так: найти $\min_{x \in D} F(x)$.

В работе [1] предложен и обоснован МВГ для минимизация функционала на множестве интервалов. Далее необходимы числовые экспериментов для установления рамок практичного применения метода.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сергиенко И.В., Емец О.А., Емец А.О. Задачи оптимизации с интервальной неопределенностью: метод ветвей и границ. — Кибернетика и системный анализ. — 2013. — № 5. — С. 38-50.

О ЗАДАЧЕ КАЛЕНДАРНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ С ПЕРЕМЕННОЙ ИНТЕНСИВНОСТЬЮ ПОТРЕБЛЕНИЯ И ПОСТУПЛЕНИЯ РЕСУРСОВ ВОЗОБНОВИМОГО ТИПА [1]

А.В. Еремеев
Омский филиал Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Омск
e-mail: eremeev@ofim.oscbras.ru
Ю.В. Коваленко
Сибирская государственная автомобильно-дорожная академия, Омск
e-mail: juliakoval86@mail.ru

Рассматривается NP-трудная задача календарного планирования следующего вида. Имеется проект, который состоит из множества взаимосвязанных работ $I = \{1, \ldots, m\}$. Взаимосвязь между работами задается отношениями предшествования вида $i \to j$, где выполнение работы j не может начаться раньше окончания работы i. Прерывание выполнения работ не допускается. При выполнении работ используется n видов возобновимых ресурсов. Каждая работа $i \in I$ характеризуется длительностью $p_i \in \mathbf{Z}^+$ и интенсивностью потребления ресурсов, заданной следующим образом. Длительность работы $i \in I$ разбивается на a_i^q периодов целочисленной длительности, в каждом из которых интенсивность потребления данной работой ресурса q-го вида постоянна, $q = 1, \ldots, n$. В различные моменты времени горизонта планирования количество ресурса каждого вида, имеющегося в наличии, может быть различным. Пусть имеется $b_{\max}^q$ периодов целочисленной длительности, в каждом из которых наличие ресурса q-го вида постоянно, $q = 1, \ldots, n$.

Необходимо построить такое расписание выполнения работ с учетом отношений предшествования на множестве работ и ограничений по ресурсам, при котором минимизируется общее время $C_{\max}$ завершения работ.

В [1, 2] исследовалась задача с одним возобновимым ресурсом. Предложены модели целочисленного линейного программирования и алгоритмы динамического программирования, с помощью которых выделены полиномиально и псевдополиномиально разрешимые случаи.

В настоящей работе представлено обобщение алгоритмов динамического программирования из [1, 2] на случай, когда имеется несколько типов ресурсов. Предлагаемые алгоритмы основаны на переборе всевозможных состояний выполнения работ и вычислении минимальных моментов времени, когда они достижимы. Доказано, что если ширина заданного на множестве работ частичного порядка ограничена константой, то задача псевдополиномиально разрешима, являясь при этом NP-трудной. Найдены новые полиномиально разрешимые случаи.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.В. Еремеев, Ю.В. Коваленко Календарное планирование производства с непрерывным поступлением сырья // Российская конференция «Дискретная оптимизация и исследование операций»: материалы конференции. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2010. С. 138.

2. Ю.В. Коваленко О задаче календарного планирования с возобновимым ресурсом // Автомат. и телемех. 2012. Вып. 6. С. 140–153.

[1]Работа поддержана грантом РФФИ 12-01-00122

МИНИМИЗАЦИЯ ЧИСЛА ОДИНАКОВЫХ СЕКТОРОВ В РЕГУЛЯРНОМ ПОКРЫТИИ ПЛОСКОСТИ[1]

А.И. Ерзин

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
Новосибирский государственный университет, Новосибирск
e-mail: adilerzin@math.nsc.ru

В регулярных покрытиях плоская область разбивается на равные правильные многоугольники (плитки), и все плитки покрываются одинаково с использованием различных фигур [1-3]. В данной работе в качестве плитки используется равносторонний треугольник, а в качестве фигур — одинаковые секторы.

Решается задача построения регулярного покрытия плоскости одинаковыми секторами, в котором число секторов на единицу покрытой площади минимально. Эта проблема тесно связана с задачей построения наименее плотного покрытия (плотность покрытия — это отношение суммы площадей фигур покрытия к площади покрываемой области) [4-6], но не совпадает с ней полностью.

Исследованы различные модели оптимального покрытия правильного треугольника *одним* сектором зависящие от угла сектора. Полученные результаты позволили найти оптимальное число секторов для различных углов сектора, которые покрывают одну плитку в случай, когда каждый сектор участвует в покрытии только одной плитки, и вершины секторов покрывающих одну плитку находятся в одной точке.

Получены аналогичные результаты для регулярных покрытий с плиткой в форме квадрата, а также правильного шестиугольника. Проведён сравнительный анализ моделей покрытия с использованием различных плиток при разных углах сектора. Однако последние результаты не вошли в данный доклад.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. Kershner. *The Number of Circles Covering a Set.* — American J. of Mathematics. — 1939, v. 61, No. 3, p. 665–671.
2. С.Н. Астраков, А.И. Ерзин, В.В. Залюбовский. *Сенсорные сети и покрытие плоскости кругами.* — Дискретный анализ и исследование операций. — 2009, т. 16, № 3, с. 3-19.
3. A.I. Erzin, S.N. Astrakov. *Covering a plane with ellipses.* — Optimization: A J. of Mathematical Programming and Operations Research. — 2013, v. 62, No. 10, p. 1357-1366.
4. Cardei I., Cardei M. Energy-efficient connected-coverage in wireless sensor networks // Int. J. of Sensor Networks, 2008, 3(3), 201-210.
5. N.D. Nguyen, V. Zalyubovskiy, M.T. Ha, T.D. Le, H. Choo. *Energy-efficient models for coverage problem in sensor networks with adjustable ranges.* — Ad hoc Sensor Networks. — 2012, No. 16, p. 1-28.
6. С.Н. Астраков, А.И. Ерзин. *Построение эффективных моделей покрытия при мониторинге протяженных объектов.* — Вычислительные технологии. — 2012, т. 17, № 1, с. 26-34.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 13-07-00139)

РЕШЕНИЕ МИНИМАКСНОЙ ЗАДАЧИ ВЕБЕРА НА ПЛОСКОСТИ С ЗАПРЕЩЕННЫМИ ЗОНАМИ[1]

Г.Г. Забудский, Н.С. Веремчук

Омский филиал Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Омск
zabudsky@ofim.oscsbras.ru, n-veremchuk@rambler.ru

Рассматривается задача Вебера в следующей постановке. На плоскости размещается n точечных объектов $X_1, ..., X_n$ среди m фиксированных $P_1, ..., P_m$. Заданы: запрещенные прямоугольные зоны F_k со сторонами, параллельными осям координат, внутри которых не допускается размещение объектов, $F = \bigcup F_k$, $k = 1, ..., z$; $w_{ij} \geq 0$ и $v_{jk} \geq 0$ — удельные стоимости связей между объектами P_i и X_j, X_j и X_k соответственно. Необходимо разместить объекты вне запрещенных зон таким образом, чтобы максимальное взвешенное расстояние между всеми объектами было минимальным (см. [1, 2]). Математическая модель задачи имеет вид:

$$\max\{\max_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n} w_{ij}d(P_i, X_j), \max_{1\leq j<k\leq n} v_{jk}d(X_j, X_k)\} \to \min, \tag{1}$$

$$X_j \notin Int\ F,\ j = 1, ..., n, \tag{2}$$

где $d(\cdot,\cdot)$ — некоторая метрика, $Int\ F$ — внутренность множества F.

Результаты исследований задачи без ограничений (2) для прямоугольной метрики приведены в [3]. В [1] построены модели целочисленного линейного программирования (ЦЛП) для минимаксного и минисуммного критериев задачи Вебера с запрещенными зонами. Вариант алгоритма ветвей и границ с применением нижней оценки функции (1), вычисленной с помощью определения минимальных расстояний между областями, в которых допускается размещение объектов, предложен в работе [2].

В докладе рассматривается задача (1)–(2) с прямоугольной метрикой. Доказано, что для поиска оптимального решения достаточно рассматривать подмножество допустимых решений, определяемое с учётом решения задач для каждого из размещаемых объектов отдельно. Предложено несколько вариантов нижних оценок целевой функции. Разработан алгоритм ветвей и границ. Проведен вычислительный эксперимент по сравнению эффективности алгоритма и решения с помощью модели ЦЛП и пакета IBM ILOG CPLEX.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г.Г. Забудский. *Построение моделей и решение задач размещения на плоскости с запрещенными зонами.* — Автоматика и телемеханика. — 2006, №12, с. 136-141.
2. Г.Г. Забудский, Н.С. Веремчук. *О минимаксной задаче Вебера на плоскости с запрещенными зонами.* Междунар. конф. "Дискретная оптимизация и исследование операций": Матер. конф. — Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2013, с. 123.
3. H.V. Dearing, R.L. Francis. *A network flow solution to a multifacility minimax location problem involving rectilinear distances.* — Tranportation Science. — 1974, v. 8, p. 126-141.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №13-01-00862)

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ОДНОГО КЛАССА ЗАДАЧ ОБ УПАКОВКЕ МНОЖЕСТВА[1]

Л.А. Заозерская

Институт математики им. С.Л. Соболева, Омск
e-mail: zaozer@ofim.oscsbras.ru

Рассматривается NP-трудная задача об упаковке множества в целочисленной постановке:

$$\max\{cx \mid Ax \le e,\ x \in \{0,\ 1\}^n\},$$

где $A = (a_{ij})_{m\times n}$ – булева матрица, c – n-мерный положительный вектор, $e = (1, ..., 1)^T$ – m-мерный вектор и $x = (x_1, ..., x_n)$ – вектор переменных. Исследуется класс $\mathcal{P}_{n,p}$ задач указанного вида, в котором a_{ij} – независимые случайные величины, причем $\mathbf{P}\{a_{ij} = 1\} = p$, $\mathbf{P}\{a_{ij} = 0\} = 1 - p$, где $p \in (0,\ 1)$, $i = 1, ..., m$, $j = 1, ..., n$. Ранее в [1, 2] были получены полиномиальные верхние оценки среднего числа итераций для ряда алгоритмов, основанных на аппарате непрерывной оптимизации, для некоторых подклассов задач из $\mathcal{P}_{n,p}$.

В докладе представлены результаты экспериментального исследования свойств задач из этого класса (величины разрыва двойственности, мощности L-накрытия и числа допустимых решений). Анализируется процесс решения задач из $\mathcal{P}_{n,p}$ некоторыми алгоритмами отсечения, алгоритмом ветвей и границ (схема Лэнд и Дойг), алгоритмом перебора L-классов. В частности, экспериментальный анализ первого алгоритма Гомори и его модификации, предложенной в [1], показал преимущество модифицированного варианта алгоритма над классическим как по времени работы, так и по числу итераций. С увеличением интервала для коэффициентов целевой функции это преимущество становиться все более заметным. Полученные результаты предполагается использовать для повышения эффективности алгоритмов решения задач об упаковке множества.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л.А. Заозерская, А.А. Колоколов *О среднем числе итераций некоторых алгоритмов для решения задачи об упаковке множества.* – Труды XIV Байкальской международн. школы-семинара «Методы оптимизации и их приложения»– Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2008. – Т. 1. – С. 388-395.
2. A.A. Kolokolov, L.A. Zaozerskaya *On the Approach of Obtaining the Upper Bounds on the Average Number of Iterations of Some Integer Programming Algorithms.* – Proc. of II International Conference «Optimization and applications» – Petrovac, Montenegro, September 25 – October 2, 2011. – М.: ВЦ РАН, 2011. – С. 137-140.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект №13-01-00862)

О НЕКОТОРЫХ МЕТОДАХ ПОИСКА ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О КРАТЧАЙШИХ ПУТЯХ НА БОЛЬШОМ ГРАФЕ

А.В. Зиновьев

Омский государственный университет, Омск
e-mail: zaleslaw.sin@gmail.com

Актуальность моделирования и решения задач на больших данных (BigData) с развитием вычислительных мощностей возрастает. Уже в XVI веке возникали задачи, связанные с обработкой больших массивов данных, среди которых можно выделить такие направления, как астрономические наблюдения и вычисления траекторий планет, прогнозирование погоды и природных катастроф, обработка данных торговых операций и поиск оптимальных морских маршрутов.

Значительное количество исследуемых объектов в сфере BigData может быть представлено в виде графа большого размера. В качестве примеров для исследования можно привести следующие большие графы: web–граф, являющийся одной из математических моделей Интернета, граф почтовых сообщений Gmail, дорожной граф Европы, граф друзей на Facebook, граф знаний Google (Google Knowledge Graph), граф цитирования, построенный по базе научных публикациий (citation graph). Количество вершин и ребер в таких графах исчисляется миллионами и миллиардами. Обычные алгоритмы, в том числе и алгоритмы поиска кратчайшего расстояния Дейкстры, Флойда-Уоршелла не эффективны и требуют слишком много памяти для хранения промежуточных состояний графа.

В докладе рассматриваются современные подходы к построению, обработке и хранению больших графов, принятые в таких крупных компаниях как Google и Microsoft. Довольно популярным подходом является использование двухфазных алгоритмов ALT (Goldberg, Harrelson, 2005), TN (Geisberger, 2008), HL (Abraham, 2011). Первый этап включает в себя предварительную обработку графа и сохранение результатов в базу данных. Второй этап – выполнение запроса к базе данных и финальные расчеты. Основное предположение состоит в том, что дорожная сеть слабо изменяется со временем и фазу обработки не нужно выполнять слишком часто.

Еще одной областью, где важно уметь корректно работать с большими графами, являются задачи эффективного управления потоками в транспортной системе, построения оптимальных маршрутов, принятия решений по развитию дорожной сети, и в качестве модели сети обычно используется дорожный граф. В работе [1] описан процесс построения дорожного графа на основе актуальных данных о текущем состоянии сети. Однако в описанных выше задачах сеть меняется часто и поэтому двухфазные алгоритмы не применимы. В этом случае была выбран двунаправленный алгоритм Дейкстры с предварительным этапом преобразования дорожной сети к подсети меньшего размера.

В настоящей работе проведен сравнительный анализ двухфазных алгоритмов ALT и TN на дорожном графе России, разработаны рекомендации по использованию различных алгоритмов поиска кратчайших путей в различных ситуациях.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.В. Зиновьев *Моделирование транспортной сети города Омска на основе открытых геоданных.* — Екатеринбург, УрО РАН: Материалы школы-конференции "CSEDays 2012: Graphs theory and applications". — 2012, с. 21-26.

ПОСТРОЕНИЕ МИНИМАЛЬНОГО ПОКРЫТИЯ ЗАВИСИМОСТЕЙ ВКЛЮЧЕНИЯ

В.С. Зыкин

Омский государственный технический университет, Омск
e-mail: vova-z-07@mail.ru

В работе рассматривается автоматическое построение неизбыточного набора связей на схеме базы данных, которые в литературе обычно называются внешними ключами [1].

Формальным основанием для установления связей являются зависимости включения (inclusiondependencies).

Определение 1. *Пусть* $R_i[A_1, ..., A_m]$ *и* $R_j[B_1, ..., B_p]$ *– схемы отношений (не обязательно различные),* $V \subseteq \{A_1, ..., A_m\}$ *и* $W \subseteq \{B_1, ..., B_p\}$, $|V| = |W|$, *тогда объект* $R_i[V] \subseteq R_j[W]$ *называется зависимостью включения, если* $\pi_V(R_i) \subseteq \pi_W(R_j)$.

В определении $|V|$ – мощность множества V, $\pi_V(R_i)$ – проекция отношения R_i по атрибутам V.

Далее рассмотрим определение связей между отношениями БД, которые чаще всего используются в качестве ссылочных ограничений целостности.

Определение 2. *Между отношениями* R_i *и* R_j *существует связь* $L_1(i, j, X)$, *если* $PK(R_i) = PK(R_j)$ *и для любых реализаций* R_i *и* R_j *выполнено* $\pi_X(R_j) \subseteq \pi_X(R_i)$, *где* $X = R_i \cap R_j$ *и* $PK(R_i)$ *– первичный ключ отношения* R_i.

Определение 3. *Между отношениями* R_i *и* R_j *существует связь* $L_M(i, j, X)$, *если* $PK(R_i) \neq PK(R_j)$ *и* $PK(R_i) \subseteq R_j$.

Используя свойства минимального покрытия функциональных зависимостей [2,3], получим следующие свойства зависимостей включения.

Теорема. *Связь* $L(i, j, X)$ *является избыточной, если существуют связи:*

$$L(i, m(1), X_0),\ L(m(1), m(2), X_1), ..., L(m(p), j, X_p), \tag{1}$$

и $X \subseteq PK(i) \subseteq X_s \subseteq R_{m(s)},\ s = 2, 3, ..., p$.

Алгоритм формирования последовательностей (1) является полиномиальным второго порядка относительно общего количества зависимостей включения.

На основе рассмотренного математического аппарата и на основе известного механизма использования связей на схеме БД разработаны алгоритмы автоматического формирования ссылочных ограничений целостности. Доказана корректность и неизбыточность результатов построений. Разработан программный продукт, реализующий автоматическое построение неизбыточного набора связей на схеме базы данных.

ЛИТЕРАТУРА

1. К. Дейт *Руководство по реляционной СУБД DB2.* – М.: Финансы и статистика, 1988, 320 с.
2. М. Мейер *Теория реляционных баз данных.* – М.: Мир, 1987, 608 с.
3. Дж. Ульман *Базы данных на Паскале.* – М.: Машиностроение, 1990, 386 с.

ОПТИМИЗАЦИЯ МЕТРИК В ЗАДАЧАХ С ЧАСТИЧНЫМ ОБУЧЕНИЕМ[1]

Г.В. Иофина, А.В. Минаев, Ю.С. Поляков, Ю.В. Максимов

Московский физико-технический институт, Московская область, Долгопрудный
e-mail: giofina@mail.ru

В докладе рассматривается задача машинного обучения с частичной информацией (semi-supervised learning problem, SSL problem). В классической постановке, входом задачи является l объектов с известным описанием и известной классификацией, а также u объектов с неизвестной классификацией, но известным описанием. При этом полагается, что $u \gg l$. Задача состоит в том, что бы восстановить классификацию неразмеченных объектов, среди которых могут быть объекты не входящие в заданную неразмеченную совокупность. При этом считается, что каждый класс описывается хотя бы одним размеченным объектом из обучающей совокупности.

К решению данной задачи существует множество подходов (см. например [4,5]). Как правило, алгоритмы решения SSL задач состоит из двух этапов. На первом этапе выделяются однородные области, в которых классификация может быть уверенно восстановлена на основе имеющейся размеченной совокупности. На втором этапе решается задача классификации с учетом "пополненной" совокупности.

В настоящей работе рассматриваются методы SSL обучения, основанные на пополнении обучающей совокупности на основе метода ближайших соседей. Классической проблемой непараметрических подходов этого типа (см. [5]) является экспоненциальная зависимость от размерности. Вклад авторов состоит в обобщении результатов работы [5] на случай многих классов. В работе также показано, что правильный выбор функции близости [2,3] с использованием идей, предложенных в [1], позволяет несколько снизить оценки минимального числа необходимых объектов от размерности в случае дискретных шкал.

ЛИТЕРАТУРА

1. N. Goyal, Y. Lifshits,H. Schütze. *Disorder inequality: a combinatorial approach to nearest neighbor search.* — WSDM '08 Proceedings of the International Conference on Web Search and Data Mining. — 2008. P. 25–32.
2. G.V. Iofina. *Optimal metrics in classification problems with ordered features and an arbitrary number of classes.* — Pattern Recognition and Image Analysis. — 2009. Vol. 19. Iss. 2. P. 284–288
3. G.V. Iofina. *A study of metrics in finite sets for application in classification and recognition problems.* — Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2010. Vol. 50. Iss. 3, P. 558–565
4. P. Rigollet. *Generalization Error Bounds in Semi-supervised Classification Under the Cluster Assumption.* — Journal of Machine Learning Research. — 2007. Vol. 8. P. 1369–1392.
5. R. Urner, S. Wulff, S. Ben-David. *PLAL: Cluster-based active learning.* — Journal of Machine Learning Research. Workshop and Conference Proceedings. — 2013. Vol. 30. P. 376–397.

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов №14-07-31241 мол_а и №14-07-31277 мол_а; а также Лаборатории структурных методов анализа данных в предсказательном моделировании, ФУПМ МФТИ, грант правительства РФ дог. 11.G34.31.0073

ON A WAVE APPROACH TO SOLVING OPTIMIZATION PROBLEMS OF LOGISTIC INFRASTRUCTURE

A.L. Kazakov, A.A. Lempert

Institute for System Dynamics and Control Theory of SB RAS, Irkutsk
e-mail: kazakov@icc.ru

The report shows two classical problems of infrastructural logistics: the problem of optimal location of service centres (a particular case of UFLP uncapacitated facility location problem [1, 2]), with segmentation of service areas, and closely associated with it the problem of optimal organizing communications (for connecting logistical centres, e.g. utilities and manufactures) [3,4]. For these problems are given mathematical statements and described algorithms of approximating solution.

At first we examine the special case of Steiner problem with specific constraints in terms of infinitely dimensional optimization. Let a bounded region $D \subseteq R^2$ has m points $A_k(x_k, y_k)$, $k = \overline{1,m}$, and piecewise continuous function $\gamma \geq f(x,y) \geq 0$ defined in D. It's necessary define shortest tree (for example in terms of minimum cost), connected points A_k

$$T(\Gamma_{i,k}) = \min_{\Gamma_{i,k}} \int\limits_{\Gamma_{i,k}} f(x,y) d\Gamma. \tag{1}$$

$$\sum_{i \in I, k \in K} T(\Gamma_{i,k}) \to \min, \tag{2}$$

where $\Gamma_{i,k} \in G_{i,k}$ – a continuous curve, connecting points A_i and A_k and giving a minimum of integral functional (1), $I \cup K = \{1, \ldots, m\}$, $G_{i,k}$ – set of various curves connecting points A_i and A_k.

To solve this problem authors worked out new algorithms, based on the wave approach, which is defined in terms of geometrical optics (Huygens principle [5,6]) and finding of global extremum of integral functional. So let one has an optical inhomogeneous medium. From a source A is beamed light waves. Each point, that is reached the front of the light wave, is secondary light source. We draw a curve of these secondary sources. This curve is the front of light wave. Thus we find the border of wave propagating. Thereby define fronts of the light wave, we can draw the extremal (moved backward at time) as a curve between the light source A and the ultimate point B. Combining this approach with the Dijkstra algorithm we obtain the desired algorithm. Also results of computation are showed.

REFERENCES

1. Z. Drezner, H.W. Hamacher *Facility location: Applications and Theory.* — Berlin, 2004, 456 p.
2. G. Cornuejols, G.L. Nemhauser, L.A. Wolsey *The uncapacitated facility location problem, in Discrete Location Theory.* P.B. Mirchandani, R.L. Francis Eds., New York, 1990, 555 p.
3. A.L. Kazakov, A.A. Lempert *An Approach to Optimization in Transport Logistics.* — Autom. Remote Control,2011, vol. 72, No. 7, pp. 1398-1404.
4. A.L. Kazakov, A.A. Lempert, D.S. Bukharov *On Segmenting Logistical Zones for Servicing Continuously Developed Consumers.* — Autom. Remote Control, 2013, vol. 74. No. 6, pp. 968-977.

5. R.P. Feynman, R.B. Leighton, M. Sands *Lectures on physics.* — 1964, 513 p.
6. V.I. Arnold *Singularities of caustics and wave fronts.* — Dordrecht, 1990, 259 p.

NP-ТРУДНОСТЬ ЗАДАЧИ КАЛЕНДАРНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ ПРОЕКТОВ ПРИ ВОЗМОЖНОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ КРЕДИТОВ[1]

Е.А. Казаковцева, В.В. Сервах

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Омск
e-mail: martynova87@mail.ru, svv_usa@rambler.ru

Рассматривается задача календарного планирования инвестиционных проектов с учетом реинвестирования дохода и возможностью использования кредитов. Имеется множество работ $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ и частичный порядок их выполнения E. Каждая работа $j \in V$ характеризуется длительностью p_j и потоком платежей $c_j(\tau)$, $\tau = 0, 1, \ldots, p_j$. Для реализации проекта выделены финансовые ресурсы $K(t)$, $t = 1, 2, \ldots, T$, где T – период планирования. Задана ставка дисконтирования r_0.

В настоящей работе исследуется постановка, в которой в любой момент времени имеется возможность привлечения кредитных ресурсов под фиксированную процентную ставку $r_k \geq r_0$. В [1] показано, что любой долгосрочный кредит может быть заменен последовательностью годовых кредитов. Это позволяет ввести только один дополнительный тип переменных $D(t)$ – размер кредита, взятого в год t. Тогда модель с кредитами и реинвестированием прибыли имеет следующий вид: построить расписание выполнения работ $S = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$, при котором соблюдается технологический порядок $s_i + p_i \leq s_j, \quad (i, j) \in E$, и в каждый момент времени $t^* = 1, 2, \ldots, T$ сохраняется положительный платежный баланс с учетом взятых кредитов:

$$\sum_{t=1}^{t^*} \left(\frac{K(t)}{(1+r_0)^{t-1}} + \sum_{j \in N_t} \frac{c_j(t - s_j)}{(1+r_0)^{t-1}} + \frac{D(t) - (1+r)D(t-1)}{(1+r_0)^{t-1}} \right) \geq 0,$$

где $N_t = \{j \in V \mid s_j \leq t < s_j + p_j\}$ – множество работ, выполняемых в интервале $[t, t+1)$. Требуется максимизировать чистую приведенную прибыль с учетом выплат по кредитам:

$$NPV(S) = \sum_{j \in V} \sum_{\tau=0}^{p_j} \frac{c_j(\tau)}{(1+r_0)^{s_j+\tau}} + \sum_{t=1}^{T} \frac{D(t) - (1+r)D(t-1)}{(1+r_0)^{t-1}} \to \max.$$

В задаче с кредитами ограничений на ресурсы нет, но за использование дополнительных средств приходится платить, что сказывается на итоговой прибыли. Безресурсная задача календарного планирования полиномиально разрешима. Доказать NP-трудность задачи с кредитами ее сведением к ресурсной постановке непосредственным увеличением ставки по кредитам не удается, так как собственных средств может быть недостаточно для выполнения проекта. В настоящей работе исследована сложность задачи с кредитами и доказана следующая теорема.

Теорема. *Задача календарного планирования проектов при возможности использования кредитов является NP-трудной в сильном смысле.*

Приведен пример, иллюстрирующий необходимость оптимизации кредитов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е.А. Мартынова, В.В. Сервах *О задаче календарного планирования проектов с использованием кредитов.* — Автоматика и телемеханика. — 2012, №3, с. 107-116.

[1]Работа поддержана грантами РФФИ (проекты 12-01-00184а, 12-01-00122) и грантом целевой программы СО РАН (интеграционный проект № 7Б).

ПОСТРОЕНИЕ ФАКТОР – МНОЖЕСТВА ДЛЯ ЗАДАЧИ ОДНОМЕРНОЙ УПАКОВКИ[1]

В.М. Картак, А. В. Рипатти

Башкирский государственный педагогический университет
e-mail: kvmail@mail.ru, ripatti@inbox.ru

В докладе рассматривается классическая задача одномерной упаковки, которая формулируется следующим образом. Одномерный материал длины L необходимо разделить на заготовки меньших длин l_1, l_2, $\ldots$ l_m, m – число предметов. Целью является минимизация количества использованного материала.

Будем говорить, что две задачи $(L, \mathbf{l})$ и $(\tilde{L}, \tilde{\mathbf{l}})$ эквивалентны по структуре если:

$$P(L, \mathbf{l}) = P(\tilde{L}, \tilde{\mathbf{l}})$$

где

$$P(L, \mathbf{l}) = \left\{ \mathbf{a} \; : \; \sum_{j=1}^{m} l_j a_j \leq L, \; \mathbf{a} \in \{0,1\}^m \right\}.$$

Множество $P(L, \mathbf{l})$ задает определенный класс эквивалентности. Показано, что если две задачи одномерной упаковки эквиваленты по структуре, то их пространства решений и значения целевой функции на нем совпадают.

Так как число различных множеств $P(L, \mathbf{l})$ конечно, то все множество всех задач одномерной упаковки при фиксированном m можно разделить на конечное число классов.

В работе предложен алгоритм построения всех возможный множеств $P(L, \mathbf{l})$ при фиксированном m.

С помощью этого алгоритма были найдены минимальные (по числу предметов) примеры не обладающие свойствами целочисленного округления.

Работа поддержана грантом РФФИ 12-07-00631-а.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Rietz, G. Scheithauer and J. Terno. Families of Non-IRUP instances of the one-dimensional cutting stock problem. *Discrete Appl. Math.* 121.1–3 (2002) 229–245.

2. J. Rietz and S. Dempe. Large gaps in one-dimensional cutting stock problems *Discrete Applied Mathematics* 156/10 (2008) 1929–1935.

[1]Работа поддержана грантом РФФИ (проект 12-07-00631-а)

ПРИБЛИЖЁННЫЙ ПОЛИНОМИАЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ БИКЛАСТЕРИЗАЦИИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ[1]

А.В. Кельманов, С.А. Хамидуллин

Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения РАН, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, e-mail: kelm@math.nsc.ru, kham@math.nsc.ru

Рассматривается следующая NP-трудная в сильном смысле [1]

Задача. *Дано: последовательность* $\mathcal{Y} = (y_1, \ldots, y_N)$ *векторов из* $\mathbb{R}^q$, *натуральные числа* $T_{\min}$ *и* $T_{\max}$. *Найти: подмножество* $\mathcal{M} = \{n_1, \ldots, n_M\} \subseteq \mathcal{N} = \{1, \ldots, N\}$ *номеров элементов последовательности* $\mathcal{Y}$ *такое, что*

$$\sum_{j \in \mathcal{M}} \|y_j - \overline{y}(\mathcal{M})\|^2 + \sum_{i \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{M}} \|y_i\|^2 \to \min,$$

где $\overline{y}(\mathcal{M}) = \frac{1}{|\mathcal{M}|} \sum_{i \in \mathcal{M}} y_i$, *при ограничениях*

$$1 \le T_{\min} \le n_m - n_{m-1} \le T_{\max} \le N,\ m = 2, \ldots, M,$$

на элементы набора $\mathcal{M}$.

Задача заключается в разбиении конечной последовательности векторов евклидова пространства на два кластера по критерию минимума суммы квадратов расстояний от элементов кластеров до их центров. Центр первого кластера является оптимизируемой величиной и определяется как среднее значение по всем векторам, образующим этот кластер. Центр второго кластера фиксирован в начале координат. При этом разбиение подчинено условию: разность между номерами последующего и предыдущего векторов, входящих в первый кластер, ограничена сверху и снизу заданными константами. Эта задача индуцируется, в частности, актуальными проблемами помехоустойчивого анализа данных (см. [1], [2] и цитированные там работы).

В работе предложен 2-приближенный полиномиальный алгоритм решения задачи. Алгоритм реализует схему динамического программирования и выполняется за время $\mathcal{O}(N^2(T_{\max} - T_{\min} + q))$. Поскольку $T_{\max} - T_{\min} < N$, алгоритм полиномиален и его трудоемкость можно оценить как $\mathcal{O}(N^2(N + q))$ в общем случае, и как $\mathcal{O}(N^2 q)$ в частном случае, когда $T_{\max} = T_{\min}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кельманов А. В., Пяткин А. В. *О сложности некоторых задач кластерного анализа векторных последовательностей.* — Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2013, Т. 20, № 2, с. 47–57.

2. Кельманов А. В., Пяткин А. В. *О сложности некоторых задач поиска подмножеств векторов и кластерного анализа.* — Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 2009, Т. 49, № 11, с. 2059–2067.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 12-01-00090 и № 13-07-00070)

ТОЧНЫЙ ПСЕВДОПОЛИНОМИАЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ДВУХКЛАСТЕРНОГО РАЗБИЕНИЯ МНОЖЕСТВА ВЕКТОРОВ[1]

А.В. Кельманов, В.И. Хандеев

Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения РАН, Новосибирский государственный университет, Новосибирск
e-mail: kelm@math.nsc.ru, vladimir.handeev@gmail.com

В докладе рассматривается следующая NP-трудная [1] в сильном смысле

Задача. *Дано: множество $\mathcal{Y} = \{y_1, \ldots, y_N\}$ векторов из $\mathbb{R}^q$ и натуральное число M. Найти: разбиение множества $\mathcal{Y}$ на два кластера $\mathcal{C}$ и $\mathcal{Y} \setminus \mathcal{C}$ такое, что*

$$\sum_{y \in \mathcal{C}} \|y - \overline{y}(\mathcal{C})\|^2 + \sum_{y \in \mathcal{Y} \setminus \mathcal{C}} \|y\|^2 \to \min,$$

где $\overline{y}(\mathcal{C}) = \frac{1}{|\mathcal{C}|} \sum\limits_{y \in \mathcal{C}} y$ — центр кластера $\mathcal{C}$, при ограничении $|\mathcal{C}| = M$.

В [2] построен 2-приближённый полиномиальный алгоритм, временная сложность которого есть величина $\mathcal{O}(qN^2)$. В [3] обоснована полиномиальная приближённая схема (PTAS) с временной сложностью $\mathcal{O}(qN^{2/\varepsilon+1}(9/\varepsilon)^{3/\varepsilon})$, где ε — гарантированная оценка относительной погрешности алгоритма. В [4] предложен алгоритм, который при заданных относительной ошибке и вероятности несрабатывания для установленного значения параметра k позволяет находить приближенное решение задачи за время $\mathcal{O}(2^k q(k+N))$, а также найдены условия, при которых алгоритм асимптотически точен и имеет трудоёмкость $\mathcal{O}(qN^2)$.

Основным результатом настоящей работы является псевдополиномиальный алгоритм с временной сложностью $\mathcal{O}(qN(2MD+1)^q)$, где D — максимальное абсолютное значение координат векторов входного множества, гарантирующий оптимальное решение задачи в случае, когда компоненты векторов имеют целочисленные значения, а размерность пространства фиксирована.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.В. Кельманов, А.В. Пяткин *О сложности некоторых задач поиска подмножеств векторов и кластерного анализа.* — Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 2009, т.49, №11, с. 2059-2067.
2. А.В. Долгушев, А.В. Кельманов *Приближённый алгоритм решения одной задачи кластерного анализа.* — Дискретный анализ и исследование операций. — 2011, т.18, №2, с. 29-40.
3. А.В. Долгушев, А.В. Кельманов, В.В. Шенмайер *Приближенная полиномиальная схема для одной задачи кластерного анализа.* Интеллектуализация обработки информации: 9-я международная конференция. Республика Черногория. Сб. докл. М.: Торус Пресс, 2012, с. 242-244.
4. Alexander Kel'manov, Vladimir Khandeev *A randomized algorithm for a clustering problem.* Proceedings of IV International Conference «Optimization and applications» (OPTIMA-2013), Petrovac, Montenegro, September 22–28, 2013, p. 86.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 12-01-00090 и № 13-07-00070)

ПРИБЛИЖЕННЫЕ АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ТРУДНОРЕШАЕМЫХ ЗАДАЧ ПОЛИЭДРАЛЬНОЙ ОТДЕЛИМОСТИ[1]

К.С. Кобылкин

Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург
e-mail: kobylkinks@gmail.com

В докладе рассматривается задача покрытия бихроматического множества точек набором монохроматических шаров применительно к задаче полиэдральной отделимости.

Задача 1. Для заданного множества точек $X = \{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{l}$, где $x_i \in \mathbb{R}^d$, а $y_i \in \{-1, 1\}$, найти такой минимальный по мощности набор непересекающихся шаров $\mathcal{D}$, что для любого $D \in \mathcal{D}$ имеем либо $y = 1$ для всех $z = (x, y) \in X \cap D$, либо $y = -1$ для всякого $z \in X \cap D$.

В обозначениях задачи 1 задача 2 полиэдральной отделимости [2] двух подмножеств A и B множества X с последней координатой $y = 1$ и $y = -1$ соответственно состоит в нахождении такого минимального по мощности набора гиперплоскостей, что всякие две точки $a \in A$ и $b \in B$ строго разделяются некоторой гиперплоскостью в этом наборе.

Оказывается, любое допустимое решение $\mathcal{D}$ мощности N задачи 1 можно легко преобразовать в таковое для задачи 2. При $d = 2$ достаточно за время $O(N \log N)$ построить диаграмму мощности для кругов из $\mathcal{D}$ (обобщение диаграммы Вороного), а затем за время $O(N)$ преобразовать ее в допустимое решение мощности $O(N)$ для задачи 2. При $d > 2$ это преобразование легко сделать за время $O(N^2)$, получая решение мощности $O(N^2)$. Статистический аналог подобного преобразования состоит в том, чтобы для уже разбитых на кластеры данных найти "мягкую" диаграмму мощности с наибольшим отступом [1].

Чтобы дать оценку точности получаемого приближения для задачи 2, введем некоторые обозначения. Пусть k_{opt} — ее оптимальное значение, а N_{opt} — мощность минимального разбиения множества X на "монохроматические" (с одинаковой последней координатой y) подмножества с условием, что выпуклая оболочка каждого из них не содержит точек с противоположной координатой y. Тогда при $d = 2$ точность получаемого приближенного решения задачи 2 можно выразить через точность соответствующего приближенного решения задачи 1 как $O(k_{opt}\Delta)$, где $\Delta = N/N_{opt}$. При $d > 2$ ввиду достижимости оценки $k_{opt} \geq \Theta(\sqrt[d]{N_{opt}})$ точность получаемого приближенного решения задачи 2 будет ниже.

Для приближенного решения задачи 1 адаптируется $O\left(|X|^{\lceil \frac{d}{2} \rceil} (\varepsilon^{-2} \log |X|)^{\lceil (d+1)/2 \rceil}\right)$-процедура приближенного (с точностью $\varepsilon > 0$) поиска шара, содержащего максимальное число точек из A (соответственно, из B), без общих точек с B (соответственно, с A) [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. S. Borgwardt *On soft power diagrams.* — arXiv:1307.3949[cs.LG]. — 2013, 22p.
2. N. Megiddo *On the Complexity of Polyhedral Separability.* — Discrete and Computational Geometry. — 1988, №3, P. 325–337.
3. Aronov B., Har-Peled S. *On approximating the depth and related problems.* — SIAM Journal of Computing. — 2008, Vol. 38. P. 899–921.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Президиума УрО РАН (проекты № 12-П-1-1016, 12-С-1-1017/1), РФФИ (проекты № 13-07-00181, 13-01-00210).

ЭВОЛЮЦИОННЫЕ МОДЕЛИ ДИСКРЕТНЫХ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ НА ОСНОВЕ ФРАГМЕНТАРНЫХ СТРУКТУР

И.В. Козин, Г.Л. Козина

Запорожский национальный университет, Украина
e-mail: ainc00@gmail.com

Для многих задач дискретной оптимизации неизвестны точные алгоритмы полиномиальной трудоемкости. Для этих задач представляет интерес поиск алгоритмов, которые не всегда являются точными, но обладают очень низкой трудоемкостью. Такие алгоритмы получили название "жадных алгоритмов". Жадные алгоритмы лишь иногда приводят к точному оптимальному решению задачи [1]. В большинстве случаев можно рассчитывать лишь на приближенное решение проблемы. Интересен вопрос, на каких классах задач в принципе возможно применение жадного алгоритма для поиска приближенного оптимального решения. Для этого класса задач решение должно иметь простую структуру в виде объединения некоторых элементарных объектов - фрагментов.

Поиски классов дискретных задач, допускающих применение жадных алгоритмов, приводят к различным комбинаторным структурам. В частности - это матроиды [2], гридоиды [3] и наследственные структуры [4]. Однако наиболее общей комбинаторной конфигурацией для подобных задач является фрагментарная структура.

Определение 1. *Фрагментарной структурой* (X, E) *на конечном множестве* X *называется семейство его подмножеств (допустимых фрагментов)* $E = (E_1, E_2, ..., E_n)$, *где* $E_i \subseteq X i = 1, 2, .., n$ *такое, что* $\forall E_i \in E, E_i \neq \emptyset \exists e \in E_i : E_i \backslash \{e\} \in E$

Определение 2. *Фрагмент называется максимальным, если он не является подмножеством никакого другого фрагмента.*

Всякий максимальный фрагмент можно построить из пустого множества, последовательно добавляя к нему элементы так, чтобы на каждом шаге такой процедуры полученное подмножество было допустимым фрагментом.Результат применения алгоритма определяется заданным линейным порядком на множестве X. Таким образом, любой максимальный фрагмент может быть описан некоторой перестановкой элементов множества X.

Наличие фрагментарной структуры позволяет свести ряд оптимизационных задач к задачам оптимизации на множестве перестановок. В свою очередь для задач оптимизации на перестановках применима универсальная эволюционная модель.

ЛИТЕРАТУРА

1. H. Whitney *On the abstract properties of linear dependence.* — American Journal of Mathematics, 1935, vol. 57, No. 3, pp. 509 - 533.
2. G.M. Ziegler *Oriented Matroids Today [Electronic resource].* — The Electronic Journal of Combinatorics: dynamic surveys, http://www.emis.ams.org/journals/EJC/Surveys/ds4.pdf.
3. A. Bjorner *Introduction to greedoids* — Cambridge University Press: Matroid Applications, 1992, 180 p.
4. В.П. Ильев *Задачи на системах независимости, разрешимые жадным алгоритмом.* — Дискретная математика, Т. 21, вып. 4, 2009, С. 85 - 94.

ПРИБЛИЖЕННЫЕ АЛГОРИТМЫ ДЛЯ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИ ЭФФЕКТИВНЫХ РАСПИСАНИЙ [1]

А.В. Кононов

Институт Математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия
e-mail: alvenko@math.nsc.ru

Механизм управления скоростью является одним из главных механизмов, используемых для сокращения потребления энергии в вычислительных системах и портативных компьютерных устройствах. Он основан на динамическом изменении скорости работы процессоров. Пусть процессор работает в промежутке времени $[t_0, t_1]$, и в момент времени $t \in [t_0, t_1]$ скорость процессора равняется величине $S(t)$. Тогда количество энергии, которое он израсходует, равно

$$E = \int_{t_0}^{t_1} (S(t))^\alpha dt,$$

где $\alpha > 1$ — некоторая заданная константа.

Рассмотрим следующую задачу. Множество работ $\mathcal{J} = \{J_1, \ldots, J_n\}$ должно быть выполнено на одном или нескольких процессорах с управляемыми скоростями. Для каждой работы J_j заданы ее время поступления r_j, директивный срок d_j и объем W_j. Длительность работы зависит от скорости ее выполнения. Если работа выполняется с постоянной скоростью S, то требуется $\frac{W_J}{S}$ единиц времени, чтобы работа была закончена. Назовем расписание *допустимым*, если каждая работа выполняется внутри интервала между временем ее поступления и ее директивным сроком. Требуется найти допустимое расписание минимизирующее общий расход энергии.

Большинство задач минимизации расхода энергии при построении допустимых расписаний являются NP-трудными. В докладе приводится обзор методов построения приближенных алгоритмов для этих задач, разработанных в последние пять лет различными группами исследователей [2–4].

ЛИТЕРАТУРА

1. S. Albers *Energy-efficient algorithms* — Communications of the ACM – 2010, Vol. 53, №5, p. 86-96.
2. A. Antoniadis, C.-C. Huang *Non-preemptive speed scaling* — In Proceedings of 13th Scandinavian Symposium and Workshops on Algorithm Theory (SWAT 2012), Lecture Notes in Computer Science, Berlin: Springer — 2012, Vol. 7357 – p. 249–260.
3. E. Bampis, A. Kononov, D. Letsios, G. Lucarelli, M. Sviridenko *Energy efficient scheduling and routing via randomized rounding* — In 33rd IARCS Annual Conference on Foundations of Software Technology and Theoretical Computer Science (FSTTCS 2013), LIPIcs. Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum fuer Informatik – 2013, p. 449-460.
4. G. Greiner, T. Nonner, and A. Souza *The bell is ringing in speed-scaled multiprocessor scheduling.* — In 21st ACM Symposium on Parallelism in Algorithms and Architectures (SPAA 2009), ACM — 2009, p. 11–18.

[1]Работа выполнена при поддержке Российского Гуманитарного Научного фонда (грант РГНФ 13-02-10002)

ЗАДАЧИ АППРОКСИМАЦИИ ГРАФОВ (КЛАСТЕРИЗАЦИИ ВЗАИМОСВЯЗАННЫХ ОБЪЕКТОВ)

А.В. Кононов[1], В.П. Ильев[2], С.Д. Ильева[2]

[1]*Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск*
e-mail: alvenko@math.nsc.ru
[2]*Омский государственный университет, Омск*
e-mail: iljev@mail.ru

Задачи аппроксимации графов являются одной из формализаций задач классификации систем взаимосвязанных объектов, в которых требуется минимизировать число связей между классами и число недостающих связей внутри классов. Постановки и различные интерпретации этих задач можно найти в работах [1-5].

Будем рассматривать *обыкновенные* графы, т. е. графы без петель и кратных ребер. Если $G_1 = (V, E_1)$ и $G_2 = (V, E_2)$ — помеченные обыкновенные графы на одном и том же множестве вершин V, то *расстояние* $d(G_1, G_2)$ между ними определяется как число несовпадающих ребер: $d(G_1, G_2) = |E_1 \setminus E_2| + |E_2 \setminus E_1|$. Обыкновенный граф называется *M-графом*, если каждая его компонента связности является полным графом.

В **задаче аппроксимации графа** для заданного графа $G = (V, E)$ требуется найти ближайший M-граф $M^* = (V, E^*)$. В различных постановках задачи число компонент связности графа M^* может быть произвольным, ограниченным сверху или равным заданному натуральному числу $k \geq 2$. Кроме того, могут накладываться ограничения на размеры компонент связности графа M^*. Изучались также взвешенные варианты задач аппроксимации графов, в которых задана весовая функция $w : V \times V \to Z_+$ и $d(G_1, G_2)$ равно суммарному весу несовпадающих ребер в графах G_1 и G_2. Все варианты задач аппроксимации графов в общем случае являются NP-трудными.

Первоначально задача аппроксимации графа ставилась как задача аппроксимации симметричных бинарных отношений отношениями эквивалентности [5] и активно изучалась в 70-е годы XX в. В последние годы эта задача неоднократно переоткрывалась и независимо изучалась разными авторами под различными названиями (**Correlation Clustering** [3], **Cluster Editing** [4]).

В докладе будет представлен обзор известных и новых результатов, касающихся сложности и алгоритмов приближенного решения задач аппроксимации графов.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.А. Агеев, В.П. Ильев, А.В. Кононов, А.С. Талевнин. *Вычислительная сложность задачи аппроксимации графов.* — Дискрет. анализ и исслед. операций. Серия1. — 2006, т.13, №1, с. 3-15.
2. В.П. Ильев, С.Д. Ильева, А.А. Навроцкая. *Приближенные алгоритмы для задач аппроксимации графов.* — Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2011, т.18, №1, с. 41-60.
3. N. Bansal, A. Blum, S. Chawla. *Correlation clustering.* — Machine Learning. — 2004, vol.56, pp. 89-113.
4. R. Shamir, R. Sharan, D. Tsur. *Cluster graph modification problems.* — Discrete Applied Mathematics. — 2004, vol.144, №1-2, pp. 173-182.
5. C.T. Zahn. *Approximating symmetric relations by equivalence relations.* — J. of the Society for Industrial and Applied Mathematics. — 1964, vol.12, №4, pp. 840-847.

КОМПЬЮТЕРНОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ ДЛЯ ЗАДАЧИ ПОСТРОЕНИЯ КРАТЧАЙШЕГО РАСПИСАНИЯ С МНОГОПРОЦЕССОРНЫМИ РАБОТАМИ [1]

П.А. Кононова

Институт Математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия
e-mail: polik83@ngs.ru

В докладе рассматриваются задачи теории расписаний, в которой каждая работа одновременно выполняется на заданном множестве параллельных машин. Данная модель отличается от классических моделей теории расписаний, в которых предполагается, что работа в каждый момент времени обслуживается не более чем одной машиной. Однако, новая модель позволяет описывать процесс выполнения работ в современных компьютерных системах с распределенной памятью. Задачи теории расписаний с многопроцессорными работами рассматриваются с середины 80-х годов прошлого столетия (см. [1]). Более полную информацию о различных вариантах этих задач можно найти в обзорной статье Дроздовского [2].

В [3] Севастьянов и Черных предложили метод получения теоретических результатов для цеховых задач теории расписаний с помощью компьютера. В частности, они получили оценку на длину кратчайшего расписания в задаче открытого типа на трех машинах в терминах тривиальной нижней оценки и предложили для ее решения 5/3-приближенный алгоритм.

В данной работе подход Севастьянова и Черных применяется к задачам теории расписаний с многопроцессорными работами. На основе данного подхода разработан и реализован алгоритм ветвей и границ, который позволяет для примеров с небольшим числом машин получать следующие результаты:

- определять точный интервал локализации оптимума в терминах нижней оценки;
- строить приближенный алгоритм полиномиальной трудоемкости с гарантированной оценкой точности;
- выделять нетривиальные полиномиально разрешимые под-случаи;
- и помогает доказывать NP-трудность рассматриваемых задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. H. Krawczyk and M. Kubale *An approximation algorithm for diagnostic test scheduling in multiprocessor systems.* — IEEE Transactions on Computing — 1985, V. 34, p. 869-872.
2. M. Drozdowski *Scheduling multiprocessor tasks - An overview.* — European Journal of Operational Research — 1996, Vol. 2, p. 215-230.
3. S. V. Sevastianov I. D. Tchernykh *Computer-Aided Way to Prove Theorems in Scheduling* — Proc. of ESA98 - Lecture Notes in Computer Science, Springer, Germany — 1998, V. 1461, p. 502-513.

[1]Работа выполнена при поддержке Российского Гуманитарного Научного фонда (грант РГНФ 13-02-10002)

АЛГОРИТМ ЛОКАЛЬНОГО ПОИСКА ДЛЯ ДВУХУРОВНЕВОЙ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ ПРЕДПРИЯТИЙ И ВЫБОРА ИХ ДИЗАЙНА

Ю.А. Кочетов, И.С. Соколова

Институт математики им. С.Л.Соболева,
Новосибирский государственный университет, Новосибирск
e-mail: jkochet@math.nsc.ru

Рассматривается двухуровневая задача размещения предприятий, в которой два игрока (лидер и его конкурент) борются за обслуживание клиентов на рынке. Каждый игрок имеет определенный бюджет и старается максимизировать свою долю рынка. Сначала лидер открывает свои предприятия и определяет их привлекательности для клиентов. Зная это решение, конкурент принимает аналогичные решения для своих предприятий. Каждый клиент делит свои заказы между всеми открытыми предприятиями прямо пропорционально их привлекательностям и обратно пропорционально расстояниям до них. Требуется так определить размещение и привлекательности предприятий лидера, чтобы максимизировать его долю рынка [1].

Для решения данной задачи, которую можно рассматривать как игру Штакельберга, разработан алгоритм локального поиска, опирающийся на точные и приближенные решения конкурента. При заданном решении лидера, задача конкурента представляется в виде 0–1 нелинейной задачи о многовариантном рюкзаке и решается методом ветвей и границ. Для получения верхних оценок оптимума релаксируется условие целочисленности переменных. Для полученной таким образом выпуклой задачи с непрерывными переменными применяется градиентный метод. Стохастический локальный поиск используется в корневой вершине дерева ветвлений для получения начального рекорда высокого качества. Кроме того, в ходе локального поиска собирается статистическая информация о получаемых решениях, которая затем используется в новом правиле выбора переменной для ветвления. Для этих целей применяется идея *потайной двери* [2] в новом оригинальном варианте. Вычислительные эксперименты на тестовых примерах из [3] свидетельствуют, что разработанный алгоритм локального поиска требует небольшого числа шагов для получения оптимального или близкого к оптимальному решений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Yu. Kochetov, N. Kochetova, A. Plyasunov. *A matheuristic for the leader–follower facility location and design problem* — Metaheuristic International Conference (MIC 2013), Singapore, August 4–8 2013.

2. M. Fischetti, M. Monaci. *Backdoor branching* — INFORMS Journal on Computing — 2013. — Vol. 25, N 4. — P. 693–700.

3. R. Aboolian, O. Berman, D. Krass. *Competitive facility location and design problem* — Eur. J. Oper. Res. — 2007. — Vol. 182. — P. 40–62.

LP-ЭВРИСТИКА ДЛЯ ЗАДАЧИ БАЛАНСИРОВКИ НАГРУЗКИ НА СЕРВЕРЫ

Н.А. Кочетова

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный университет, Новосибирск
e-mail: nkochet@math.nsc.ru

Рассматривается задача балансировки нагрузки на серверы, возникающей при организации облачного хостинга веб приложений [1]. Имеется набор серверов, на каждом из которых размещены диски (точнее, их образы). На дисках хранятся интернет сайты с разнородной информацией. Пользователи посещают сайты, что создает определенную нагрузку на серверы. Эта нагрузка меняется со временем и характеризуется несколькими параметрами: CPU, RAM и др. По каждому диску известна активность пользователей в течение планового периода. Эта активность позволяет определить нагрузку на каждый сервер в каждый момент времени по каждому параметру. Если нагрузка по каждому параметру не превосходит заданного порога, то сервер находится в рабочем режиме. В противном случае сервер работает с перегрузкой. Чтобы избежать перегрузки, диски можно перемещать с одного сервера на другой. Такое перемещение требует определенных вычислительных затрат. Будем называть их накладными расходами. Предполагается, что для каждого диска известны накладные расходы по каждому параметру при его изъятии с сервера и подключении к любому другому серверу. Начальное распределение дисков по серверам считается известным. Задача состоит в том, чтобы перераспределить диски по серверам и достичь минимальной суммарной перегрузки на всем плановом периоде при ограничениях на накладные расходы по каждому серверу.

Сформулированная задача может быть представлена в терминах частично-целочисленного линейного программирования, что позволяет использовать для ее решения коммерческое программное обеспечение. Однако из-за большого разрыва целочисленности найти точное решение удается только на примерах небольшой размерности. В связи с этим предлагается приближенный алгоритм с апостериорной оценкой уклонения от оптимума. Исходная задача заменяется на соответствующую задачу линейного программирования. Ее точное решение позволяет зафиксировать часть дисков на серверах и сократить размерность задачи. Такой подход последовательно применяется до тех пор, пока число переменных не станет приемлемым для точного решения коммерческим пакетом CPLEX. Приводятся результаты вычислительных экспериментов для 20 серверов и 200 дисков.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кочетов Ю.А., Кочетова Н.А. Задача балансировки нагрузки на серверы // Вестник Новосибирского государственного университета. Серия Информационные технологии. 2013. Том 11, вып. 4. С. 71-76.

ДВУХУРОВНЕВЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ И ИНСТРУМЕНТАРИЙ РАЗРАБОТКИ ПРОГРАММЫ ОСВОЕНИЯ МИНЕРАЛЬНО-СЫРЬЕВОЙ БАЗЫ[1]

С.М. Лавлинский

Институт математики СО РАН, Новосибирск
e-mail: lavlin@math.nsc.ru

Доклад посвящен обсуждению проблемы формирования механизма согласования долгосрочных интересов государства, частного инвестора и населения в процессе освоения минерально-сырьевой базы на принципах государственно-частного партнерства (ГЧП). Содержательную основу подхода составляет концепция активной роли в процессе освоения территории государства, дающего налоговые льготы и берущего на себя не только часть инфраструктурных проектов общего назначения, но и часть затрат, связанных с компенсацией экологических потерь, вызванных реализацией инвестиционных проектов.

Предлагаемый инструментарий исследования проблемы - комбинация модели планирования, генерирующей оптимальный механизм взаимодействия государства и частного инвестора, и модели прогнозирования, назначение которой - подготовка данных для модели планирования и оценка последствий реализации программы развития территории, использующей конкретный механизм ГЧП.

Базовая постановка модели планирования представляет собой задачу двухуровневого целочисленного программирования, где государству отведен верхний уровень, а частному инвестору - нижний, и на входе используются следующие данные:

- набор инвестиционных проектов, реализуемых частным инвестором;
- набор инфраструктурных проектов, реализуемых государством;
- перечень экологических проектов, необходимых для компенсации экологических потерь, вызванных реализацией инвестиционных и инфраструктурных проектов.

Выход модели - программа освоения минерально-сырьевой базы и механизм ГЧП, определяющий раздел затрат в процессе реализации инфраструктурных и экологических проектов между государством и инвестором.

Не все исходные данные задачи планирования могут быть получены непосредственно из имеющихся проектных данных - часть данных предварительно готовится в модели прогнозирования, существенно более подробно представляющей экономику и экологию проектов с одной стороны, и особенности сложившегося хода социально-экономического развития с другой. Организовав итерационный процесс, на каждом шаге которого информационная база модели планирования подправляется сопряженной моделью прогнозирования, мы получаем комплекс экономико-математических моделей, позволяющий поддержать процесс принятия управленческого решения при разработке эффективного механизма ГЧП.

В докладе предполагается расширить базовую постановку с учетом налоговых льгот, а также рассмотреть постановку, в которой на верхнем уровне решается многокритериальная задача.

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 13-06-00023

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ [1]

А.А. Лазарев[1,2,3,4]

[1] *Институт Проблем Управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва*
[2] *Московский физико-технический институт (государственный университет), Москва*
[3] *Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Москва*
[4] *Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики Москва*
e-mail: jobmath@mail.ru

Рассматривались следующие задачи: составление маршрута и расписания движения грузовых вагонов; составление маршрута и расписания движения локомотивов; составление календарного плана строительных и ремонтных работ; составление расписания движения составов по однопутной железной дороге.

Задачи составления маршрута и расписания движения грузовых вагонов может быть сформулирована, как задача нахождения потока максимальной суммарной стоимости в ориентированном (пространственно-временном) графе без циклов с некоторыми дополнительными ограничениями. Так как размерность решаемых практических примеров задачи велика, предлагается следующий способ решения. На первом этапе решается более простая задача без ограничения на целочисленность потока (на заказы могут назначаться части вагонов). На втором этапе допустимое целочисленное решение получается из дробного методом последовательного округления.

Нами был предложен алгоритм решения "дробной"задачи на первом этапе. Основной сложностью решения данной задачи является ее большой размер. Для успешного ее решения переменные задачи генерируется динамически. То есть на каждой итерации алгоритма число "активных"переменных очень мало по отношении к их общему числу, а значение "неактивные"переменных фиксировано к нулю. Предложенный способ решения был протестирован на реальных примерах, предоставленных одним из операторов грузовых перевозок. Примеры содержат от 371 до 1'900 станций, от 1'684 до 7'424 транспортных заказов, от 11 до 17 типов вагонов, от 1'013 до 15'008 вагонов. Горизонт планирования – от 35 до 180 дней. Пространственно-временной граф, составленный на основе заданных примеров, содержит до 300 тысяч вершин и 10 миллионов дуг. Эксперименты показали, что на абсолютном большинстве примеров предложенный алгоритм оказался существенно быстрее (до семи раз) алгоритма, используемого оператором на практике в данный момент.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лазарев А.А., Мусатова Е.Г., Гафаров Е.Р., Кварацхелия А.Г. Теория расписаний. Задачи железнодорожного планирования//Научное издание, М:ИПУ РАН, 2012, 92 с. 2. Лазарев А.А., Мусатова Е.Г., Гафаров Е.Р., Кварацхелия А.Г. Теория расписаний. Управление транспортными системами// Учебное пособие М:Издательство МГУ, 2012, 159 с.

3. R. Sadykov, A. A. Lazarev, V. Shiryaev, A. Stratonnikov. "Solving a Freight Railcar Flow Problem Arising in Russia Workshop on Algorithmic Approaches for Transportation Modelling, Optimization, and Systems ATMOS'2013, Sophia Antipolis, France, September 2013.

[1]Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (13-08-13190-офи_м_РЖД).

СОСТАВЛЕНИЕ РАСПИСАНИЯ ПРОВЕДЕНИЯ РЕМОНТНЫХ РАБОТ НА ДВУХПУТНОЙ ЖЕЛЕЗНОЙ ДОРОГЕ [1]

А.А. Лазарев
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова
Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"
Московский физико-технический институт (государственный университет)
email: jobmath@mail.ru

Н.Ф. Хуснуллин
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
email: nhusnullin@gmail.com

В работе рассматривается задача построения оптимального расписания движения поездов на двухколейной железной дороге при условии, что один из участков между семафорами закрыт.

Пусть существует расписание $\pi^{'}$, предписывающее всем поездам, идущим по направлению к станции назначения проезжать каждый семафор согласно расписанию. Вычисляемое в рамках задачи расписание движения составов учитывает изначально заданные интервалы недоступности отдельных участков, которые задаются в виде набора множеств $E = \{[t^{'}_{i1}, t^{''}_{i1}], [t^{'}_{i2}, t^{''}_{i2}], ...\}$, где i – номер закрытого участка.

Обозначим $C(\pi^{'})$ и $C(\pi)$ – значения окончания прохождения соответствующего участка поездом j для нормативного и вариантного графиков движения поездов соответственно. **Необходимо сформировать новое расписание движения поездов π.** Задачу можно рассмотреть как задачу минимизации взвешенного суммарного запаздывания:

$$\min \sum \omega_j \max\{0, C_j(\pi) - C_j(\pi^{'})\},$$

где ω_j – значимость j поезда.

Для решения задачи использовался метод динамического программирования. Стоит отметить, что для ее решения можно использовать любую регулярную целевую функцию.

Для апробации полученных результатов использовался вариантный график движения поездов при производстве работ на Северной и Октябрьской железных дорогах за 2009-2010 г. Был выбран участок дороги между станциями Кошта и Бабаево, состоящий из 9 семафоров. Согласно нему в сутки в каждую сторону отправляется порядка 50 составов. Текущая реализация алгоритма на 8 ядерном персональном компьютере позволяет найти решение для 80 составов в каждую сторону за 30 минут.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лазарев А.А., Мусатова Е.Г., Гафаров Е.Р., Кварацхелия А.Г. *Теория расписаний. Задачи железнодорожного планирования.* – М.: ИПУ РАН, 2012. – С.92.
2. Лазарев А.А., Мусатова Е.Г., Кварацхелия А.Г., Гафаров Е.Р. *Теория расписаний. Задачи управления транспортными системами.* - М.: Физический факультет МГУ им. М.В.Ломоносова, 2012. – С.160.

[1]Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (13-08-13190-офи_м_РЖД).

ПРИМЕНЕНИЕ РОЕВЫХ АЛГОРИТМОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ С ГИБКИМ СПРОСОМ[1]

Т.В. Леванова, Е.А. Борисевич, О.А. Дубовик

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Омский филиал, Омск
Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, Омск
e-mail: levanova@ofim.oscsbras.ru, borisevich.e.a@gmail.com, olesia.dubovik@yandex.ru

В работе развиваются методы приближённого решения дискретных задач оптимального размещения, основанные на аналогиях с процессами, протекающими в природе. Среди них известны алгоритмы, имитирующие поведение социальных насекомых, например, роя пчёл, колонии муравьёв, светлячков [1, 3].

Предлагаются варианты указанных алгоритмов для задачи размещения, которая состоит в следующем [2]. Имеется дискретное множество точек спроса. В некоторых из них возможно размещение предприятий. Часть этих пунктов уже занята конкурентами, претендующими на долю спроса клиентов. В отличие от многих моделей задач размещения спрос является гибким, т.к. его объём зависит от того, где размещено предприятие и по какому сценарию оно работает. В статье [2] этот спрос называется "эластичным". Требуется открыть новые предприятия и выбрать для них сценарий работы так, чтобы удовлетворить с их помощью наибольшую долю спроса. При этом необходимо учитывать объём установленного бюджета, чувствительность клиентов к расстоянию до предприятий, важность (вес) пунктов спроса и другие факторы.

Разработаны варианты алгоритмов светлячков, пчелиного роя и муравьиной колонии, учитывающие специфику рассматриваемой задачи. Для проведения вычислительного эксперимента созданы наборы тестовых примеров с параметрами, предложенными в [2]. Приводятся результаты сравнительного анализа работы предложенных алгоритмов по ряду показателей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Т.В. Леванова *Некоторые алгоритмы искусственного интеллекта для решения задач оптимального размещения предприятий.* — Труды ИВМиМГ СО РАН. Серия: Информатика. Выпуск 10. — 2011, с. 119-124.
2. R. Aboolian, O. Berman, D. Krass *Competitive Facility Location and Desing Problem.* — European Journal of Operations Research. — 2007, 182(1), pp. 40-62.
3. X.S. Yang *Nature-Inspired Metaheuristic Algorithms.* Luniver Press, 2008, 117 p.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 14-001-00656)

УСИЛЕНИЕ ВЫПУКЛЫХ РЕЛАКСАЦИЙ В НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ КОМБИНАТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ[1]

Ю.В. Максимов

Московский физико-технический институт, Московская область, Долгопрудный
Институт проблем передачи информации РАН, Москва
e-mail: Yuri.Maximov@imag.fr

В докладе рассматриваются ряд классических задач комбинаторной оптимизации (Max-Cut, Max-k-Cut, Correlation clustering; см. [1,3]). Указанные задачи являются, вообще говоря NP-трудными, что по всей видимости исключает возможность построения эффективных численных методов их решения. Классическим подходом к построению приближенных решений указанных задач является построение их выпуклых релаксаций с дальнейшим округлением решения. Методы полуопределенной релаксации(semidefinite programming relaxation) во многих случаях дают наилучшие известные оценки точности решения (иногда эти оценки совпадают с наилучшими возможными, в некоторых дополнительных предположениях [5]).

В настоящей работе показано, что с использованием параметрических методов [2] классические схемы полуопределенной релаксации могут быть усилены. Приводиться соответствующие теоретические результаты, сравнение с результатами классических методик усиления решений [3,6,7,8] и данные численных экспериментов для задач синтеза булевых схем.

ЛИТЕРАТУРА

1. N. Bansal, A. Blum, S. Chawla. *Correlation Clustering.* — Machine Learning. — 2004. Vol. 56. P. 89-–113.
2. F. V. Fomin, D. Kratsch. *Exact Exponential Algorithms.* — Berlin: Springer. 2010. 214 P.
3. A. Frieze, M. Jerrum. *Improved approximation algorithms for MAX k-CUT and MAX BISECTION.* — Integer Programming and Combinatorial Optimization. Lecture Notes in Computer Science. — 1995. Vol. 920. P. 1–13
4. M. X. Goemans, D. P. Williamson. *Improved approximation algorithms for maximum cut and satisfiability problems using semidefinite programming.* — Journal of the ACM (JACM). — 1995. Vol. 42. Is. 6. P. 1115–1145
5. S. Khot. *On the power of unique 2-prover 1-round games.* — Proceedings of the thirty-fourth annual ACM symposium on Theory of Computing(STOC). — 2002. P. 767-–775
6. J.B. Lasserre. *Semidefinite programming vs. LP relaxations for polynomial programming.* — Mathematics of Operational Research. — 2001. V. 27. P. 347–360.
7. L. Lovasz, A. Schrijver. *Cones of matrices and set functions and 0–1 optimization.* — SIAM Journal of Optimization. – 1991. V. 1. P. 166–190.
8. H.D. Sherali, W.P. Adams. *A Reformulation-Linearization Technique for Solving Discrete and Continious Nonconvex Problems.* Boston, MA: Kluwer. 1999. 516 P.

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов №14-07-31241 мол_а и №14-07-31277 мол_а; а также Лаборатории структурных методов анализа данных в предсказательном моделировании, ФУПМ МФТИ, грант правительства РФ дог. 11.G34.31.0073

ОПТИМИЗАЦИЯ РИСКА ЗАЕМЩИКА ПРИ ИПОТЕЧНОМ КРЕДИТОВАНИИ [1]

С.А. Малах, В.В. Servах

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Омск
e-mail: malahsveta@mail.ru, svv_ usa@rambler.ru

При оформлении ипотечного кредита заемщику необходимо оценить свои финансовые возможности, так как несвоевременная оплата текущих платежей приводит к штрафам или принудительному расторжению договора. В России около 5 процентов заемщиков прекращают выплаты, и банк, для погашения задолженности, продает заложенные квартиры. Многочисленные публикации, связанные с рисками ипотечного кредитования, посвящены в основном проблемам, с которыми сталкиваются банки. Для заемщиков публикации ограничиваются рекомендациями быть юридически внимательными, контролировать свое финансовое положение путем сопоставления доходов и расходов, и страховать форс-мажерные ситуации. Вместе с тем, заемщик не в меньшей степени нуждается в минимизации риска.

В настоящей работе рассматривается модель минимизации риска заемщика при использовании схемы аннуитетного кредита. Заемщик, имея на руках M рублей, желает приобрести квартиру стоимостью S. Из этих денег формируется резерв размером Z, разность между M и Z вносится как первоначальный взнос, а на сумму $D = S - M + Z$ оформляется кредит по аннуитетной схеме на T месяцев. При аннуитетной схеме ежемесячные платежи равны $R = Dr\frac{(1+r)^T}{(1+r)^T-1}$, где r – месячная ставка по кредиту. Доход заемщика в момент времени t является случайной величиной $\xi(t)$ с известным распределением. Значения S и M фиксированы, величины T и Z определяются заемщиком, а D и R – зависимые переменные.

Риском $P(Z,T)$ будем называть вероятность того, что в некоторый момент времени $t = 1, 2, \dots, T$ у заемщика будет недостаточно денег для погашения текущего платежа. Пусть случайная величина $z(t)$ задает резерв в момент времени t. Алгоритм расчета риска реализуем последовательно для моментов времени $t = 1, 2, \dots, T$. Первоначально риск $P(Z,T)$ полагаем равным нулю, а $z(0) = Z$. Далее организуем цикл по t от 1 до T, вычисляя текущее значение резерва рекуррентно по формуле $z(t) = z(t-1) - R + \xi(t)$. Отрицательные значения этой случайной величины исключаем из дальнейшего рассмотрения, а $P(Z,T)$ увеличиваем на соответствующую вероятность. На выходе алгоритма получаем значение риска в зависимости от срока кредита T и величины резерва Z.

Была написана программа расчета риска и проведен эксперимент, в том числе и на реальных данных. Расчеты показывают, что при фиксированном T функция риска имеет единственный минимум по Z. По параметру T функция риска монотонно убывает, однако с ростом T существенно возрастает переплата по кредиту. В настоящее время исследуется двухкритериальная модель, которая учитывает как риск, так и общие финансовые издержки заемщика.

[1]Работа поддержана грантами РФФИ (проекты 12-01-00184а, 12-01-00122) и грантом целевой программы СО РАН (интеграционный проект № 7Б).

МЕТОД БИНАРНЫХ ОТСЕЧЕНИЙ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С БУЛЕВЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Ю.А. Мезенцев

Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск
e-mail: mesyan@yandex.ru

Доклад посвящен описанию алгоритма одного из методов решения задач линейного программирования с булевыми переменными (ЗЛПБП), а также задач частично-целочисленного линейного программирования, который основывается на использовании бинарных отсечений. Основные материалы доклада предваряет краткий обзор направлений развития методов дискретной оптимизации, теоретических и прикладных аспектов теории дискретной оптимизации. Далее следует теоретическое описание основных положений метода бинарных отсечений (МБО).

Автором разработаны два алгоритма МБО решения общей задачи целочисленного линейного программирования, основанные на процедуре конструирования бинарных отсечений. Первый использует процедуру последовательного конструирования и неявного перебора бинарных отсечений [1], второй является гибридным алгоритмом бинарных отсечений и ветвлений, сочетающим идею метода ветвей и границ с построением отсекающих плоскостей. Подробности и основные положения, лежащие в основе алгоритма бинарных отсечений и ветвлений, опубликованы [2] и являются предметом настоящего доклада. Показано, что при поиске оптимального решения ЗЛПБП достаточно построения $O(n^2)$ правильных бинарных отсечений (ПБО) для линейной релаксации исходной задачи. Поэтому для построения эффективного алгоритма решения ЗЛПБП достаточно разработки полиномиально трудоемкой процедуры синтеза ПБО, чего, однако, на текущий момент времени сделать не удалось.

Вместе с тем, удалось разработать ряд эвристических процедур построения бинарных отсечений, позволивших реализовать быстрые алгоритмы решения задач линейного программирования с булевыми переменными. Реализованные процедуры в общем случае не гарантируют построения правильных отсечений, но полученные апостериорные оценки процента ПБО в общем количестве отсечений и, опосредованно, общего быстродействия, позволили сделать вывод о преимуществе МБО перед другими комбинаторными и гибридными методами решения ЗЛПБП.

Экспериментально подтверждены надежность алгоритма бинарных отсечений и ветвлений и его применимость для решения смешанных частично-целочисленных задач оптимизации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мезенцев Ю.А.*Эффективный алгоритм целочисленного программирования.* Научный вестник НГТУ. – 2009. №2(35), С. 91–114.

2. Мезенцев Ю.А.*Метод бинарных отсечений и ветвлений целочисленного программирования* Доклады академии наук высшей школы РФ. Новосибирск: Изд-во НГТУ 2011. № 1(16) С. 12-25.

ПРИБЛИЖЕННЫЕ АЛГОРИТМЫ ДЛЯ ОБОБЩЕННОЙ ЦЕХОВОЙ ЗАДАЧИ ОТКРЫТОГО ТИПА НА ДВУХ МАШИНАХ С МАРШРУТИЗАЦИЕЙ

А.В. Мельниченко

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
e-mail: annamelnich@mail.ru

В докладе рассматривается задача построения оптимального по длине расписания в системе открытого типа на двух машинах с маршрутизацией. Предполагается, что работы размещены в узлах неориентированной транспортной сети, представляющей собой реберно-взвешенный граф G. Для обслуживания любой работы машина должна переместиться в соответствующую вершину. Время перемещения машины из одной вершины в другую равно длине кратчайшего пути между этими вершинами. Скорости машин одинаковы. Составить "расписание"для такой задачи — значит назначить время начала выполнения операции каждой работы и моменты начала перемещения каждой машины из одной вершины в другую. Длиной расписания называется время от начала старта машин до момента возвращения последней машины в начальную вершину после выполнения всех своих операций. Цель — найти расписание наименьшей длины. Рассматриваемая задача является NP-трудной, т.к. является обобщением классической NP-трудной задачи коммивояжера в метрическом пространстве и цеховой задачи открытого типа на двух машинах. Более того, как показано в [4], рассматриваемая задача — NP-трудна, даже если граф G состоит из двух вершин.

В [1] для рассматриваемой задачи предложен $\frac{13}{8}$-приближенный алгоритм в предположении, что каждая работа обслуживается каждой машиной. В нашей работе предполагается, что для каждой машины задано индивидуальное множество работ, при этом некоторые работы должны быть выполнены на обеих машинах.

Задача возникает в различных приложениях, например, при обработке громоздких объектов, при планировании экскурсий в крупных музеях и др. и рассматривается в работах [1 – 3]. Для решения задачи предлагаются три приближенных алгоритма. Для каждого из них приводится гарантированная оценка точности получаемых решений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Chernykh I., Kononov A., Sevastyanov S. Efficient approximation algorithms for the routing open shop problem.—Computers and Operations Research — 2013; 40(2):841-847.
2. Averbakh I., Berman O., Chernykh I. A $\frac{6}{5}$-approximation algorithms for the two-machine routing open shop problem on a 2-node network.—European Journal of Operation Research — 2005; 166(1):3-24.
3. Shin-Wei Lin, Shuo-Yan Chou, Vincent F.Yu. The museum visitor routing problem.—Applied Mathematics and Computation — 2010; 216(3):719-729.
4. Averbakh I., Berman O., Chernykh I. The routing open shop problem on a network: complexity and approximation.—European Journal of Operation Research — 2006; 173(2):21-39.

МЕТАЭВРИСТИКИ ДЛЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ И ЦЕНООБРАЗОВАНИЯ [1]

А.А. Панин

ИМ СО РАН, Новосибирск
e-mail: aapanin1988@gmail.com

В работе рассматривается двухуровневая частично-целочисленная задача размещения и ценообразования, которая определяется оптимизационными задачами верхнего и нижнего уровня, первая из которых описывает выбор размещения и ценообразования, а вторая моделирует реакцию потребителей на решение верхнего уровня. Т.е. сперва производитель открывает p своих предприятий в конечном множестве возможных мест их размещения и определяет цены в открытых предприятиях на однородную продукцию. Затем каждый потребитель выбирает то предприятие, в котором его суммарные затраты на покупку и транспортировку товара минимальны, и совершает покупку только в том случае, если эти затраты не превышают бюджет. Цель – найти такое размещение и такие цены, при которых достигает максимума прибыль производителя.

Известно, что данная задача является NP-трудной в сильном смысле. Установлена её принадлежность к классу $Poly$-APX. Для ее решения разработаны два алгоритма, основанные на методах локального поиска, поиска с чередующимися окрестностями и генетическом алгоритме. Вычислительный эксперимент проводился на тестовых примерах из библиотеки "Дискретные задачи размещения" [1]. Разработанные алгоритмы показали свою конкурентоспособность в сравнение с алгоритмами SA+VNS, VNS+VNS, изложенными в [2], и пакетом $CPLEX$.

ЛИТЕРАТУРА

1. http://math.nsc.ru/AP/benchmarks/Pricing/price.html
2. Z. Diakova, Yu. Kochetov. *A double VNS heuristic for the facility location and pricing problem* // Electronic Notes in Discrete Mathematics. 2012. Vol. 39. P. 29–34

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 13-07-00016

ГИБРИДНЫЙ ГЕНЕТИЧЕСКИЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО СИНТЕЗА КОММУНИКАЦИОННОЙ СЕТИ[1]

Р.В. Плотников

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
e-mail: nomad87@ngs.ru

Рассматривается следующая задача. Пусть задан простой неориентированный взвешенный граф G с множеством вершин V и множеством ребер E. Пусть $c_{ij} \geq 0$ — *вес* ребра $(i, j) \in E$. Требуется найти остовное дерево T^* графа G, являющееся решением задачи:

$$\sum_{i \in V} \max_{j \in N_i(T)} c_{ij} \to \min_{T},$$

где $N_i(T)$ — множество вершин, смежных с вершиной i в дереве T.

Рассматриваемая задача возникает при минимизации энергопотребления беспроводных коммуникационных сетей, элементы которых способны регулировать дальность передачи данных. При этом потери энергии элемента пропорциональны d^s, где $s \geq 2$, а d — дальность передачи [1]. В этом случае вершины графа G соответствуют элементам сети, а веса рёбер соответствуют потерям энергии на связь между вершинами в течение одного временного такта функционирования сети. Решение задачи позволяет определить для всех элементов сети радиусы передачи данных, при которых сохраняется связность графа и минимизируются суммарные энергозатраты на связь. В англоязычной литературе данную содержательную проблему принято называть Min-Power Symmetric Connectivity Problem [1].

Известно, что рассматриваемая задача является NP-трудной в сильном смысле [2,3]. В данной работе для приближенного решения задачи предлагается генетический алгоритм, в котором в качестве мутации используется новый метод локальных улучшений с чередующимися окретсностями. Проведен численный эксперимент, демонстрирующий высокую эффективность предлагаемого алгоритма.

ЛИТЕРАТУРА

1. E. Althaus, et al. *Power Efficient Range Assignment for Symmetric Connectivity in Static Ad Hoc Wireless Networks.* // Wireless Networks, 2006, v. 12, No. 3, p. 287-299.
2. A.E.F. Clementi, P. Penna, R. Silvestri. *On the Power Assignment Problem in Radio Networks.* // Electronic Colloquium on Computational Complexity (ECCC), (054), 2000.
3. L.M. Kirousis, E. Kranakis, D. Krizanc, A. Pelc. *Power consumption in packet radio networks.* // Theoretical Computer Science, 2000, No. 243, p. 289-305.

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 13-07-00139_а

ОПТИМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РЕСУРСОВ МЕЖДУ СЕТЕВЫМИ ПРОЕКТАМИ (НА ПРИМЕРЕ СТРОИТЕЛЬСТВА МАГИСТРАЛЬНОГО ТРУБОПРОВОДА)

Н.И. Пляскина

Институт экономики и организации промышленного производства (ИЭОПП) СО РАН, Новосибирский национальный исследовательский государственный университет (НГУ), Новосибирск
e-mail:pliaskina@hotmail.com

Нами рассматривается строительство магистрального трубопровода в виде ориентированного графа G_{ij}, работы которого (i, j) сгруппированы по проектам (участкам) G_k, имеющим различные приоритеты выполнения, где $1 \leq k \leq n$, n - количество проектов. Каждый из проектов имеет минимально и максимально допустимые вероятности завершения (P^* и P^{**} соответственно) в директивный срок окончания D_k проекта.

Основная идея задачи оптимального распределения ресурсов между проектами состоит в повышении вероятности их завершения в директивные сроки D_k при заданных начальных объемах инвестиционных ресурсах компании C_Σ. Если какой-либо из проектов D_k в момент времени $t \geq 0$ не может быть завершен в директивный срок с допустимой вероятностью, то осуществляется перераспределение оставшихся инвестиционных ресурсов $\sum_{k=1}^{n} C_k(t)$ между проектами G_k.

В качестве целевой функции используется сумма произведений приоритетных коэффициентов проектов и вероятностей их завершения в соответствующие директивные сроки. Необходимо определить значения C_{kt}, при которых целевая функция максимальна:

$$\sum_{k=1}^{n} \{\eta_k \cdot P_k(C_{kt})\} \rightarrow \max,$$

при условиях:
1. $P_k^* \leq P_k(C_{kt}) \leq P_k^{**}, \quad 1 \leq k \leq n,$
2. $\sum\limits_{k=1}^{n} C_{kt} = \sum\limits_{k=1}^{n} C_k(t),$

где $P_k(C_{kt}) = P(t + T_k(C_{kt}) \leq D_k)$; C_{kt} – инвестиционные ресурсы, выделенные компанией k– му проекту в момент $t \geq 0$, $C_{k0} = C_k$; $C_\Sigma \leq \sum\limits_{k=1}^{n} C_k$ – начальный объем инвестиционных ресурсов компании для реализации всех n проектов; $T_k(C_{kt})$ - случайная продолжительность выполнения k-го проекта, при этом предполагается, что $P_k(C_{kt})$ линейно зависит от C_{kt}; $P_k^* = P_k(C_{kt}^*)$ - вероятность завершения k -го проекта в директивный срок D_k с выделенными ему инвестициями C_{kt}^*; $C_k(t)$ - оставшиеся неиспользованными инвестиционные ресурсы для k -го проекта в момент времени $t \geq 0$; η_k - приоритетный коэффициент (степень важности) проекта.

Для решения задачи нами был разработан пошаговый алгоритм, который реализован методами языка C++ в среде программирования Rad Studio 2010. Алгоритм апробирован на примере распределения финансовых ресурсов по участкам строительства магистрального трубопровода Восточная Сибирь - Тихий океан (ВСТО). При некоторых ограничениях модель позволяет получить точное решение.

ДВУХУРОВНЕВЫЕ МОДЕЛИ ПЛАНИРОВАНИЯ ГОСУДАРСТВЕННО-ЧАСТНОГО ПАРТНЕРСТВА[1]

А.В. Плясунов

Институт математики им. С. Л. Соболева, Новосибирск
e-mail: apljas@math.nsc.ru

В докладе рассматриваются двухуровневые модели планирования, которые применяются для изучения интересной и важной с прикладной точки зрения задачи формирования работоспособного механизма государственно-частного партнерства. Актуальность данных исследований связана с тем, что предлагаемые модели планирования могут быть использованы в реальной практике территориального управления [1]. Эффективность применения такой системы для решения практически важных проблем развития природно-ресурсной сферы во многом зависит от эффективности предлагаемых методов решения задачи планирования.

В работе исследована сложность полученных двухуровневых моделей. Для части постановок, показано, что они является NPO-трудными, а соответствующая задача инвестора является NPO-полной [2]. Отсюда следует, что при выполнении гипотезы $P \neq NP$ не имеет смысла затрачивать усилия на разработку полиномиальных приближенных алгоритмов с гарантированными оценками относительного уклонения от оптимума. По крайней мере без дополнительных предположений на исходные данные, которые позволили бы получить соответствующие полиномиальные приближённые или точные алгоритмы. Для одной из постановок разработан и апробирован приближенный алгоритм, основанный на идеях альтернирующей эвристики и локального поиска [2].

Так как среди анализируемых постановок есть двухуровневые многокритериальные задачи в докладе предполагается привести небольшой обзор результатов в этой области.

ЛИТЕРАТУРА

1. С.М. Лавлинский *Государственно-частное партнерство на сырьевой территории - экологические проблемы, модели и перспективы.* — Проблемы прогнозирования. — 2010. № 1. С. 99-111.
2. С.М. Лавлинский, А.А. Панин, А.В. Плясунов *Двухуровневая модель планирования государственно-частного партнерства.* — Автомат. и телемех. (сдана в печать).

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 13-06-00023

РАСПРЕДЕЛЕННЫЙ МАСШТАБИРУЕМЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ ПРИБЛИЖЕННОГО ПОИСКА БЛИЖАЙШЕГО СОСЕДА В МЕТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ[1]

А.А. Пономаренко

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Лаборатория алгоритмов и технологий анализа сетевых структур, ул. Родионова, 136, Нижний Новгород 603093, Россия
e-mail: aponomaremko@hse.ru

Задача поиска ближайшего соседа является важной составляющей для таких областей как, распознавание образов [1], машинное обучение [2], семантический поиск документов [3].

Задача построения структуры данных для эффективного поиска ближайшего соседа формулируется следующим образом. Для функции метрики $\sigma : U \times U \to R$ определенной на пространстве всевозможных объектов U, требуется так организовать объекты из конечного множества X в структуру данных S, так чтобы операция поиска ближайшего объекта к запросу q из X требовала как можно меньше вычислений функции метрики σ .

Ранее было предложено множество алгоритмов, как для формулировки поиска точного ближайшего соседа, так и для приближенного поиска [5]. Вычислительная сложность всех точных алгоритмов экспоненциально зависит от размерности пространства. Причина этого лежит в «проклятье» размерности [4]. Алгоритмы для приближенной версии задачи, в меньшей степени зависят от размерности пространства.

В докладе речь пойдет об алгоритме построения структуры S для приближенного поиска ближайшего соседа, в виде графа $G(V, E)$, где $V = X$. Предлагается строить граф G обладающий навигационными свойствами тесного мира и содержащий в себе аппроксимированный граф Делоне. В алгоритме поиска основанного на «жадном алгоритме» заложена возможность варьирования точности поиска без необходимости изменений в структуре.

Вычислительные эксперименты на общедоступных тестовых наборах данных, демонстрируют производительность, значительно превосходящую все ранее известные методы.

Алгоритм не использует координатные представления и не требует привлечения свойств линейных пространств, а основан только на вычислении метрики между объектами и потому применим для данных из произвольных метрических пространств.

ЛИТЕРАТУРА

1. T. M. Cover and P. E. Hart *Nearest neighbor pattern classification* Information Theory, IEEE Transactions on, vol. 13, no. 1, pp. 21-27, Jan. 1967
2. Salzberg, S. Cost, and Steven *Weighted Nearest Neighbor Algorithm for Learning with Symbolic Features*, Machine Learning, vol. 10, no. 1, pp. 57-78, 1993
3. S. Deerwester, S. Dumais, G. Furnas, T. Landauer, and R. Harshman *Indexing by Latent Semantic Analysis*, J. Amer. Soc. Inform. Sci., vol. 41, pp. 391-407, 1990
4. E. Chavez, G. Navarro, R. Baeza-Yates, and J. L. Marroquin, *Searching in metric space*, Journal ACM Computing Surveys (CSUR), vol. 33, no. 3, pp. 273-321, Sep. 2001

[1]Работа выполнена при поддержке Лаборатории алгоритмов и технологий анализа сетевых структур НИУ ВШЭ, грант правительства РФ дог. 11.G34.31.0057

УТОЧНЕНИЕ ОЦЕНКИ ВЕСА РЕШЕНИЯ ИНДИВИДУАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ О ПОКРЫТИИ, ПОЛУЧАЕМОГО ЖАДНЫМ АЛГОРИТМОМ

А.В. Пролубников

Омский государственный университет, Омск
e-mail: a.v.prolubnikov@mail.ru

Рассматривается взвешенная задача о покрытии множества [1]. Оценкой точности алгоритма Alg решения задачи о покрытии называется значение $\rho(Alg)$ такое, что $c(Alg)/c(Opt) \leq \rho(Alg)$, где $c(Alg)$ — оценка сверху весов решений индивидуальных задач о покрытии, получаемых алгоритмом Alg, $c(Opt)$ — вес оптимального покрытия.

Как невзвешенная, то есть когда веса всех множеств одинаковы, так и взвешенная задача о покрытии NP-трудны [1]. Как показано в [2], при условии $P \neq NP$ жадный алгоритм — асимптотически лучший приближенный алгоритм для её решения. Пусть Gr — покрытие, получаемое с его помощью, Opt — оптимальное покрытие. Для задачи о покрытии имеет место [3] оценка: $c(Gr)/c(Opt) \leq H(m) \leq \ln m + 1$, где $H(m) = \sum_{k=1}^{m} 1/k$. Эта оценка может быть уточнена для индивидуальной задачи о покрытии: $c(Gr)/c(Opt) \leq H(m')$, где m' — наибольшая из мощностей множеств, входящих в оптимальное покрытие. Поскольку в общем случае эта оценка не улучшаема [4], то для того, чтобы её уточнить для индивидуальной задачи о покрытии, можно использовать дополнительные параметры, расчёт которых имеет небольшую вычислительную сложность. Так как в общем случае нахождение оптимального покрытия — это труднорешаемая задача, то для нахождения уточнения за m' можно принять максимальную мощность среди мощностей множеств. Другим таким параметром является d — наибольшее число множеств, которым может принадлежать покрываемый ими элемент. Оценка $c(Alg)/(Opt) \leq d$ так же как и приведённая выше оценка является неулучшаемой. Оценку гарантированной точности и её уточнения можно получать также для алгоритмов, разработанных для решения отдельных классов задач о покрытии.

Нами даётся новое доказательство логарифмической оценки гарантированного приближения для жадного алгоритма, позволяющее получить уточнение этой оценки для индивидуальной задачи о покрытии. Для большого числа индивидуальных задач это уточнение оказывается лучше, чем уточнение $c(Gr)/c(Opt) \leq H(m')$.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Гэри, Д. Джонсон *Вычислительные машины и труднорешаемые задачи.* — М.: Мир, 1982, с. 194.
2. R. Raz, S. Safra *A Sub-constant Error-probability Low-degree Test, and Sub-constant Error-probability PCP Characterization of NP.* — STOC'97 Proceedings of the Twenty-ninth Annual ACM Symposium on Theory of Computing, 1997, pp. 475-484.
3. V. Chvatal *A Greedy Heuristic for The Set-covering Problem.* — Mathematics of Operation Research, V. 4, No. 3, 1979, pp. 233-235.
4. Feige, U. *A Threshhold of* $\ln n$ *for Approximating Set Cover.* — J. ACM 45, 1998, No. 4, pp. 634-652.

ОБ ИНТЕРВАЛЬНОЙ (1,1)-РАСКРАСКЕ ИНЦИДЕНТОРОВ[1]

А.В. Пяткин

Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН, Новосибирск
e-mail: artem@math.nsc.ru

Правильная реберная раскраска называется *интервальной*, если при каждой вершине множество использованных цветов образует целочисленный интервал (т. е. множество подряд идущих натуральных чисел). Задача построения интервальной раскарски впервые была рассмотрена в [1]. В [3] установлено, что она является NP-трудной даже для двудольных графов. Отметим, что в случае двудольных графов эта задача моделирует проблему построения школьного расписания без окон (доли графа соответствуют учителям и классам, а наличие ребра означает, что учитель ведет урок в этом классе).

Инцидентором в графе называется пара (u, e), состоящая из вершины u и инцидентного ей ребра e. Таким образом, ребро $e = uv$ содержит два инцидентора: (u, e) и (v, e), которые называются *сопряжёнными* друг к другу. Их удобно трактовать как две половины ребра e. Два различных инцидентора, примыкающих к одной и той же вершине, называются *смежными. Интервальной* (1,1)-*раскраской* инциденторов называется отображение множества инциденторов во множество цветов, при котором все смежные инциденторы окрашены в разные цвета, образующие целочисленный интервал, и цвета любых двух сопряженных инциденторов отличаются ровно на 1. Основным результатом работы является следующая

Теорема. *Если в графе существует интервальная раскраска ребер, то в нем также найдется интервальная (1,1)-раскраска инциденторов.*

Из этой теоремы следует истинность высказанной в [2] гипотезы о том, что подразбиение любого интервально раскрашиваемого графа является интервально раскрашиваемым.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. S. Asratian, R. R. Kamalian, Investigation of interval edge-colorings of graphs, Journal of Combinatorial Theory. Series B, 1994. V. 62, № 1. P. 34–43.

2. P. Petrosyan, H. Khachatrian, Interval Non-edge-Colorable Bipartite Graphs and Multigraphs // Journal of Graph Theory, accepted. 2013. DOI: 10.1002/jgt.21759

3. С.В.Севастьянов, Об интервальной раскрашиваемости ребер двудольного графа // Методы дискретного анализа в решении экстремальных задач, вып. 50, ИМ СО АН СССР, Новосибирск, 1990. С. 61–72.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 12-01-00090, № 12-01-00093, № 12-01-00184, № 13-07-00070)

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ГРАДИЕНТНОГО АЛГОРИТМА В ЗАДАЧАХ ВЫПУКЛОЙ ДИСКРЕТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

А.Б. Рамазанов

Бакинский Государственный Университет, Баку, Азербайджан
e-mail: rab-unibank@rambler.ru, ram-bsu@mail.ru

В работе показано, что при возмещении кривизны допустимой области в задачах выпуклой дискретной оптимизации в терминах гарантированных оценок градиентный алгоритм устойчив.

Пусть $Z_+^n(R_+^n)$ – множество n-мерных неотрицательных целочисленных (действительных) векторов, $P \subseteq Z_+^n$ – порядково-выпуклое множество [1].

Рассматривается следующая задача А выпуклой дискретной оптимизации: найти

$$\max\{f(x)|x = (x_1, \ldots, x_n) \in P \subseteq Z_p^n\},$$

где $f(x) \in \Re_p(Z_+^n)$ – неубывающая функция, $\Re_p(Z_+^n)$ – класс p-координатных выпуклых функций.

Через $\theta(p)$ обозначим кривизные множества P [1]. Как обычно [2], градиентный алгоритм называем устойчивым, если гарантированные оценки возмущенной задачи не ухудшаются.

Теорема. *В задаче А градиентный алгоритм устойчив при "малых" возмущениях кривизны множества P.*

Замечание. *Настоящая работа развивает ранее полученные результаты [2].*

ЛИТЕРАТУРА

1. М.М. Ковалев. *Матроиды в дискретной оптимизации.* Минск, 1987, 222 с.
2. A.B. Ramazanov. *On stability of the gradient algorithm in convex discrete optimization problems and related questions* — Discrete Math. and Appl. — 2011, v.21, №4, p. 465-476.

О ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫМИ БЛУЖДАНИЯМИ НА ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ТОЧКАХ ПЛОСКОСТИ[1]

Э.О. Рапопорт

Институт математики СО РАН, Новосибирск
e-mail: rapoport@math.nsc.ru

Имеется k производств,производящих два продукта. Каждое из производств характеризуется своим набором переходных вероятностей: для производства j этот набор будем обозначать через $\{p_{i,j}\}, i = 1, \cdots, n,\ j = 1, \cdots, k.$. Естественно предполагать, что каждое из производств является более предпочтительным к одному из продуктов, при этом все множество блужданий разбивается на две группы по предпочтительности.

Задача состоит в определении в каждой целочисленной точке плоскоскости случайного блуждания из данного набора так, чтобы минимизировать вероятность выхода из первого квадранта.

Пусть $(\cos\varphi, \sin\varphi)$ – цены на продукты. Для каждой пары блужданий (i, j) (по одной из каждой группы) мы можем рассмотреть блуждание на прямой, порожденное этими ценами. Естественно рассматривать только согласованные цены,(введенные в[1]) поскольку только они связаны с оптимальным управлением.

Асимптотика вырождения при с-политике, порожденной согласованными ценами и парой блужданий (i, j), определяется одномерными параметрами $\lambda_{i,j}$, которые можно упорядочить.

В [2] было показано, что для согласованных цен угол φ должен выбираться так, чтобы выполнялись равенства

$$\lambda_{i,j} = \sqrt{\mu^2 + \lambda^2}.$$

Здесь пара (λ, μ) – решение ассоциированной системы (см.[1]), возникающей для соответствующей пары блужданий.

Тем самым, среди множества пар следует выбирать такое, что $\sqrt{\mu^2 + \lambda^2}$ максимально.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рапопорт Э.О. Магистральные стратегии при распределении неделимого ресурса // Дискретный анализ и исследование операций. Серия 1. Т.4, № 1, 1997, С.33-45.

2.Рапопорт Э.О. Распределение неделимого ресурса: оптимальное управление и цены // Сибирский журнал индустриальной математики. Том XII, № 3(39). 2009, с. 75-84.

[1]Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 12-01-00667, № 13-06-00311 и РГНФ № 13-02-00226.

ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В ЗАДАЧЕ ОРТОГОНАЛЬНОЙ УПАКОВКИ[1]

А.В. Рипатти[†], В.М. Картак[‡]

[†] *Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа, Россия, e-mail: ripatti@inbox.ru*
[‡] *Башкирский государственный педагогический университет, Уфа, Россия, e-mail: kvmail@mail.ru*

В работе рассматривается задача минимизации растрового множества (Minimum Raster Set Problem, MRSP), которая формулируется следующим образом. Имеется набор $(L, \mathbf{l}) \in R_+ \times R_+^m$, где $0 < l_1 \le l_2 \le \cdots \le l_m \le L$. Определим растровое множество точек следующем образом

$$R(L, \mathbf{l}) = \left\{ \sum_{j=1}^{m} l_j a_j \;:\; \sum_{j=1}^{m} l_j a_j \le L,\ \mathbf{a} \in \{0,1\}^m \right\}.$$

Будем говорить, что два набора $(L, \mathbf{l})$ и $(\tilde{L}, \tilde{\mathbf{l}})$ эквивалентны друг другу если:

$$P(L, \mathbf{l}) = P(\tilde{L}, \tilde{\mathbf{l}})$$

где

$$P(L, \mathbf{l}) = \left\{ \mathbf{a} \;:\; \sum_{j=1}^{m} l_j a_j \le L,\ \mathbf{a} \in \{0,1\}^m \right\}.$$

Требуется найти набор $(L^*, \mathbf{l}^*)$, эквивалентный $(L, \mathbf{l})$, для которого число растровых точек $|R(L^*, \mathbf{l}^*)|$ минимально.

Эта задача возникает при представлении различных задач дискретной оптимизации как задач линейного целочисленного программирования с числом переменных зависящих от числа растровых точек (Arc-flow models [1,2,3]).

В работе предлагается метод оценки верхних и нижних границ MRSP с помощью линейного программирования. Рассматриваются различные способы построения множества $(L^*, \mathbf{l}^*)$ и выбора целевой функции для получения верхней границы. Предложен метод оценки для нижней границы. Приведены результаты численного эксперимента.

ЛИТЕРАТУРА

1. Clautiaux F., Jouglet A., Carlier J., Moukrim A. *A new constraint programming approach for the orthogonal packing problem.* // Computers and Operations Research. 2008 г. Т. 34, № 8, С. 2223-2250.

2. Lancia, G., Rinaldi, F., Serafini, P. *A time-indexed lp-based approach for min-sum job-shop problems.* // Annals of Operations Research 186, 175–198 (2011).

3. Pessoa, A., Uchoa, E., de Aragao, M., Rodrigues, R. *Exact algorithm over an arctime-indexed formulation for parallel machine scheduling problems.* // Mathematical Programming Computation 2, 259–290 (2010).

[1]Работа поддержана грантом РФФИ (проект 12-07-00631-а)

ПОСТРОЕНИЕ РАСПИСАНИЯ ОБСЛУЖИВАНИЯ ТРЕБОВАНИЙ ПАРТИЯМИ ОГРАНИЧЕННОГО РАЗМЕРА С РАЗЛИЧНЫМИ КРИТЕРИЯМИ[1]

А.А. Романова

Омская юридическая академия,
Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, Омск
e-mail: anna.a.r@bk.ru

Рассмотрим следующую задачу теории расписаний. Производителю необходимо выполнить n_i заказов клиента i, $i = 1, \ldots, s$. Известна длительность p_{ij} выполнения заказа j клиента i, а также директивный срок d_{ij} – время, к которому желательно выполнить этот заказ, $j = 1, \ldots, n_i$, $i = 1, \ldots, s$. Выполнение заказов производителем происходит последовательно. Для доставки клиенту готовые заказы распределяются по партиям. Моментом завершения выполнения заказа считается время завершения выполнения всех заказов партии, в которую данный заказ размещен. Количество партий ограничено числом k, в каждой партии не должно быть более m заказов (предполагается, что $mk \geq n$). Эти условия могут быть связаны, например, с ограниченным количеством транспортных средств у производителя для доставки заказов клиентам. В [3] для случая одного клиента установлена полиномильная разрешимость задачи с критериями минимизации максимального запаздывания $T_{\max}$, суммы моментов завершения C_{Σ}, показана NP-трудность задачи с критерием минимизации суммы взвешенных моментов завершения $C_{\Sigma w}$.

Задача в аналогичной постановке, но с другим критерием исследовалась в [2]. В книге [1] приведен обзор задач обслуживания требований партиями в различных условиях. Наиболее близкими к рассматриваемой задаче по режиму выполнения заказов (последовательное выполнение, одновременное завершение обслуживания) являются задачи с наличием переналадок между партиями и неограниченным размером партий.

В данной работе для задачи с критерием $C_{\Sigma w}$ и одним клиентом предложен алгоритм нахождения приближенного решения, выделены полиномиально разрешимые частные случаи. Рассмотрены три возможные постановки задачи с критерием $T_{\max}$ и несколькими клиентами; для каждой из них предложены и реализованы алгоритмы решения. В ходе проведения вычислительного эксперимента алгоритмы показали хорошие результаты.

ЛИТЕРАТУРА

1. В.С. Танаев, М.Я. Ковалев, Я.М. Шафранский *Теория расписаний. Групповые технологии.* Минск: Институт технической кибернетики НАН Беларуси, 1998.
2. Y. Wang *Models and Algorithms for Some Combinatorial Optimization Problems: University Course Timetabling, Facility Layout and Integrated Production.* Grado Department of Industrial and Systems Engineering. Virginia Tech, Blackburg, USA, 2007.
3. А.А. Романова *Исследование сложности одной задачи выполнения заказов партиями с различными критериями.* Международная конференция “Дискретная оптимизация и исследование операций” : Материалы конференции (Новосибирск, 24-28 июня 2013 г.) — Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2013. С. 184.

[1]Работа поддержана грантом РФФИ 12-01-00122.

АЛГОРИТМЫ С ОЦЕНКАМИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КВАДРАТИЧНЫХ ЗАДАЧ ПОИСКА ПОДМНОЖЕСТВА И ПОДПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ВЕКТОРОВ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ[1]

С.М. Романченко

Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения РАН, Новосибирск
e-mail: rsm@math.nsc.ru

Рассматривается следующая NP-трудная в сильном смысле [1]

Задача. *Дано: последовательность* $\mathcal{Y} = (y_1, \ldots, y_N)$ *векторов из* $\mathbb{R}^q$, *натуральные числа* $M > 1$, $T_{\min}$ *и* $T_{\max}$. *Найти: подмножество* $\mathcal{M} = \{n_1, \ldots, n_M\} \subseteq \{1, \ldots, N\}$ *номеров элементов последовательности* $\mathcal{Y}$ *такое, что*

$$\sum_{n \in \mathcal{M}} \|y_n - \overline{y}(\mathcal{M})\|^2 \to \min,$$

где $\overline{y}(\mathcal{M}) = \frac{1}{|\mathcal{M}|} \sum_{i \in \mathcal{M}} y_i$, *при ограничениях*

$$1 \leq T_{\min} \leq n_m - n_{m-1} \leq T_{\max} \leq N, \; m = 2, \ldots, M,$$

на элементы набора $\mathcal{M}$.

В случае $T_{\min} = 1$ и $T_{\max} = N$ сформулированная задача эквивалентна NP-трудной в сильном смысле [2] задаче поиска «компактного» подмножества во множестве $\mathcal{Y}$. Эти задачи актуальны, в частности, в проблемах помехоустойчивого анализа данных и распознавания образов (см., например, [1], [2] и цитированные там работы).

В работе предложены следующие алгоритмы решения задач.
Для задачи поиска подмножества векторов построены:

- 2–приближённый алгоритм с трудоёмкостью $\mathcal{O}(qN^2)$;
- точный псевдополиномиальный алгоритм с трудоёмкостью $\mathcal{O}(qN(2MB)^q)$ для случая, когда размерность q пространства фиксированна, а компоненты векторов целочисленны, где B — максимальное абсолютное значение компонент входных векторов;
- схема FPTAS, гарантирующая $(1+\varepsilon)$–приближённое решение за время $\mathcal{O}(N^2(M/\varepsilon)^q)$.

Для задачи поиска подпоследовательности обоснованы:

- 2–приближённый алгоритм с трудоёмкостью $\mathcal{O}(N^2(q + N^2))$;
- точный псевдополиномиальный алгоритм с трудоёмкостью $\mathcal{O}(N(q+N^2)(2MB)^q)$ для случая, когда размерность q пространства фиксированна, а компоненты векторов целочисленны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кельманов А.В., Пяткин А.В. *О сложности некоторых задач выбора подпоследовательности векторов* — Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2012. Т. 52, № 12. С. 2284–2291.
2. Кельманов А.В., Пяткин А.В. *NP-полнота некоторых задач выбора подмножества векторов* — Дискрет. анализ и исслед. операций. 2010. Т. 17, № 5. С. 37–45.

[1]Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ №№12-01-00090, 13-07-00070.

МНОГОГРАННИК ЗАДАЧИ АППРОКСИМАЦИИ ГРАФА

Р.Ю. Симанчев, И.В. Уразова

КНИОРП ОНЦ СО РАН, Омский государственный университет, Омск
e-mail: osiman@rambler.ru, urazovainn@mail.ru

В работе рассматривается следующая задача. Пусть $K_n = (V, E)$ – полный обыкновенный граф на n вершинах, G – подграф графа K_n. Через $\mathcal{M}(V)$ обозначим семейство всех подрафов графа K_n, компоненты связности которых являются кликами. Задача аппроксимации графа заключается в нахождении графа $M \in \mathcal{M}(V)$, минимизируещего функционал $\rho(G, M) = |EG \cup EM| - |EG \cap EM|$ на множестве $\mathcal{M}(V)$.
В общем случае эта задача является NP-трудной [1]. Для этой задачи известны некоторые полиномиально разрешимые случаи [2], построены оценки целевой функции [3], разработаны приближенные алгоритмы [4].

Нами рассматривается полиэдральная структура задачи аппроксимации графа. Вектором инциденций подграфа $H \subset K_n$ назовем вектор $x^H \in R^E$, где R^E – пространство, ассоциированное с множеством E, с координатами $x_e^H = 1$, если $e \in EH$ и $x_e^H = 0$, если $e \notin EH$. Соответсвенно, многогранником задачи будет множество $P = conv\{x^M \in R^E | M \in \mathcal{M}(V)\}$.

Теорема 1. *Многогранник P совпадает с выпуклой оболочкой целочисленных решений системы*

$$\begin{aligned} x_{uv} + x_{u\omega} - x_{v\omega} &\le 1 \\ x_{uv} - x_{u\omega} + x_{v\omega} &\le 1 \\ -x_{uv} + x_{u\omega} + x_{v\omega} &\le 1, \\ x_{uv} &\ge 0, \end{aligned} \qquad (1)$$

где $u, v, \omega \in V$ – всевозможные тройки попарно различных вершин.

В этих терминах целевая функция $\rho(G, M)$ при заданном G будет иметь вид

$$f(x) = |EG| + \sum_{e \in E\bar{G}} x_e - \sum_{e \in EG} x_e.$$

Теорема 2. *Каждое ограничение системы (1) определяет фасету многогранника P.*

Кроме того, в работе описаны и другие классы фасетных неравенств для многогранника P. Для некоторых классов приводятся решения задачи идентификации (separation problem).

ЛИТЕРАТУРА

1. Shamir R., Sharan R., Tsur D. *Cluster graph modification problems*//Discrete Applied Mathematics. — 2004. V. 144, N 1-2. P. 173-182.
2. Фридман Г.Ш. *Одна задача аппроксимации графов*// Управляемые системы. — 1971. Вып.8, с. 73-75.
3. Ильев В.П., Фридман Г.Ш. *К задаче аппроксимации графами с фиксированным числом компонент*// Докл. АН СССР. — 1982. Т. 264, N 3, с. 533-538.
4. Ильев В.П., Ильева С.Д., Навроцкая А.А. *Приближенные алгоритмы для задач аппроксимации графов*// Дискрет. анализ и исследование операций. — 2011. Т. 18, N 1, с. 41-60.

ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ ПРИБЛИЖЕННАЯ СХЕМА ДЛЯ ЗАДАЧИ О РАЗБИЕНИИ ПОЛНОГО ЕВКЛИДОВОГО ГРАФА НА ДВА ГАМИЛЬТОНОВЫХ ЦИКЛА МИНИМАЛЬНОГО ВЕСА[1]

М.Ю. Хачай, Е.Д. Незнахина

Институт математики и механики, Екатеринбург
e-mail: mkhachay@imm.uran.ru, eneznakhina@yandex.ru

В классической постановке задачи коммивояжера (TSP) задается полный граф на n вершинах (именуемых городами) так, что каждой паре городов i, j сопоставлен вес $w_{i,j}$. Цель – найти замкнутый маршрут, посещающий все города в точности один раз и имеющий наименьшую стоимость (равную сумме весов соответствующих дуг).

Особый интерес представляет т.н. *евклидова* задача коммивояжера, в которой вершинами графа являются точки в конечномерном евклидовом пространстве размерности, большей 1, а веса дуг определяются расстояниями между инцидентными вершинами. Известно [3], что задача коммивояжера остается труднорешаемой даже в этом частном случае, что обосновывает актуальность разработки приближенных алгоритмов ее решения, обладающих полиномиальной трудоемкостью. Для метрической задачи коммивояжера существует $\frac{3}{2}$-приближенный алгоритм, полученный Н.Кристофидесом [2]. Наиболее важным результатом для задачи коммивояжера в евклидовом пространстве конечной размерности считается полиномиальная аппроксимационная схема (PTAS), обоснованная С.Аророй [1].

Как обычно, полиномиальной аппроксимационной схемой (PTAS) для задачи комбинаторной оптимизации называем семейство алгоритмов, содержащее для каждого фиксированного с > 1 приближенный алгоритм, решающий данную задачу с гарантированной точностью $(1 + \frac{1}{c})$ за время, ограниченное сверху некоторым полиномом от длины записи ее исходных данных.

В данной работе предлагается обобщение PTAS Ароры для евклидовой задачи о двух коммивояжерах на плоскости. Постановка данной задачи отличается от постановки классической задачи коммивояжера тем, что требуется указать два замкнутых, вершинно непересекающихся маршрута минимальной суммарной длины, посещающих все вершины исходного графа по одному разу.

ЛИТЕРАТУРА

1. Arora S. *Polynomial Time Approximation Schemes for Euclidean Traveling Salesman and Other Geometric Problems.* — Journal of the ACM. — 1998, №5, p.753-782.
2. Christofides N. *Worst-case analysis of a new heuristic for the traveling salesman problem.* — In Symposium on New Directions and Recent Results in Algorithms and Complexity. — 1976, p.441.
3. Papadimitriou C. *Euclidean TSP is NP-complete.* — Theoret. Comput. Sci. 4. — 1977, p.237-244.

[1]Работа поддержана грантом РНФ №14-11-00109.

АЛГОРИТМ ЛОКАЛЬНОГО ПОИСКА ДЛЯ ЗАДАЧИ МАРШРУТИЗАЦИИ ТРАНСПОРТНЫХ СРЕДСТВ С НЕОДНОРОДНЫМ АВТОПАРКОМ

А.В. Хмелев

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
e-mail: avhmel@gmail.com

В докладе рассматривается задача маршрутизации транспортных средств с неоднородным ограниченным автопарком (HVRP). Известно, что данная задача является NP-трудной, так как является обобщением классической задачи маршрутизации транспортных средств (VRP). В задаче VRP на складе имеется автопарк идентичных транспортных средств заданной вместимости и множество расположенных на плоскости клиентов. Каждому клиента нужно доставить определенный объем груза. Необходимо минимизировать суммарную длину маршрутов транспортных средств при следующих условиях: все грузы должны быть доставлены клиентам, все маршруты начинаются и заканчиваются на складе, и вместимости транспортных средств не превышены. В задаче HVRP используются транспортные средства различной вместимости, стоимости и удельной стоимости проезда. Требуется минимизировать суммарную стоимость доставки грузов при тех же ограничениях на маршруты транспортных средств [3].

Для решения данной задачи разработан гибридный алгоритм, основанный на идее чередующихся окрестностей. В нем используется шесть известных окрестностей для обмена клиентами между маршрутами. В связи со спецификой задачи эти окрестности используются в комбинации с перераспределением транспортных средств между маршрутами. Также используются три окрестности для перестановки клиентов внутри маршрута. Для ускорения работы алгоритма применяется рандомизация окрестностей и специальная структура данных. Для интенсификации поиска используется три экспоненциальных окрестности, переходы в которых осуществляются по принципу выталкивающих цепей (ejection chains). Для диверсификации поиска в пространстве решений, разработана специальная процедура разбиения большого тура на маршруты. Алгоритм протестирован на известных тестовых примерах с количеством клиентов до 250 [2] и показал свою эффективность в сравнении с другими известными эвристиками [1, 2].

ЛИТЕРАТУРА

1. C. Duhamel , C. Gouinaud, P. Lacomme, C. Prodhon, *A multi-thread GRASPxELS for the heterogeneous capacitated vehicle routing problem.* — Hybrid Metaheuristics, 2013, vol. 434 of Studies in Computational Intelligence, pp. 237–269.
2. P.H.V. Penna, A. Subramanian, L.S. Ochi, *An iterated local search heuristic for the heterogeneous fleet vehicle routing problem.* — Journal of Heuristics, 2013, vol. 19, pp. 201-232.
3. C. Prins, *Two memetic algorithms for heterogeneous fleet vehicle routing problems.* — Engineering Applications of Artificial Intelligence, 2009, vol. 22, n. 6, pp. 916–928.

ЭВРИСТИЧЕСКИЕ АЛГОРИТМЫ ДЛЯ ЗАДАЧИ ПОСТРОЕНИЯ МИНИМАЛЬНОГО ОСТОВНОГО k-ДЕРЕВА [1]

Р.Э. Шангин, П.М. Пардалос, А.В. Панюков

Южно-Уральский государственный университет, Челябинск, Россия
e-mail: shanginre@gmail.com
Университет Флориды, Гейнсвилл, США
e-mail: p.m.pardalos@gmail.com

В настоящей работе рассматривается NP-трудная задача нахождения минимального остовного k-дерева в простом взвешенном графе, известная в зарубежной литературе, как *Minimum Spanning k-tree Problem* (MSkT). Задача MSkT является обобщением задачи нахождения минимального остовного дерева [1]. Такую задачу необходимо решать при проектировании надежной телекоммуникационной сети наименьшей стоимости [2].

Определение. [3] *Связный неориентированный граф называется k-деревом, если его построение возможно осуществить рекурсивно по правилам: полный граф из $k+1$ вершин есть k-дерево; k-дерево с $i+1$ вершинами получается из k-дерева с i вершинами добавлением в него новой вершины j и k ребер таким образом, чтобы новая вершина j стала смежной со всеми вершинами некоторой клики размера k.*

Формулировка задачи MSkT следующая. Пусть $G = (V, E)$ – полный взвешенный граф, с множеством вершин V (телекоммуникационные терминалы) и множеством ребер E (возможные связи между терминалами), причем для каждого ребра $[i, j] \in E$ задан его вес $w(i, j) \geq 0$, равный стоимости прокладки кабеля или трансляции сигналов между терминалами i и j. Обозначим $T(G)$ – множество всех остовных k-деревьев в графе G. Пусть $w(T)$ – суммарный вес ребер остовного k-дерева $T \in T(G)$. Требуется найти остовное k-дерево T^* минимального веса в полном взвешенном графе G, то есть $T^* = \arg\min_{T \in T(G)}\{w(T)\}$.

Для решения исследуемой задачи предлагаются приближенные детерминированные алгоритмы основанные на жадной стратегии и динамическом программировании, а также метаэвристики: алгоритм муравьиной колонии, алгоритм поиска с чередующимися окрестностями и генетический алгоритм. Определены оценки трудоемкости алгоритмов. Доказана корректность предложенных алгоритмов. Проведен вычислительный эксперимент по анализу эффективности предложенных алгоритмов, как между собой, как и в сравнении с известными приближенными и точными алгоритмами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Prim R. *Shortest connection networks and some generalizations.* Bell Systems Techn. J., 1957, V. 36, 1389—1401.
2. Farley A. *Networks immune to isolated failures.* Networks, 1981, V. 11, 255—268.
3. Rose D. *On simple characterizations of k-trees.* Discrete Mathematics, 1974, V. 41, 317—322.

[1]Исследование выполнено при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение 14.B37.21.0395.

ПОЛИЭДРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ЗАДАЧИ ОБСЛУЖИВАНИЯ РАЗЛИЧНЫХ ТРЕБОВАНИЙ ОДНИМ ПРИБОРОМ

Н.Ю. Шерешик

ОФ ИМ СО РАН, Омск
e-mail: m-m_pikm@mail.ru

Рассматривается задача обслуживания различных требований одним прибором [1]. Задано множество $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ требований. Каждое задание $i \in V$ имеет положительный вес ω_i, время обработки p_i и время ожидания r_i, в течение которого оно недоступно для обслуживания. Время обработки требований равны между собой $p_i = p$. В работе прибора допускаются прерывания. Необходимо минимизировать суммарное взвешенное время завершения обслуживания всех требований. Пусть $D = \{1, \ldots, d\}$ – множество моментов времени, достаточное для обслуживания всех требований.

Рассматривается ЦЛП-модель данной задачи [2].

Требуется минимизировать функцию $g(x,y) = \sum\limits_{i \in V} \omega_i + \sum\limits_{i \in V} \omega_i (\sum\limits_{k=1}^{d-1} y_{ik})$ при условиях

$$\sum_{i \in V} x_{ik} \leq 1,\ k = 1, \ldots, d;\ \ \sum_{k=1}^{d} x_{ik} = p,\ i \in V; \tag{1}$$

$$\frac{1}{p} \sum_{l=k+1}^{d} x_{il} \leq y_{ik} \leq \sum_{l=k+1}^{d} x_{il},\ i \in V,\ k = 1, \ldots, d-1; \tag{2}$$

$$x_{ik} \geq 0, i = 1, \ldots, n,\ k = 1, \ldots, d; \tag{3}$$

$$x_{ik} = 0, i = 1, \ldots, n,\ k = 1, \ldots, r_i; \tag{4}$$

$$y_{ik} \leq 1, i \in V,\ k = 1, \ldots, d; \tag{5}$$

где переменные заданы следующим образом:

$$x_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{если } i \in V \text{ обрабатывается в момент } k \in D, \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases}$$

$$y_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{если к моменту } k-1 \text{ обслуживание требования } i \text{ еще не завершено,} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

В работе рассматриваются свойства полиэдра $(1) - (5)$ при малых значениях p.

ЛИТЕРАТУРА

1. Peter Brucker, Sigrid Knust, "Complexity Results for Scheduling Problems¨ *URL: www//mathematik.uni-osnabrueck.de/research/OR/class.*

2. Р. Ю. Симанчёв, Н. Ю. Шерешик. Схема дихотомии для поиска минимального директивного срока в задаче обслуживания различных требований одним прибором // Вестник ОмГУ — 2013 г. № 2. Омск. С. 48-50.

НЕКОТОРЫЕ АЛГОРИТМЫ ДЛЯ NP-ПОЛНОЙ ЗАДАЧИ УПОРЯДОЧЕНИЯ

О.Н. Шульгина

Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань
e-mail: onshul@mail.ru

Для NP-полной в сильном смысле задачи теории расписаний – минимизации максимального временного смещения обоснованы некоторые свойства оптимальных перестановок и на их основе разработаны приближенные алгоритмы решения задачи.

На одном приборе не ранее момента времени t необходимо обслужить n требований. Запрещены одновременное обслуживание более одного требования и прерывания в процессе обслуживания любого требования. Считаем, что требования заданы числами от 1 до n. Положим $N = \{1, 2, ..., n\}$. Для каждого требования j, $j \in N$, заданы: момент поступления требования на обслуживание r_j; продолжительность обслуживания $p_j \geq 0$; директивный срок завершения обслуживания d_j. Числа t, r_j, p_j, d_j являются целыми. Под расписанием будем понимать перестановку элементов множества N. Будем обозначать через $\Pi(N, t)$ множество всех расписаний обслуживания требований множества N с момента времени t. Задача заключается в отыскании такого расписания π^*, что $\max\limits_{j \in N}\{t_j(\pi^*) - d_j\} = \min\limits_{\pi \in \Pi(N,t)} \max\limits_{j \in N}\{t_j(\pi) - d_l\}$, где $t_j(\pi)$ – момент завершения обслуживания требования j при расписании π. Расписание π^* назовем оптимальным.

Пусть $N' \subseteq N$, $N' \neq \oslash$, $t' \geq t$, j_d – требование с минимальным директивным сроком из N', $\pi \in \Pi(N', t')$. Положим $J_{max}(\pi, j_d) = \{j \in N' \setminus \{j_d\} : r_j \geq r_{j_d}, j_d \xrightarrow{\pi} j\}$, $J_{min}(\pi, j_d) = \{j \in N' \setminus \{j_d\} : r_j < r_{j_d}, j_d \xrightarrow{\pi} j\}$. Отметим, что множества $J_{max}(\pi, j_d)$, $J_{min}(\pi, j_d)$ могут быть пустыми. В работе [1] доказано существование оптимального расписания π^*, для которого $J_{max}(\pi^*, j_d) = \{j \in N' \setminus \{j_d\} : r_j \geq r_{j_d}\}$ и разработана общая схема отыскания указанного расписания при предположении, что множество $J_{min}(\pi^*, j_d)$ можно отыскать некоторым алгоритмом А трудоемкости $O(x(n))$ операций, где $x(n)$ – функция от размерности задачи.

Схема [1]. Первоначально полагаем $t_1 = \max\{r_{min}(N), t\}$, $N_1 = N$, $\pi_1 = \pi^{\oslash}$. Пусть уже известны t_k, N_k, π_k, и $k \geq 1$. Если $N_k = \oslash$, то π_k – оптимальное расписание, и процесс заканчивается. В противном случае выбираем j_d^k – требование с минимальным директивным сроком из N_k, $J_{max}^k = \{j \in N_k \setminus \{j_d^k\} : r_j \geq r_{j_d^k}\}$, некоторым алгоритмом А отыскиваем множество $J_{min}^k = J_{min}(\pi^*, j_d^k)$, и полагаем $N_{k+1} = J_{min}^k \cup J_{max}^k$, $N^k = N_k \setminus (J_{max}^k \cup J_{min}^k \cup \{j_d^k\})$, $\pi_{k+1} = (\pi_k, \vec{\pi}_r^k, j_d^k)$, где $\vec{\pi}_r^k \in \vec{\Pi}_r(N^k, t_k)$, $t_{k+1} = T(\pi_{k+1})$

Обоснованы некоторые свойства оптимальных расписаний и на их основе разработаны алгоритмы псевдополиномиальной трудоемкости для отыскания множеств J_{min}^k в реализации схемы. Количество итераций алгоритмов не превышает n. На каждой итерации первого алгоритма в расписания, постоенные на предыдущем шаге, добавляется требование с наибольшим моментом поступления из оставшихся на специальным образом найденное место. На каждой итерации второго алгоритма упорядочивается требование с наименьшим моментом поступления из оставшихся, частично сохраняя структуру расписания, построенного на предыдущем шаге.

ЛИТЕРАТУРА

1. О. Н. Шульгина *Общая схема решения одной NP-трудной в сильном смысле задачи теории расписаний* // Журн. Автоматика и телемеханика. – 2004. – N 3 – С. 108 – 116.

НЕПРЕРЫВНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ

РЕШАЮЩИЙ МОДУЛЬ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ[1]

Д.К. Атинк, О.Н. Канева, Д.В. Ковалев

Омский государственный технический университет, Омск
e-mail: dmitryatink@gmail.com, okaneva@yandex.ru, mrhankey2008@gmail.com

Работа посвящена созданию программного комплекса для решения линейной стохастической задачи вида:

$$M\left(\sum_{j=1}^{n} c_j x_j\right) \to max,$$
$$P\left\{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i\right\} \ge \alpha_i, i = 1, ..., m, \tag{1}$$
$$x_j \ge 0, j = 1, ..., n.$$

Реализованы следующие два подхода к решению задачи (1).

Первый подход – переход к детерминированой задаче.

Известно [1], если элементы матрицы A и составляющие вектора b – независимые между собой нормально распределенные случайные величины $a_{ij} \in N(\overline{a}_{ij},\ \sigma_{ij}^2),\ b_i \in N(\overline{b}_i, \theta_i^2)$ и выполняется условие $\alpha_i \ge 0,5,\ i = 1, ..., m$, то задача (1) сводится к детерминированной задаче выпуклого программирования следующего вида:

$$\sum_{j=1}^{n} \overline{c}_j x_j \to max,$$
$$\Phi^{-1}(\alpha_i)\left\{\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}^2 x_j^2 + \theta_i^2\right\}^{\frac{1}{2}} + \sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{ij} x_j \le \overline{b}_i, i = 1, ..., m, \tag{2}$$
$$x_j \ge 0, j = 1, ..., n.$$

Для решения задачи (2), при условии, что $x \in X$, где X – выпуклое множество, в программном комплексе реализован метод возможных направлений. Кроме того, было проведено исследование, основанное на методах статистического и имитационного моделирования [2], результатом которого являются условия, при которых возможно использование задачи (2) для нахождения решения задачи (1) в случае, если элементы матрицы A и вектора b независимые между собой случайные величины, имеющие равномерное распределение $a_{ij} \in R(\ \underline{a}_{ij},\ \overline{a}_{ij}),\ b_i \in R(\underline{b}_i,\ \overline{b}_i)$.

Второй подход – прямой метод решения стохастических задач.

В разрабатываемом программном комплексе реализован метод проектирования стохастических квазиградиентов [3] для решения задачи (1) при условии, что $x \in X$, где X – выпуклое множество.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д.Б. Юдин *Математические методы управления в условиях неполной информации. Задачи и методы стохастического программирования* М.: Красанд, 2010, 400 с.
2. В.Н. Задорожный *Имитационное и статистическое моделирование* Омск : Изд-во ОмГТУ, 2013, 136 с.
3. Ю.М. Ермольев *Методы стохастического программирования* М.: Наука, 1976, 240 с.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 12-07-00326-а)

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ДВОЙСТВЕННЫЕ АЛГОРИТМЫ ПРОЕКЦИЙ ТОЧКИ НА МНОЖЕСТВО

А.С. Величко

Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, Владивосток
e-mail: vandre@dvo.ru

В докладе рассматривается задача поиска проекции точки $q \in R^n$ на множество, заданное конечным набором линейных ограничений типа неравенств. Она возникает в проективных алгоритмах решения экстремальных задач, методе проекций градиента, может использоваться для эффективного решения задач линейного программирования большой размерности [1]. Искомая проекция – точка $x*$ – оптимальное решение задачи квадратичного программирования $\min\limits_x \|x - q\|^2$ с ограничениями $Ax \leq b$. Анализ построения эффективных численных методов для решения этой задачи, в том числе параллельных, являются предметом данной работы.

Запишем последнюю задачу в виде $\min\limits_x \{\frac{1}{2}x'Qx + c'x, Ax \leq b\}$. Далее можно записать двойственную постановку рассматриваемой задачи: $\min\limits_{p \geq 0} \{\frac{1}{2}p'Dp + d'p\}$. Здесь $D = AQ^{-1}A'$ – положительно определенная, симметричная матрица, $d = b + AQ^{-1}c$ и для оптимальных решений прямой ($x*$) и двойственной ($p*$) постановки задачи выполняется соотношение $x* = -Q^{-1}(c + A'p*)$. Размерность двойственного вектора p равна числу линейных ограничений-неравенств рассматриваемой квадратичной задачи условной оптимизации.

Идея параллельного алгоритма для решения двойственной задачи основана на использовании последовательного нелинейного метода Якоби и предлагаемой далее модификации, позволяющей распараллеливание вычислений. Используемый для решения задач оптимизации нелинейный метод Якоби предполагает фиксацию значений всех кроме одной компонент вектора неизвестных. На каждом шаге алгоритма решается получающаяся простая одномерная задача оптимизации, обновляется значение компоненты вектора неизвестных на данной итерации алгоритма и осуществляется переход к другой компоненте искомого вектора, которые циклически перебираются до выполнения критерия останова алгоритма. В отличие от идеи методов покоординатного спуска в рассматриваемом алгоримте не вычисляется градиент оптимизируемой функции в текущей точке и спуск в направлении антиградиента функции не осуществляется.

В работе [2] рассматриваемый подход был использован для решения задачи регуляризации и построения параллельного алгоритма для уравнения Фредгольма с недифференцируемыми стабилизаторами.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.С. Величко *О выборе шага в проективных алгоритмах для задач линейного программирования большой размерности.* — Дальневосточный математический журнал. — 2012, №2, с. 160-170.
2. А.С. Величко *Двойственный алгоритм для задач регуляризации с недифференцируемыми стабилизаторами.* — Вычислительные технологии. — 2014, №2, с. 14-20.

МЕТОД ОТДЕЛЯЮЩИХ ПЛОСКОСТЕЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕГЛАДКИХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ В ТРАНСПОРТНЫХ ЗАДАЧАХ

Е.А. Воронцова

Дальневосточный федеральный университет, Владивосток
e-mail: vorontsovaea@gmail.com

Пусть $x = \{x^1, \ldots, x^n\}$ – вектор n-мерного евклидового пространства $\mathbb{R}^n$. В $\mathbb{R}^n$ рассматривается разрешимая задача безусловной выпуклой недифференцируемой оптимизации

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) = f(x^*), \tag{1}$$

где $f(x)$ – выпуклая недифференцируемая функция, x^* – искомое оптимальное решение.

Для эффективного решения задачи (1) разработан метод отделяющих плоскостей с дополнительными отсечениями (МОП с ДО) [1], который не требует никакой дополнительной информации о внутренней структуре оптимизируемой функции. Предполагается, что вся доступная информация о целевой функции $f(x)$ задачи (1) предоставляется субградиентным оракулом, т.е. в произвольной точке $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ можно определить только значение функции $f(\bar{x})$ и субградиент $d \in \partial f(\bar{x})$, произвольно выбранный из субдифференциала $\partial f(\bar{x})$ функции $f(x)$.

Данный метод является результатом дальнейшего развития методов типа [2-3], имеющих ряд важных теоретических и вычислительных особенностей. Методы этого типа основываются на идее замены исходной задачи минимизации на задачу поиска значения в точке 0 соответствующей сопряженной функции Фенхеля-Моро для целевой функции задачи, что приводит к улучшению свойств сходимости. Далее надграфик сопряженной функции аппроксимируется полиэдральными множествами с внутренней и с внешней стороны. На каждой итерации эти аппроксимации уточняются.

МОП с ДО был успешно применен для решения транспортных задач с двусторонними границами. Наличие таких границ часто является проблемой и для метода потенциалов, и для симплекс-метода. Задача линейного программирования была заменена задачей проекции на линейное многообразие [4]. Будут приведены результаты численных экспериментов.

ЛИТЕРАТУРА

1. E.A. Vorontsova. *A Projective Separating Plane Method with Additional Clipping for Non-Smooth Optimization* // WSEAS Transactions on Mathematics. 2014, vol. 13. P. 115–121.
2. Е.А. Нурминский. *Метод отделяющих плоскостей с ограниченной памятью для решения задач выпуклой негладкой оптимизации* // Вычислительные методы и программирование. 2006, т. 7. С. 133–137.
3. E.A. Nurminski. *Separating plane algorithms for convex optimization* // Mathematical Programming. 1997, № 76. P. 373–391.
4. П.И. Стецюк, Е.А. Нурминский, Д.И. Соломон. *Транспортная задача и ортогональное проектирование на линейные многообразия.* [Электронный ресурс] URL: http://elis.dvo.ru/~nurmi/SteNurSol-2013.pdf (дата обращения: 26.10.2013)

ЗАДАЧИ ОТДЕЛИМОСТИ ДВУХ МНОЖЕСТВ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОЙ И КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИЯМИ КАК ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ[1]

Т.В. Груздева, А.В. Орлов

Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Иркутск
e-mail: {gruzdeva, anor}@icc.ru

Задача отделимости двух конечных множеств, возникающая при решении задач классификации, формулируется следующим образом [1]. Пусть заданы множества $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, состоящие из M и N элементов соответственно. Каждый элемент обладает n характеристиками, которые представимы точками из пространства $I\!R^n$. Задача отделимости множеств $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ состоит в построении отделяющей функции $F(\cdot)$ такой, что

$$F(x) > 0 \ \forall x \in \mathcal{A}, \ \ F(x) < 0 \ \forall x \in \mathcal{B}.$$

Классическая задача линейной отделимости [2], эквивалентная задаче линейного программирования, заключается в построении гиперплоскости $H(\omega, \xi) = \{x \in I\!R^n | \ \langle \omega, x\rangle = \xi\}$ такой, что $\langle \omega, x\rangle > \xi \ \forall x \in \mathcal{A}$, $\langle \omega, x\rangle < \xi \ \forall x \in \mathcal{B}$. К сожалению, в практических задачах линейная отделимость чаще всего места не имеет.

Первым по сложности обобщением понятия линейной отделимости является билинейная отделимость — задача отделения множеств двумя гиперплоскостями, которая эквивалентна невыпуклой задаче билинейной оптимизации [3]. Следующим по сложности обобщением является задача поиска семейства p гиперплоскостей, отделяющих множества $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, — задача полиэдральной отделимости [4]. В этом случае эквивалентная ей невыпуклая задача оказывается еще и негладкой.

Наряду с кусочно-линейными отделяющими функциями в работе рассматриваются задачи с квадратичной функцией $F(\cdot)$ — поиск сферы или эллипса, отделяющих два множества [5], которые также сводятся к невыпуклой негладкой задаче.

Для решения соответствующих невыпуклых задач использована теория глобального поиска, разработанная для задач d.c. минимизации [6]. Построенные на этой основе алгоритмы протестированы как на специально сконструированных задачах, так и на задачах классификации из библиотеки, размещенной по адресу http://archive.ics.uci.edu/ml/datasets.html.

ЛИТЕРАТУРА

1. Еремин И. И. *Теория линейной оптимизации.* Екатеринбург: Изд-во ИММ УрО РАН, 1999, 312 с.
2. Васильев Ф.П. *Методы оптимизации.* М.: Факториал-пресс, 2002, 415 с.
3. Bennett K.P., Mangasarian O.L. *Bilinear Separation of Two Sets in n-Space.* — Computational Optimization and Applications. — 1993, № 2, p. 207–227.
4. Astorino A., Gaudioso M. *Polyhedral Separability Through Successive LP.* — Journal of Optimization theory and applications. — 2002, Vol. 112, №. 2, p. 265-–293.
5. Astorino A., Gaudioso M. *A fixed-center spherical separation algorithm with kernel transformations for classification problems.* — Computational Management Science. — 2009, № 6, p. 357–372.
6. Стрекаловский А.С. *Элементы невыпуклой оптимизации.* Новосибирск: Наука, 2003, 356 с.

[1]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-5007.2014.9)

ТЕХНОЛОГИЯ ПОИСКА ГЛОБАЛЬНОГО ЭКСТРЕМУМА ФУНКЦИИ НА ОСНОВЕ МНОГОМЕРНЫХ АДАПТИВНЫХ СЕТОК[1]

А.Б. Доржиева

Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Иркутск
e-mail: ikadark@list.ru

Разработка методов построения адаптивных сеток [1] для численного решения прикладных задач является актуальной проблемой вычислительной математики. Адаптация требуется для сгущения сеточных элементов в областях сосредоточения особенностей решения и позволяет оставить сетку грубой в областях плавного изменения решения. Это дает возможность существенно сэкономить вычислительные ресурсы.

В докладе предлагается подход к построению адаптивных сеток для решения задач глобальной оптимизации, в которых возможность получения аналитических градиентов оптимизируемых функций отсутствует. Такие задачи часто выделяются в отдельный класс задач с целевыми функциями в виде «черного ящика» [2]. Кроме того, существенную роль играет время вычисления значения целевой функции.

Рассматривается задача многомерной глобальной оптимизации $f(x) \to \min$, $x \in D$, $D = \{x \in \mathbb{R}^n : \underline{x} < x < \overline{x}\}$, где $\underline{x}, \overline{x} \in \mathbb{R}^n$ — заданные векторы. Задается множество $\mathcal{D} = \{x_k : \ x_k \in D, k = \overline{1, N_{\mathcal{D}}}\}$ случайно выбранных точек. В качестве опорной функции используется модифицированная интерполяционная функция Шепарда $F_S(\cdot;\mathcal{D})$ [3], которая на множестве $\mathcal{D}$ совпадает с $f(\cdot)$, а на $D \setminus \mathcal{D}$ определяется формулой

$$F_S(x;\mathcal{D}) = \sum_{k=1}^{N_{\mathcal{D}}} \frac{f_k + a_k(x - x_k)}{\left\|x - x_k\right\|^4} \Big/ \sum_{k=1}^{N_{\mathcal{D}}} \frac{1}{\left\|x - x_k\right\|^4}.$$

Здесь $f_k = f(x_k)$ и $a_k \in \mathbb{R}$ — коэффициенты угла наклона функции F_S в точках $x_k \in \mathcal{D}$.

Приводятся результаты вычислительных экспериментов на тестовой коллекции [4]. Отметим, что подход, связанный с использованием адаптивных сеток на основе функции Шепарда, показал высокую эффективность при оптимизации сложных овражных унимодальных и многоэкстремальных функций.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.С. Лебедев, В.Д. Лисейкин, Г.С. Хакимзянов *Разработка методов построения адаптивных сеток.* — Вычислительные технологии. — 2002, т. 7, № 3, с. 29–43.
2. D.R. Jones, W.J. Welch *Efficient Global Optimization of Expensive Black-Box Functions.* — Journal of Global Optimization. — 1998, № 13, pp. 455–492.
3. D Shepard *A two-dimensional interpolation function for irregularly-spaced data.* — Proceedings of the 23rd ACM national conference — January 1968, pp. 517–524.
4. F. Herrera, M. Lozano, D. Molina *Test suite for the special issue of soft computing on scalability of evolutionary algorithms and other metaheuristics for large-scale continuous optimization problems.* URL: http://sci2s.ugr.es/eamhco/updated-functions1-19.pdf Last accessed: July 2010.

[1]Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проект № 12-01-00193) и интеграционного проекта СО РАН № 83.

МЕТОД ОТСЕЧЕНИЙ С ОБНОВЛЕНИЕМ АППРОКСИМИРУЮЩИХ МНОЖЕСТВ И ЕГО КОМБИНИРОВАНИЕ С ДРУГИМИ АЛГОРИТМАМИ

И.Я. Заботин, Р.С. Яруллин

Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань
e-mail: IYaZabotin@mail.ru, YarullinRS@gmail.com

Предлагается метод условной минимизации, относящийся к классу методов отсечений с аппроксимацией надграфика целевой функции (напр., [1]). Одна из принципиальных его особенностей заключается в возможности периодического отбрасывания отсекающих плоскостей, что удобно с практической точки зрения.

Решается задача минимизации выпуклой функции $f(x)$ на выпуклом замкнутом множестве $D \subset R_n$. Предлагаемый для ее решения метод заключается в следующем. Для каждого $j \in J = \{1, \ldots, m\}$ выбирается точка $v^j \in intE$, где $E = \{(x, \gamma) \in R_{n+1} : x \in R_n, \gamma \geq f(x)\}$, строится выпуклое замкнутое множество $M_0 \subset R_{n+1}$, содержащее E, задаются числа $\varepsilon_k > 0$, $k \in K = \{0, 1, \ldots\}$, $\varepsilon_k \to 0$, $k \to \infty$, $\bar{\gamma} \leq f^* = \min\{f(x) : x \in D\}$, полагается $i = 0$, $k = 0$.

1. Отыскивается решение (y_i, γ_i), где $y_i \in R_n$, $\gamma_i \in R_1$, задачи

$$\min\{\gamma : (x, \gamma) \in M_i,\ x \in D,\ \gamma \geq \bar{\gamma}\}.$$

2. Если $f(y_i) - \gamma_i > \varepsilon_k$, то полагается $Q_i = M_i$, $u_i = y_i$. В противном случае выбираются выпуклое замкнутое множество $Q_i \subset R_{n+1}$, содержащее E, и такая точка $x_k \in D$, что $f(x_k) \leq f(y_i)$, полагается $\sigma_k = \gamma_i$, $u_i = x_k$, значение k увеличивается на единицу.

3. Для каждого $j \in J$ в интервале $(v^j, (u_i, \gamma_i))$ определенным образом выбирается точка $z_i^j \notin intE$ и строится конечное множество A_i^j нормированных обобщенно-опорных в точке z_i^j к множеству E векторов.

4. Полагается $M_{i+1} = Q_i \bigcap\limits_{j \in J} \{w \in R_{n+1} : \langle a, w - z_i^j \rangle \leq 0 \ \forall a \in A_i^j\}$, значение i увеличивается на единицу, и следует переход к п. 1.

Обоснована теорема оптимальности для точки y_i. Доказано, что наряду с последовательностью вспомогательных точек y_i, $i \in K$, методом будет построена также основная последовательность $\{x_k\}$, $k \in K$, и для последней справедливо равенство $\lim\limits_{k \in K} f(x_k) = f^*$.

При каждом $k \in K$ имеют место неравенства $\sigma_k \leq f^* \leq f(x_k)$, а в случае сильной выпуклости $f(x)$ получена оценка $||x_k - x^*|| \leq \sqrt{\varepsilon_k/\mu}$, где x^* – решение задачи, а μ – константа сильной выпуклости.

Обсуждаются способы задания чисел ε_k и множеств M_0, Q_i, A_i^j. Показано, как за счет выбора множеств Q_i, отличных от M_i, в частности, $Q_i = R_{n+1}$, можно обновлять аппроксимирующие множества M_{i+1}, отбрасывая любое число накопленных ранее отсекающих плоскостей. Подчеркнем, что условие выбора точек x_k позволяет при $x_k \neq y_i$ комбинировать данный метод с другими алгоритмами, сохраняя сходимость, а также использовать для нахождения x_k параллельные вычисления.

ЛИТЕРАТУРА

1. В.П. Булатов *Методы погружения в задачах оптимизации.* Новосибирск: Наука, 1977, 161 с.

ПОИСК ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ В ЗАДАЧЕ ГРУППОВОГО МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОГО ВЫБОРА ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ МАЖОРИТАРНОГО ОТНОШЕНИЯ[1]

А.О. Захаров

Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург
e-mail: a.zakharov@spbu.ru

В докладе рассматривается задача группового многокритериального выбора, которая включает: 1) множество допустимых решений $X \subseteq \mathbb{R}^n$; 2) числовой векторный критерий $f = (f_1, \ldots, f_m)$, заданный на множестве X; 3) асимметричные бинарные отношения $\succ_i$, $i = \overline{1, N}$, лиц, принимающих решение (ЛПР), определенные на множестве $Y = f(X)$. Критерий f отражает общие цели группы ЛПР, а бинарное отношение каждого ЛПР — индивидуальные предпочтения, которые задаются при помощи «квантов» информации [1], показывающих компромисс между двумя компонентами критерия f. На отношение $\succ_i$ для всех $i = \overline{1, N}$ и критерий f накладываются требования из [1]. Рассматривается мажоритарное отношение $\succ$: для произвольных векторов $y^{(1)}, y^{(2)} \in \mathbb{R}^m$ выполнено $y^{(1)} \succ y^{(2)}$, если справедливы соотношения $y^{(1)} \succ_i y^{(2)}$ по крайней мере для половины номеров i из $\{1, \ldots, N\}$. В работе доказано, что отношение $\succ$ является конусным с конусом $K = \bigcup_{i=1}^{C_N^p} \bigcap_{l=1}^{p} K_{il}$, где $p = N/2$, если p — четное, $p = [N/2] + 1$, если p — нечетное, $[a]$ — целая часть числа a, $\{K_{i1}, \ldots, K_{ip}\} \subset \{K_1, \ldots, K_N\}$. Показано, что $0_m \notin K$, $\mathbb{R}_+^m \subseteq K$, и в отличии от конусов $K_1, \ldots, K_N$ конус K, вообще говоря, не является выпуклым.

Под оптимальными решениями задачи группового выбора будем понимать множество недоминируемых векторов $\mathrm{Ndom}_K(Y) = \{y^* \in Y \mid \nexists y \in Y : \ y - y^* \in K\}$ относительно конуса K. В случае $K = \mathbb{R}_+^m$, $\mathrm{Ndom}_K(Y) = P(Y)$, где $P(Y)$ — множество Парето. Когда конус K не является выпуклым, мажоритарное отношение $\succ$ не обладает свойством транзитивности. Поэтому необходимо выделять выпуклую часть $\hat{K}$ конуса K, которая будет задавать транзитивную часть $\succ_{tr}$ мажоритарного отношения $\succ$. И тогда, в действительности, необходимо искать множество недоминируемых векторов $\mathrm{Ndom}_{\hat{K}}(Y)$.

Рассмотрен случай группы из трех ЛПР и критерия с двумя компонентами, каждое ЛПР задает по одному и по два «кванта» информации. Показано, как выделять выпуклую часть $\hat{K}$ конуса K и строить множество недоминируемых векторов $\mathrm{Ndom}_{\hat{K}}(Y)$: оно представляет собой множество Парето $\hat{P}(Y) = f(P_g(X))$ в многокритериальной задаче с «новым» векторным критерием g и множеством допустимых решений X, где компоненты критерия g являются линейными комбинациями компонент критерия f. Причем $\mathrm{Ndom}_{\hat{K}}(Y) \subseteq P(Y)$, т. е. происходит сужение изначального множества оптимумов $P(Y)$. Однако показаны ситуации, когда конус $\hat{K}$ выбирается неоднозначно, что порождает неоднозначность множества недоминируемых векторов $\mathrm{Ndom}_{\hat{K}}(Y)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ногин В. Д. *Принятие решений в многокритериальной среде: количественный подход (изд. 2, испр. и доп.).* М.: Физматлит, 2005. — 176 с.

[1]Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 14–07–00899).

О СХОДИМОСТИ ЭКСТРАГРАДИЕНТНЫХ МЕТОДОВ ЗА КОНЕЧНОЕ ЧИСЛО ИТЕРАЦИЙ[1]

А.В. Зыкина, Н.В. Меленьчук

Омский государственный технический университет, Омск
e-mail: avzykina.mail.ru, melenchuknv@gmail.com

В данной работе показывается конечность числа итераций экстраградиентных методов в нелинейном случае.

Решить *вариационное неравенство* – значит найти вектор $z^* \in \Omega$, удовлетворяющий условиям:

$$\langle H(z^*), z - z^* \rangle \geq 0, \quad \forall\, z \in \Omega, \tag{1}$$

где $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, Ω – замкнутое, выпуклое множество, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $z^* \in \Omega^*$ – множество решений вариационного неравенства, $\Omega^* \subset \Omega$.

Сходимость двухшагового экстраградиентного метода к решению $z^* \in \Omega^*$ вариационного неравенства (1) с монотонным оператором $H(z)$, удовлетворяющим условию Липшица с константой $L > 0$, обеспечивается величиной шага α из условия $0 < \alpha < \frac{1}{\sqrt{3}L}$ [1].

Рассмотрим дополнительное условие на непрерывный монотонный оператор $H(z)$ – *условие остроты*, состоящее в следующем [2] : для вариационного неравенства (1) при некотором $\gamma > 0$ выполняется условие

$$\langle H(z), z - z^*(z) \rangle \geq \gamma \| z - z^*(z) \|, \quad \forall\, z \in \Omega, \quad z^*(z) = P_{\Omega^*}(z). \tag{2}$$

Более строгое условие остроты $\langle H(z), z - z^* \rangle \geq \gamma \| z - z^* \|$, предполагающее выполнение единственности решения $z^* \in \Omega$, введено в [3]. Условие остроты (2) для вариационных неравенств (1) с потенциальным отображением $H(z) = \nabla f(z)$ является известным условием острого минимума $f(z) - f(z^*(z)) \geq \gamma \| z - z^*(z) \|$, $\forall\, z \in \Omega$, для соответствующей задачи выпуклой оптимизации с выпуклым замкнутым множеством решений $\Omega^* \subset \Omega$ [4].

При выполнении условия остроты (2) для вариационного неравенства (1) показана сходимость последовательности $\{z^k\}$, определяемой рекуррентными соотношениями двухшагового экстраградиентного метода, к решению $z^* \in \Omega^*$ вариационного неравенства (1) за конечное число итераций.

Аналогичный результат при выполнении условия остроты получается в одношаговом экстраградиентном методе [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. А.В. Зыкина, Н.В. Меленьчук *Двухшаговый экстраградиентный метод для вариационных неравенств.* – Изв. вузов. Математика. – 2010, № 9, с. 82-85.
2. I.V. Konnov *Combined relaxation methods for variational inequalities.* Berlin: Springer-Verlag, 2001, 184 с.
3. А.С. Антипин *Градиентный и экстраградиентный подходы в билинейном равновесном программировании.* М.: ВЦ РАН, 2001, 69 с.
4. Б.Т. Поляк *Введение в оптимизацию. Изд. 2-е, испр. и доп.* М.: ЛЕНАРД, 2014, 393 с.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 12-07-00326-а)

ОБЩИЙ ПОДХОД К АНАЛИЗУ СЕТЕВЫХ МОДЕЛЕЙ ФОНДОВЫХ РЫНКОВ

В.А. Калягин

Национальный исследовательский университет
Высшая школа экономики
Лаборатория алгоритмов и технологий анализа сетевых структур, Нижний Новгород

Анализ фондового рынка как сложной сети привлекает значительное внимание специалистов в последние десятилетия. Под сетевой моделью фондового рынка принято понимать полный взвешенный граф, вершинами которого являются финансовые активы, а веса ребер выражают количественную оценку меры взаимного влияния активов друг на друга. Наиболее распространенной мерой взаимного влияния активов является коэффициент корреляции Пирсона. Под сетевыми структурами в этой модели понимаются различные характеристики этого графа и его подграфов. В работе [1] в качестве таких структур рассматриваются минимальное остовное дерево и планарный максимально отфильтрованный граф. Такой подход позволяет выявлять иерархические структуры, связывающие группы активов, образующих кластеры. Другой подход к выделению структурных характеристик финансовых рынков предложен в работе [2]. Основным объектом исследований является граф рынка, который получается из полного взвешенного графа путем удаления ребер с весами, меньшими некоторого заданного порога. Граф рынка имеет степенной закон распределения степеней вершин. Его характеристики (клики, независимые множества и др.) являются содержательными и имеют очевидную экономическую интерпретацию.

Несмотря на интенсивное развитие исследований и значительное число недавних публикаций, в настоящее время отсутствует теоретическая основа для построения и анализа сетевых моделей фондовых рынков. В большинстве существующих публикаций не принимается во внимание статистическая природа финансовых данных, используемых при построении сетевых моделей. В настоящей работе предлагается общий подход к построению и анализу сетевых моделей фондовых рынков, основанный на развитии теории статистических процедур со многими решениями. Это дает возможность строгого определения понятия оптимальных процедур и их построения для различных сетевых структур. В рамках предлагаемого подхода оказывается также возможным дать адекватное определение статистической неопределенности сетевых структур и разработать методы ее оценивания. Все вместе позволяет значительно повысить достоверность информации, извлекаемой из финансовых данных. В рамках предложенного подхода в работе исследуются следующие задачи:

- Выбор многомерной вероятностной модели и меры взаимного влияния активов друг на друга.
- Анализ статистических свойств существующих алгоритмов построения сетевых структур.
- Построение оптимальных статистических процедур
- Оценка статистической неопределенности сетевых структур

Показана статистическая неустойчивость сетевых структур, построенных на основе корреляции Пирсона. В классе эллиптических распределений найдена устойчивая мера взаимного влияния активов, связанная с вероятностью совпадения знаков. Показано, что используемые в настоящее время алгоритмы построения сетевых структур не всегда соответствуют оптимальным статистическим процедурам. Построены оптимальные статистические процедуры для некоторых классов сетевых структур. Исследована статистическая неопределенность популярных сетевых структур и проведено их сравнение для различных фондовых рынков. Часть результатов опубликована в работах [3], [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Tumminello M., Aste T., Matteo T.D., Mantegna R.N. *A tool for filtering information in complex systems* — Proceedings of the National Academy of Sciences. 102 (30), 10421–10426 (2005).
2. Boginski V., Butenko S., Pardalos P.M. *Statistical analysis of financial networks* — J. Computational Statistics and Data Analysis . v. 48 (2), pp. 431–443 (2005).
3. Koldanov A.P., Koldanov P.A., Kalyagin V.A., Pardalos P.M. *Statistical procedures for the market graph construction* — Computational Statistics and Data Analysis, v. 68, pp. 17–29 (2013).
4. Bautin G.A., Kalyagin V.A., Koldanov A.P., Koldanov P.A., Pardalos P.M. *Simple measure of similarity for the market graph construction* — Computational Management Science, v. 10, pp. 105-124 (2013).

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ВЫПУКЛОЙ НЕДИФФЕРЕНЦИРУЕМОЙ ОПТИМИЗАЦИИ МЕТОДОМ СИМПЛЕКСНЫХ ПОГРУЖЕНИЙ

А.В. Колосницын

Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН, Иркутск
e-mail: steem_kas@mail.ru

В докладе рассматривается задача

$$\begin{gathered} f_0(x) \to \min, \\ x \in X = \{x : f_i(x) \le 0,\ i = 1, 2, ..., m\}. \end{gathered} \tag{1}$$

где f_0 – выпуклая, не обязательно гладкая функция, $f_i(x)$, $i = 1, 2, ..., m$ – выпуклые функции, $x \in R^n$, $X \neq \emptyset$ – ограниченное множество. Для решения задачи (1) применяется метод симплексных погружений [1], схему которого можно представить следующим образом. Пусть имеется начальный симплекс S_0, а $x^* \in S_0$ – одно из решений задачи (1). Находим центр симплеска $x^{c,0}$, через который проводим секущую плоскость вида $L = \left\{x : g^T(x - x^c) = 0\right\}$, где $g \in R^n$ – субградиент функции f в точке x^c. Усеченную часть симплекса, содержащего точку x^*, погружаем в новый симплекс S_1 минимально возможного объема. Находим точку $x^{c,1}$ – центр симплеска S_1 и повторяем процедуру, последовательно локализуя искомое решение до тех пор, пока объем симплекса не станет достаточно малым.

Важным теоретическим результатом, полученным в [1], является оценка сокращения объемов симплексов:

$$\frac{V(S^l)}{V(S^{l-1})} = \begin{cases} \frac{1}{2}, \quad k_l = 1, \\ \left(\frac{k_l}{k_l+1}\right)_l^k \left(\frac{k_l}{k_l-1}\right)^{l_l-1}, \quad 2 \le k_l \le n, \end{cases}$$

где $V(S^l)$ – объем симплекса на итерации l, а k_l – число сохраненных при отсечении вершин симплекса. Очевидно, что величина сокращения объема зависит только от числа отсеченных вершин. На этом свойстве оценки основан ряд модификаций метода, которые позволяют для разных задач выпуклой недифференцируемой оптимизации строить секущую плоскость, которая отсекает наибольшее число вершин симплекса, что ускоряет сходимость метода.

ЛИТЕРАТУРА

1. Анциферов Е.Г., Булатов В.П. Алгоритм симплексных погружений в выпуклом программировании // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1987. Т. 27. № 3. С. 377 - 384.

ПРИБЛИЖЕННЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ МНОГОМЕРНОЙ ЗАДАЧИ О РЮКЗАКЕ

А.А. Кузнецова, Н.Н. Шеломенцева

Школа 12, Усолье-Сибирское, БГУЭП, Иркутск
e-mail: antony74g@mail.ru, natshel@bk.ru

В докладе рассмотрим многомерную задачу о рюкзаке:

$$(P_k) \quad \begin{cases} < c,\ x > \uparrow max \\ < a^j, x > \leq \beta_j, \quad j = \overline{1, m} \\ \quad x_i \in \{0, 1\}, \qquad i = \overline{1, n}. \end{cases}$$

Представим (P_k) в виде непрерывной задачи:

$$(P) \quad \begin{cases} < \overline{c},\ x > \uparrow max \\ < \overline{a}^j, x > \leq \overline{\beta}_j, \quad j = \overline{1, m} \\ \ \parallel x \parallel^2 = 1 \\ \quad x \in \Pi, \end{cases}$$

где $\Pi = \{x_i : -\frac{1}{\sqrt{n}} \leq x_i \leq \frac{1}{\sqrt{n}}\}$.
$\overline{c}$, $\overline{a}^j$, $\overline{\beta}_j$, $j = \overline{1, m}$ получены из исходных c, a^j, β_j путем некоторого преобразования. Справедливо следующее утверждение

Теорема. *Пусть $z \in Sol(P)$. $x : x_i = 0$, если $z_i = -\frac{1}{\sqrt{n}}$, $x_i = 1$, если $z_i = \frac{1}{\sqrt{n}}$, тогда и только тогда, когда $x \in Sol(P_k)$.*

Для приближенного решения задачи (P) предлагается алгоритм, основанный на процедуре нахождения точки, лучшей чем текущая. В случае, когда невозможно определить такую точку – находим оценку приближенного решения. Алгоритм протестирован на задачах из библиотеки OR-library. Произведено сравнение с другими алгоритмами решения задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Silvano M., Toth P. *Knapsack problems.* — Wiley, 1990, 306 c.
2. Kellerer H., Pferschy V., Pisinger D. *Knapsack problems.* — 1995.

ДВА БЫСТРЫХ АЛГОРИТМА ПРОЕКТИРОВАНИЯ ТОЧКИ НА СТАНДАРТНЫЙ СИМПЛЕКС[1]

В.Н. Малоземов, Г.Ш. Тамасян

Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург
e-mail: malv@math.spbu.ru, g.tamasyan@spbu.ru

В докладе рассматриваются два быстрых алгоритма проектирования точки $c \in \mathbb{R}^n$ на стандартный симплекс $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$, определяемый условиями

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1; \quad x_i \geqslant 0,\ i \in 1:n.$$

Исследуемая задача ставится следующим образом:

$$\tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - c_i)^2 \to \min_{x\in\Lambda}, \tag{1}$$

где $c_1, \ldots, c_n$ — координаты проектируемой точки c. Решение этой задачи существует и единственно. Обозначим его x^*.

В работе [1] был описан быстрый алгоритм нахождения x^*. Идея алгоритма основана на алгебраическом анализе условий оптимальности в форме Куна–Таккера для задачи (1).

Ранее, появилась работа [2], в которой также предлагался конечный алгоритм решения задачи (1). Этот алгоритм имеет геометрический характер, что подтверждается в недавней работе [3].

В данном докладе мы даем усовершенствованный вариант описания и обоснования алгоритма из [2] и приводим результаты численных экспериментов по сравнению двух быстрых алгоритмов решения задачи (1). Отметим одну интересную особенность (см. [4]): когда один из двух алгоритмов проектирования имеет максимальную трудоемкость, у второго алгоритма трудоемкость минимальна.

ЛИТЕРАТУРА

1. Малоземов В. Н., Певный А. Б. *Быстрый алгоритм проектирования точки на симплекс* // Вестник СПбГУ. Сер. 1. 1992. Вып. 1 (№ 1). С. 112–113.

2. Michelot C. *A finite algorithm for finding the projection of a point onto the canonical simplex of* $\mathbb{R}^n$ // JOTA. 1986. Vol. 50. No 1. P. 195—200.

3. Causa A., Raciti F. *A purely geometric approach to the problem of computing the projection of a point on a simplex* //JOTA. 2013. Vol. 156. No 2. P. 524—528.

4. Малоземов В. Н., Тамасян Г. Ш. *Ещё один быстрый алгоритм проектирование точки на стандартный симплекс* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 5 сентября 2013 г. (`http://dha.spb.ru/reps13.shtml#0905`)

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 12-01-00752_а, 14-01-31521_мол_а)

ЭКСТРАГРАДИЕНТНЫЕ МЕТОДЫ С НЕСКОЛЬКИМИ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫМИ ШАГАМИ [1]

Н.В. Меленьчук, А.В. Зыкина

Омский государственный технический университет, Омск
e-mail: melenchuknv@gmail.com, avzykina@mail.ru

Вариационные неравенства являются важным классом оптимизационных задач. Для их решения используется ряд методов, в том числе и градиентные. Экстраградиентные методы строятся на базе градиентных, но сходятся при значительно более слабых условиях на оператор. Ранее были построены экстраградиентные методы с двумя вспомогательными шагами (см. [1-2]), здесь же обобщается подход на n вспомогательных шагов.

Экстраградиентный метод с n вспомогательными шагами для решения вариационного неравенства $\langle H(z^*), z - z^* \rangle \geq 0,\ z^*, z \in \Omega$, зададим следующими рекуррентными соотношениями

$$\begin{array}{l} z_1^k = P_\Omega(z^k - \alpha H(z^k)), \quad z_2^k = P_\Omega(z_1^k - \alpha H(z_1^k)), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots , \\ z_n^k = P_\Omega(z_{n-1}^k - \alpha H(z_{n-1}^k)), \quad z^{k+1} = P_\Omega(z^k - \alpha H(z_n^k)), \end{array} \tag{1}$$

где $H : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, Ω – замкнутое выпуклое множество, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $z^* \in \Omega^*$ – множество решений вариационного неравенства, $\Omega^* \subset \Omega$, $\alpha > 0$ – числовой параметр, P_Ω – оператор проектирования на множество Ω, z^k – известное приближение решения (или начальная точка). Как видно из рекуррентных выражений, основное отличие от стандартного экстраградиентного метода заключается в проделывании n вспомогательных шагов и уже с направлением, полученным в последней точке z_n^k вспомогательных шагов, делается шаг из начальной точки z^k. Результатом данного метода является некоторая точка z^* из множества решений Ω^* вариационного неравенства.

Сходимость итерационного процесса (1) доказана в следующей теореме.

Теорема. *Пусть для вариационного неравенства выполняются условия:*
а) Ω *— замкнутое выпуклое множество;*
б) $H(z)$ *— монотонный оператор:* $\langle H(z) - H(v), z - v \rangle \geq 0,\ \forall\, z, v \in \Omega$, *удовлетворяющий условию Липшица:* $\|H(z) - H(v)\| \leq L\|z - v\|,\ \forall\, z, v \in \Omega$;
в) множество решений Ω^* *вариационного неравенства на* Ω *не пусто;*
г) $0 < \alpha < \frac{1}{\sqrt{2^{n-1}+1}L}$.
Тогда последовательность $\{z^k\}$*, определяемая рекуррентными соотношениями (1), сходится к некоторому* $z^* \in \Omega^*$ *– решению вариационного неравенства.*

ЛИТЕРАТУРА

1. А.В. Зыкина, Н.В. Меленьчук *Двухшаговый экстраградиентный метод для вариационных неравенств.* – Изв. вузов. Математика. – 2010, № 9, с. 82-85.
2. А.В. Зыкина, Н.В. Меленьчук *Двухшаговый экстраградиентный метод для задач управления ресурсами.* – Моделирование и анализ информационных систем. – 2010, т. 17, № 1, с. 65-75.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 12-07-00326-а)

ПРОЦЕДУРЫ ЛОКАЛЬНОГО ПОИСКА В ПОЛИМАТРИЧНЫХ ИГРАХ ТРЕХ ЛИЦ[1]

А.В. Орлов, С. Батбилег

Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Иркутск
e-mail: anor@icc.ru
Национальный университет Монголии, Улан-Батор
e-mail: batbileg.sukhee@gmail.com

В работе исследуются полиматричные игры трех лиц, где критерий эффективности каждого из участников конфликта представляет собой сумму двух билинейных слагаемых [1], так что игра полностью описывается шестью матрицами и называется гексаматричной. С помощью гексаматричной игры моделируются экономические конфликты на олигополистическом рынке с тремя участниками, каждый из которых имеет конечное число стратегий.

Для поиска ситуаций равновесия по Нэшу в гексаматричной игре $\Gamma = \Gamma(A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2)$ используется оптимизационный подход, базирующийся на теореме эквивалентности этой задачи и специальной задачи математической оптимизации с билинейной структурой в целевой функции ($\sigma := (x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$) [1]:

$$\left.\begin{array}{c} \Phi(\sigma) \overset{\triangle}{=} \langle x, A_1y + A_2z\rangle + \langle y, B_1x + B_2z\rangle + \langle z, C_1x + C_2y\rangle - \alpha - \beta - \gamma \uparrow \max\limits_{\sigma}, \\ \sigma \in D \overset{\triangle}{=} \{(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) \in I\!R^{m+n+l+3} \mid x \in S_m,\ \ y \in S_n,\ \ z \in S_l, \\ A_1y + A_2z \le \alpha e_m, \quad B_1x + B_2z \le \beta e_n, \quad C_1x + C_2y \le \gamma e_l\}, \end{array}\right\} \qquad (\mathcal{P})$$

где $S_p = \{u = (u_1, \dots, u_p)^T \in I\!R^p \mid u_i \ge 0,\ \ \sum\limits_{i=1}^{p} u_i = 1\}$, $e_p = (1, 1, ..., 1) \in I\!R^p$, $p = m, n, l$. Компоненты (x^*, y^*, z^*) глобального решения задачи $(\mathcal{P})$ составляют ситуацию равновесия по Нэшу, а $(\alpha_*, \beta_*, \gamma_*)$ — равновесные выигрыши в исследуемой игре Γ [1].

Задачу $(\mathcal{P})$ предлагается решать с помощью теории глобального поиска в невыпуклых задачах с (d.c.) функциями А.Д. Александрова [2]. В соответствии с этой теорией, одним из основных элементов глобального поиска является специализированный локальный поиск, который принимает во внимание структуру исследуемой задачи.

Для осуществления локального поиска в задаче $(\mathcal{P})$ применяется последовательное решение по группам переменных [2], ранее хорошо себя зарекомендовавшее в задачах с билинейной структурой. С использованием различных способов разбиения переменных построены 12 вариантов процедур локального поиска в задаче $(\mathcal{P})$. Исследована сходимость этих процедур, предложены практические критерии останова, и проведено тестирование локального поиска на случайно сгенерированных гексаматричных играх.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.С. Стрекаловский, Р. Энхбат *Полиматричные игры и задачи оптимизации.* — Автоматика и телемеханика. — 2014, №4 (принята к печати).
2. А.С. Стрекаловский, А.В. Орлов *Биматричные игры и билинейное программирование.* М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007, 224 с.

[1]Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проект №13-01-92201-Монг_а)

ДВОЙСТВЕННЫЕ БАРЬЕРЫ И РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ В АНАЛИЗЕ НЕСОБСТВЕННЫХ ЗАДАЧ ЛП 1-ГО РОДА[1]

Л.Д. Попов

Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург
Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б.Н.Ельцина
e-mail: popld@imm.uran.ru

Пусть имеются задача линейного программирования (ЛП) в каноническом формате

$$\min\{(c,x)\colon Ax=b,\ x\geq 0\} \tag{1}$$

и двойственная к ней задача

$$\max\{(b,y)\colon A^T y\leq c\}, \tag{2}$$

причем известно, что допустимая область Y задачи (2) не пуста. Это означает, что задача (1) может оказаться либо разрешимой (если ее ограничения совместны), либо несобственной 1-го рода [1] (если ее ограничения противоречивы). В последнем случае ее можно привести к разрешимому виду путем корректировки правых частей ее ограничений.

Вслед за [1] погрузим исходную задачу в параметрическое семейство задач вида

$$\min\{(c,x)\colon Ax=b-u,\ x\geq 0\} \tag{3}$$

и обозначим через Ω совокупность тех u, при которых ограничения (3) совместны (соответственно, сама задача (3) разрешима). Определим вектор оптимальной коррекции как

$$u_0 := \arg\ \min\{\|u\|\colon u\in\Omega\};$$

здесь $\|\cdot\|$ — евклидова норма. Понятно, что в собственном случае $u_0=0$.

Пусть X_0 — оптимальное множество задачи (3), отвечающее $u=u_0$; $e=(1,\dots,1)$, $A_1,\dots,A_n$ — столбцы матрицы A. Чтобы совместить процесс корректировки исходной задачи с процессом оптимизации ее целевого критерия, сформируем для задачи (2) обычную логарифмическую барьерную функцию, дополненную стандартным квадратичным регуляризирующим слагаемым:

$$B(\varepsilon;y)=(b,y)+\varepsilon_1\sum_{i=1}^{n}\ln(c_i-(A_i,y))-\frac{\varepsilon_2}{2}\|y\|^2. \tag{4}$$

Теорема. *В предположении телесности области Y для каждой пары $\varepsilon=(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2)>0$ найдется единственный вектор $\hat y_\varepsilon$, принадлежащий внутренности Y и доставляющий максимум функции* (4)*, причем имеет место сходимость:*

$$\hat x_\varepsilon := \varepsilon_1 \mathrm{diag}\Big(c-A^T\hat y_\varepsilon\Big)^{-1} e\to X_0, \qquad \varepsilon_2\hat y_\varepsilon\to u_0$$

при $\varepsilon=(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2)\to +0$.

Заметим, что для максимизации гладкой функции $B(\varepsilon;\cdot)$ можно применять методы второго порядка.

ЛИТЕРАТУРА

1. И.И. Еремин, Вл.Д. Мазуров, Н.Н. Астафьев. *Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования.* М.: Наука, 1983. –336 с.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 13-01-00210, 13-07-00181) и программ президиума УрО РАН (проекты 12-П-1-1016, 12-С-1-1017/1, 12-П-1-1023 и 12-П-1-1034).

О МЕТОДЕ НЕВЯЗКИ ДЛЯ КОРРЕКЦИИ ПРОТИВОРЕЧИВЫХ ЗАДАЧ ВЫПУКЛОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ[1]

В. Д. Скарин

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург
e-mail: skavd@imm.uran.ru

Рассмотрим задачу выпуклого программирования (ВП)

$$\min\{f_0(x)\colon x \in X\}, \tag{1}$$

где $X = \{x\colon f(x) \leq 0\}$, $f(x) = [f_1(x), \dots, f_m(x)]$, $f_i(x)$ — определенные на $\mathbb{R}^n$ выпуклые функции ($i = 0, 1, \dots, m$). Задачи ВП с противоречивыми ограничениями ($X = \varnothing$) составляют [1] важный класс несобственных задач (НЗ) ВП.

Несобственные задачи могут возникать вследствие приближенного задания исходной информации, что связано с проблемой устойчивости решения. Такие задачи представляют интерес для теории и методов некорректных задач оптимизации. Поэтому имеет смысл рассматривать стандартные методы регуляризации некорректных моделей для анализа несобственных задач. В работе исследуется возможность применения метода невязки [2] для коррекции НЗ ВП.

Метод невязки регуляризации разрешимой задачи (1) состоит в решении последовательности задач, зависящих от числового параметра δ:

$$\min\{\|x\|^2\colon x \in X \cap M_\delta\}, \tag{2}$$

где $M_\delta = \{x\colon f_0(x) \leq \delta\}$, $\delta \geq f^*$, f^* — оптимальное значение (1). Задача (2) имеет единственное решение x_δ^*, и легко показать, что x_δ^* при $\delta \to f^*$ сходится к нормальному решению задачи (1).

Если же в (1) $X = \varnothing$, то и (2) будет НЗ ВП. Будем учитывать ограничения задачи (2) с помощью некоторой штрафной функции. Рассматриваются два варианта — метод квадратичного штрафа и метод точной штрафной функции. В первом случае (2) заменяется задачей

$$\min_x\{F_\delta(x,r) = \|x\|^2 + \rho\|f^+(x)\|^2 + \rho_0(f_0(x) - \delta)^{+^2}\}, \tag{3}$$

во втором —

$$\min_x\Big\{\Phi_\delta(x,r) = \|x\|^2 + \rho\sum_{i=1}^m f_i^+(x) + \rho(f_0(x) - \delta)^+\Big\}, \tag{4}$$

где $r = [\rho, \rho_0] \in \mathbb{R}^2$, $r > 0$, $\delta \in \mathbb{R}^1$. Обе задачи имеют единственное решение при любых значениях параметров r и δ, в том числе и при $X = \varnothing$. Это обстоятельство и позволяет использовать функции $F_\delta(x,r)$ и $\Phi_\delta(x,r)$ для анализа НЗ ВП.

Основное внимание в работе уделяется выводу оценок, характеризующих сходимость решений задач (3) и (4) к некоторому аппроксимационному решению НЗ ВП.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. И. Еремин, В. Д. Мазуров, Н. Н. Астафьев. *Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования.* М.: Наука, 1983. 336 с.
2. Ф. П. Васильев. *Методы решения экстремальных задач.* М.: Наука, 1981. 400 с.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 13-01-00210, 13-07-00181) и программ Президиума УрО РАН (проекты 12-П-1-1016, 12-С-1-1017/1).

1-d и 2-d ЭЛЛИПСОИДЫ В ВЫПУКЛОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ

П.И. Стецюк

Институт кибернетики им. В.М. Глушкова, Киев
e-mail: stetsyukp@gmail.com

В докладе обсудим вопрос "построения алгоритма, который по своей практической эффективности не уступал бы r-алгоритму и был столь же хорошо обоснован как метод эллипсоидов поставленный Н.З. Шором в 1982 году. Метод эллипсоидов использует оператор растяжения пространства $R_\alpha(\xi) = I + (\alpha - 1)\xi\xi^T$. С его помощью эллипсоид минимального объема, содержащий полушар в n-мерном евклидовом пространстве, преобразовывается в новый шар за одно растяжение пространства (1d-эллипсоид).

Лемма [1]. *Пусть B_k – невырожденная $n\times n$-матрица и такая, что $\|B_k^{-1}(x_k - x^*)\| \leq r$; g_1 и g_2 – n-мерные векторы, такие, что $(x_k - x^*, g_1) \geq 0$ и $(x_k - x^*, g_2) \geq 0$. Если выполняется условие $-\|B_k^T g_1\|\|B_k^T g_2\| < (B_k^T g_1, B_k^T g_2) < 0$ и матрица B пересчитывается по правилу*

$$B_{k+1} = B_k R_{\beta_1}\left(\frac{\xi - \eta}{\|\xi - \eta\|}\right) R_{\beta_2}\left(\frac{\xi + \eta}{\|\xi + \eta\|}\right), \quad \xi = \frac{B_k^T g_1}{\|B_k^T g_1\|},\ \eta = \frac{B_k^T g_2}{\|B_k^T g_2\|},$$

где $\beta_1 = \sqrt{1 + (\xi, \eta)}$ и $\beta_2 = \sqrt{1 - (\xi, \eta)}$, то матрица B_{k+1} – невырожденная и обладает такими свойствами:

(i) $\|B_{k+1}^{-1}(x_k - x^*)\| \leq r$; *(ii)* $\det(B_{k+1}) = \det B_k \sqrt{1 - (\xi, \eta)^2}$; *(iii)* $(B_{k+1}^T g_1, B_{k+1}^T g_2) = 0$.

Лемма имеет следующую интерпретацию. Свойство (i) означает локализацию точки x^* в очередном 2d-эллипсоиде, а свойство (ii) – уменьшение его объема в сравнении с объемом предыдущего эллипсоида. Свойство (iii) позволяет использовать антиовражный прием по типу того, который используется в r-алгоритмах. Оно означает, что субградиенты с тупым углом в текущем пространстве переменных стают ортогональными в преобразованном пространстве, что позволяет улучшить поверхности уровня овражной функции. Коэфициенты растяжения пространства в направлении разности нормированных субградиентов и в направлении суммы нормированных субградиентов определяются углом между субградиентами. Чем более тупым будет этот угол, тем большим будет коэффициент растяжения пространства в направлении разности двух нормированных субградиентов.

2d-эллипсоид можно использовать при построении ускоренных вариантов методов эллипсоидов для широкого класса задач: задача выпуклого программирования, задача отыскания седловых точек выпукло-вогнутых функций, частные случаи задач решения вариационных неравенств, специальные классы задач линейной и нелинейной дополнительности. Для этих методов можно обеспечить скорость сходимости, близкую к r-алгоритмам. Это подтверждают субградиентные методы с преобразованием пространства для нахождения точки минимума выпуклой функции при априорном знании значения функции в точке минимума [2]. Они оказались эффективными при работе с овражными функциями.

ЛИТЕРАТУРА

1. П.И. Стецюк *r-Алгоритмы и эллипсоиды.* – Кибернетика и системный анализ. – 1996, №1, с. 113–134.
2. П.И. Стецюк *Методы эллипсоидов и r-алгоритмы.* Кишинеу: Эврика, 2014, 488 с.

О РАЗНЫХ КЛАССАХ ОТСЕЧЕНИЙ В ВОГНУТОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ

О.В. Хамисов

Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева, Иркутск
e-mail: khamisov@isem.sei@irk.ru

В докладе рассматриваются различные классы отсечений для задачи минимизации вогнутой функции на ограниченном полиэдре. Предлагаются различные методики сдвига отсекающей плоскости [1], а также построения глубоких отсечений. Приводятся результаты предварительного численного эксперимента.

ЛИТЕРАТУРА

1. В.П. Булатов В.П., О.В. Хамисов О.В. *Методы отсечения в* E^{n+1} *для решения задач глобальной оптимизации на одном классе функций* — Журн. вычисл. матем. и матем. физ., 2007, т. 47, № 11. с. 1830-1842.
2. О.В. Хамисов О.В. *Глубокие отсечения в вогнутом и линейном 0-1 программировании* — Труды ИММ УрО РАН, 2014, т.20, №2, с. 294-304.

МЕТОД МАКСИМИЗАЦИИ СОГЛАСОВАНИЯ ДЛЯ АНАЛИЗА ДАННЫХ В УСЛОВИЯХ ИНТЕРВАЛЬНОЙ НЕОПРЕДЕЛЁННОСТИ

С.П. Шарый

Институт вычислительных технологий, Новосибирск, Россия
e-mail: shary@ict.nsc.ru

Для линейной регрессионной модели $b = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$ мы рассматриваем задачу восстановления зависимости при интервальной неопределённости в данных. Пусть интервальная $m \times n$-матрица $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_{ij})$ и интервальный m-вектор $\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{b}_i)$ представляют входные воздействия и выходные отклики модели, такие что $a_1 \in \boldsymbol{a}_{i1}$, $a_2 \in \boldsymbol{a}_{i2}$, $\ldots$, $a_n \in \boldsymbol{a}_{in}$, $b \in \boldsymbol{b}_i$ в i-ом эксперименте, $i = 1, 2, \ldots, m$. Необходимо найти коэффициенты x_i, которые задают линейную зависимость, наилучшим образом приближающую рассматриваемые данные.

Говорят, что семейство значений параметров x_i *согласуется* с интервальными данными $(\boldsymbol{a}_{i1}, \boldsymbol{a}_{i2}, \ldots, \boldsymbol{a}_{in})$, $\boldsymbol{b}_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$, если для каждого индекса i существуют такие точечные представители $a_{i1} \in \boldsymbol{a}_{i1}$, $a_{i2} \in \boldsymbol{a}_{i2}$, $\ldots$, $a_{in} \in \boldsymbol{a}_{in}$, $b_i \in \boldsymbol{b}_i$ что $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i$. Множество всех значений параметров, согласующихся с данными, образует *множество неопределённости параметров* модели. Оценкой параметров имеет смысл взять точку из этого множества, если оно непусто.

Множество неопределённости параметров, определённое выше, является ничем иным как множеством решений $\varXi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b \;\text{ для каких-то } A \text{ из } \boldsymbol{A} \text{ и } b \text{ из } \boldsymbol{b} \,\}$ интервальной системы линейных уравнений $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$. Для задачи восстановления зависимостей в условиях интервальной неопределённости предлагается в качестве меры согласования брать значения *распознающего функционала* множества решений $\varXi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$, т. е.

$$\mathrm{Uss}(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \min_{1 \le i \le m} \left\{ \, \mathrm{rad}\; \boldsymbol{b}_i + \sum_{j=1}^{n} (\mathrm{rad}\; \boldsymbol{a}_{ij})\, |x_j| - \left| \, \mathrm{mid}\; \boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} (\mathrm{mid}\; \boldsymbol{a}_{ij})\, x_j \, \right| \, \right\},$$

где «mid» и «rad» — середина и радиус интервала. Функционал Uss «распознаёт» точки из $\varXi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ зна́ком своих значений: $x \in \varXi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{Uss}\,(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \ge 0$. Кроме того, Uss имееет неплохие свойства, как функция от x и $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{b}$.

В качестве оценки параметров линейной зависимости мы берём значение $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, которое обеспечивает максимум распознающего функционала Uss (метод максимизации согласования). Тогда, если множество неопределённости параметров непусто, мы получаем точку из него. Напротив, если множество неопределённости параметров пусто, мы получаем точку, которая обеспечивает максимальное возможное согласование с данными (определяемое функционалом Uss).

Мы рассматриваем свойства распознающего функционала Uss, его интерпретацию и свойства оценок, получаемых с помощью метода максимума согласования. Обсуждается также взаимоотношение с другуми методами анализа данных.

ЛИТЕРАТУРА

1. С.П. Шарый *Разрешимость интервальных линейных уравнений и анализ данных с неопределённостями.* – Автоматика и Телемеханика, 2012, №2, с. 111–125.
2. С.П. Шарый, И.А. Шарая *Распознавание разрешимости интервальных уравнений и его приложения к анализу данных.* – Вычислительные Технологии, 2013, т. 18, №3, с. 80–109.

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ОБОЩЕННАЯ ЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ ОБМЕНА[1]

В.И.Шмырев

Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН, Новосибирск
e-mail: shvi@math.nsc.ru

В обобщенной линейной модели обмена помимо участников-потребителей имеются участники-фирмы, поставляющие на рынок дополнительные объемы продуктов. Каждая фирма обязана поставить на рынок товары на некоторую заданную сумму (вмененный доход), минимизируя при этом затраты на реализацию плана производства. Потребители имеют некоторые начальные запасы товаров и денег. Покупка и продажа товаров для всех участников (потребителей и фирм) происходит по общим ценам. Выбирая вектор закупок товаров потребитель стремится максимизировать свою линейную функцию полезности. Равновесие в такой модели вводится по аналогии с линейной моделью обмена.

В параметрическом варианте модели исследуется изменение состояния равновесия, когда начальные запасы денег участников являются линейными функциями одного параметра. Предложен конечный алгоритм исследования проблемы, базирующийся на идеях полиэдральной комплементарности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шмырёв В.И. *Обобщённая линейная модель обмена.* // Дискрет. анализ и исслед. операций.—2006, Сер. 2. Т. 13, №2. с. 74-102.

2. Шмырёв В.И. *Алгоритмы полиэдральной комплементарности для отыскания равновесия в линейных моделях конкурентной экономики.* Дискрет. анализ и исслед. операций.—2014, март-апрель, том 21, № 2, с. 84–101.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 12-01-00667-а)

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

НЕЛОКАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Е.В. Аксенюшкина

Байкальский государственный университет экономики и права, Иркутск
e-mail: aks.ev@mail.ru

В докладе рассматривается выпуклая линейно-квадратичная задача

$$\Phi(u) = \langle c, x(t_1)\rangle + \frac{1}{2}\langle x(t_1), Dx(t_1)\rangle + \frac{1}{2}\int_T (\langle x(t), Q(t)x(t)\rangle + u^2(t))dt,$$

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)u, \quad x(t_0) = x^0,$$

$$V = \{u(\cdot) \in PC(T):\ u(t) \in [u^-,\, u^+],\ \ t \in T\}.$$

Для этой задачи представлены два независимых метода улучшения допустимых управлений, равносильные по трудоемкости реализации (цена одного улучшения - две задачи Коши). Оказывается, что оба метода можно естественным образом состыковать и получить комбинированный метод, который в пределах той же трудоемкости обеспечивает двойное улучшение по функционалу (цена каждого улучшения - одна задача Коши). Этот метод представляется наиболее эффективной процедурой численного решения задачи.

Пусть на k-той итерации имеется допустимый процесс $(u^k(t), x^k(t))$, $t \in T$. Найдем решение $p^k(t)$, $t \in T$ комбинированной системы вместе с промежуточным управлением

$$\dot{p} = -A(t)^T p + Q(t)x^k(t) - \Psi(t)b(t)(u_*(p,t) - u^k(t)),$$

$$p(t_1) = -c - Dx^k(t_1),$$

$$v^k(t) = u_*(p^k(t), t), \quad t \in T.$$

Сформируем вектор-функцию и вспомогательное управление

$$p(t, v^k, x) = p^k(t) + \Psi(t)(x - x^k(t)),$$

$$w^k(x,t) = u_*(p(t, v^k, x), t).$$

Найдем решение $x^{k+1}(t)$, $t \in T$ фазовой системы в совокупности с управлением

$$u^{k+1}(t) = w^k(x^{k+1}(t), t), \quad t \in T.$$

Итерация завершена.

Таким образом, в процессе итерации комбинированного метода происходит двойное улучшение по функционалу $\Phi(u^{k+1}) \le \Phi(v^k) \le \Phi(u^k)$, и каждое улучшение дается ценой решения одной задачи Коши.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.В. Аргучинцев *Оптимальное управление: нелокальные условия, вычислительные методы и вариационный принцип максимума* / А.В. Аргучинцев, В.А. Дыхта, В.А. Срочко — Изв. вузов. Математика. — 2009, № 1, с. 3-43.

2. В.А. Срочко *Итерационные методы решения задач оптимального управления*, М.: ФИЗМАТЛИТ, 2000, 160 с.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В ЗАДАЧЕ ПРОЕКТИРОВАНИЯ КОМПОЗИТНОЙ КОЛЬЦЕВОЙ ПЛАСТИНЫ[1]

Е.В. Амелина, С.К. Голушко, А.Ю. Горнов, Т.С. Зароднюк

Конструкторско-технологический институт вычислительной техники СО РАН, Новосибирск
e-mail: amelinaev@kti.sbras.ru, s.k.golushko@gmail.com
Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Иркутск
e-mail: gornov@icc.ru, tz@icc.ru

Тонкостенные пластины широко применяются в качестве важнейших элементов многих конструкций ответственного назначения. Значительное повышение требований, предъявляемых к современным конструкциям, заставляет, с одной стороны, использовать при их изготовлении новые композиционные материалы (КМ), сочетающие высокую прочность и жесткость с другими ценными качествами, а с другой стороны – активизировать работы по оптимальному и рациональному проектированию композитных конструкций, с целью выявления и более полного использования их потенциальных возможностей.

В докладе обсуждаются результаты применения численных методов оптимального управления [1] для решения задач проектирования пластин минимальной массы при наличии ограничений по их несущей способности. Постановка задачи обеспечена использованием структурных моделей КМ [2], позволяющих описать поведение пластин с помощью функциональной зависимости параметров материала от характеристик каждого компонента КМ – связующего и волокон арматуры. В качестве параметров оптимизации использованы структурные и геометрические характеристики, независимой переменной является радиус проектируемой кольцевой пластины. Исследование сформулированных задач оптимального управления показало, что даже при такой небольшой размерности (2 фазовые переменные) проявляется сразу несколько факторов, усложняющих ее численный анализ: многоэкстремальность, жесткость системы дифференциальных уравнений, плохая обусловленность функционалов и другие. Для решения использован программный комплекс OPTCON-A [1]. Приводятся результаты вычислительных экспериментов.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.Ю. Горнов *Вычислительные технологии решения задач оптимального управления.* Новосибирск: Наука, 2009, 279 с.

2. С.К. Голушко, Ю.В. Немировский *Прямые и обратные задачи механики упругих композитных пластин и оболочек вращения.* М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008, 432 с.

[1]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 12-07-33021-мол_а_вед)

ОПТИМАЛЬНАЯ АЭРОДИНАМИЧЕСКАЯ ФОРМА ТЕЛА С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ТЕПЛООБМЕНА

М.А. Аргучинцева

Иркутский государственный университет, Иркутск
e-mail: marguch@math.isu.ru

Оптимальное аэродинамическое проектирование космических аппаратов является одним из интересных и перспективных направлений применения методов оптимального управления. Известно, что форма аппарата сильно влияет на его аэродинамические и тепловые характеристики. Так, одним из эффективных методов решения задач минимизации аэродинамического сопротивления и тепловых потоков к поверхности аппарата является выбор оптимальной формы тела.

В дополнение к улучшению традиционных конфигураций (осесимметричных тел и плоских крыльев) в настоящее время ведется поиск новых форм тел с оптимальными теплофизическими и аэродинамическими характеристиками. Известно, что тела с круговыми поперечными сечениями не являются оптимальными с точки зрения минимизации сопротивления. В частности, в работе [1] было показано, что сопротивление звездообразных тел меньше, чем у тел вращения. Отметим, что подобные результаты имеют место в оптимальных конструкциях трехмерных тел с минимальным нагревом поверхности. В работе [2] были исследованы задачи минимизации суммарных радиационных тепловых потоков трехмерных тел вдоль траектории полета в атмосфере.

Обзор научной литературы [2] показал, что, несмотря на широкий круг исследований задач оптимизации в гиперзвуковой аэродинамике, многие вопросы, связанные с совместным влиянием тепловых потоков и сопротивления на форму трехмерного тела с некруговым поперечным сечением плохо изучены.

Эта статья представляет исследование новой многокритериальной задачи минимизации сопротивления и тепловых потоков к поверхности трехмерных тел. В классе тонких тел, обладающих гомотетией, исходная задача может быть сведена к задаче поиска оптимальных поперечных контуров тел. С математической точки зрения эта проблема является изопериметрическая вариационной задачей с двумя целевыми функционалами. Метод "идеальной точки "применялся для решения поставленной оптимизационной задачи.

Исследование проблемы оптимального поперечного контура показало, что существует класс решений, состоящих из n одинаковых циклов. Отличительной особенностью предлагаемого подхода является то, что процедура минимизации включает в себя не только поиск каждого цикла экстремали, но и количество этих циклов. Это приводит к дополнительному условию на число циклов. Совместное интегрирование уравнения Эйлера-Лагранжа и упомянутого выше условия позволило получить три класса аналитических решений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Theory of optimum aerodynamics shapes.* — Academic Press, New York - London, 1965.
2. Arguchintseva M.A. *Shape optimization problems of 3-dimensional bodies with minimal surface heat.* — Proceedings of the 15th IFAC World Congress, Barcelona, 2002, 2511, pp.1-6.

ИССЛЕДОВАНИЕ МАГИСТРАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ В МЕДИКО-ЭКОЛОГО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ НА ПРИМЕРЕ Г. УЛАН-БАТОР[1]

В.А. Батурин, А.Б. Столбов, Н.С. Малтугуева

Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Иркутск
e-mail: rozen@icc.ru, stolboff@icc.ru, malt-nadezhda@yandex.ru

Использование математического моделирования для исследования взаимодействия экономических, экологических факторов и заболеваемости населения является важным этапом системного анализа проблем общественного развития.

Оценка и прогнозирование медико-эколого-экономического (МЭЭ) состояния региона является актуальной и востребованной задачей, вызванной большой значимостью проблем качества жизни, устойчивого развития и экологии для общества и государства. Разработка динамических математических моделей МЭЭ систем и проведение многовариантных расчетов позволяет анализировать влияние разнообразных факторов на перспективы развития региона. Подобные исследования проведены для МЭЭ модели предприятий города [1]. В настоящее время идет разработка математических моделей для оценки и прогнозирования МЭЭ состояния города Улан-Батор.

Следующим шагом исследования МЭЭ моделей является постановка задач управления. В настоящем исследовании поиск решения задач оптимального управления осуществляется в форме магистральных решений [2]. Магистральное решение определяет оптимальную траекторию, не зависящую непосредственно от граничных условий. Такая траектория соответствует некоторому желаемому долгосрочному уровню состояния МЭЭ системы. Для того чтобы получить решение, удовлетворяющее заданным начальным и конечным условиям, полученные магистральные решения аппроксимируются, например, последовательностью линейных функций в периоды входа и выхода с магистрали. Для поиска магистральных решений применяется метод кратных максимумов [3].

Для того, чтобы провести процедуру поиска магистрального режима к сформированным моделям необходимо добавить критерий оптимальности, ограничения на переменные модели и ввести дополнительные предположения для некоторых элементов модели (например, представление динамики некоторых переменных как экзогенно заданных функций времени).

Для МЭЭ задачи управления рассматриваются различные критерии оптимальности, которые позволяют учитывать наряду с медико-экологическими показателями численность населения; а также использовать различные виды штрафной составляющей критерия в зависимости от содержательного смысла показателей модели.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Моделирование и оценка состояния медико-эколого-экономических систем* / под ред. В. А. Батурина. - Новосибирск: Наука, 2005.

2. Гурман В.И. *Магистральные решения в процедурах поиска оптимального управления* / Автоматика и телемеханика. - 2003. - №3. - С. 61-71.

3. Гурман В.И. *Принцип расширения в задачах управления* - М.: Наука, 1985.

[1]Работа выполнена при поддержке СО РАН (российско-монгольский проект №1, 2013-2014).

МЕТОДЫ ВОЗМУЩЕНИЙ В НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ[1]

А.С. Булдаев

Бурятский государственный университет, Улан-Удэ
e-mail: buldaev@mail.ru

Предлагамые методы возмущений иллюстрируются в рамках задачи оптимального управления со свободным правым концом

$$\Phi(u) = \varphi(x(t_1)) + \int_T F(x(t), u(t), t)dt \to \min_{u \in V}, \tag{1}$$

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad x(t_0) = x^0,\ u(t) \in U,\ t \in T = [t_0, t_1], \tag{2}$$

в которой $x(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))$ - вектор состояния, $u(t) = (u_1(t), ..., u_m(t))$ - вектор управления. В качестве допустимых управлений рассматривается множество кусочно-непрерывных на T векторных функций со значениями в выпуклом множестве $U \subset R^m$. Начальное состояние x^0 и интервал T заданы. Функция $\varphi(x)$ непрерывно дифференцируема на R^n, векторные функции $F(x, u, t)$, $f(x, u, t)$ и их частные производные $F_x(x, u, t)$, $F_u(x, u, t)$, $f_x(x, u, t)$, $f_u(x, u, t)$ непрерывны по совокупности аргументов на на множестве $R^n \times U \times T$.

Методы возмущений применяются для реализации условий нелокального улучшения управлений, конструируемых либо в форме специальных краевых задач в пространстве фазовых и сопряженных переменных, либо в форме специальных задач о неподвижной точке определяемых операторов в пространстве управлений. Методы возмущений сводят решение рассматриваемых задач улучшения управлений к решению последовательности попеременно чередующихся специальных возмущенных задач Коши для фазовых и сопряженных переменных. Расчет возмущенных задач осуществляется до первого улучшения исходного управления. Далее строится новая задача улучшения для полученного управления, для которой процесс решения методом возмущений повторяется.

Таким образом, методы возмущений для решения задач улучшения управления позволяют строить релаксационные последовательности управлений. Методы характеризуются отсутствием операций выпуклого или игольчатого варьирования управлений на каждой итерации улучшения и принципиальной возможностью улучшения неоптимальных управлений, удовлетворяющих принципу максимума. Такая возможность появляется в случае неединственности решения краевых задач и задач о неподвижной точке.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.С. Булдаев. *Новый подход к оптимизации управляемых систем на основе краевых задач.* — Автоматика и телемеханика. — 2011, №6, С. 87-94.
2. А.С. Булдаев, И.-Х. Хишектуева. *Метод неподвижных точек в задачах параметрической оптимизации систем.* — Автоматика и телемеханика. — 2013, №12, С. 5-14.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (№№ 12-01-00914-а, 12-01-98011-р-сибирь-а, 13-01-92200-Монг-а)

ИННОВАЦИОННЫЙ ПОДХОД К ОПТИМИЗАЦИИ РИСКОВ ИНТЕГРИРОВАННЫХ ПРЕДПРИЯТИЙ

Бутрин А.Г.

ФГБОУ ВПО «Южно-Уральский государственный университет» (НИУ), г. Челябинск
E-mail: butrin_agl@mail.ru

В настоящее время методология управления рисками учитывает методы управления рисками на уровне межфирменных взаимодействий. Особое внимание, уделяемое рискам межфирменных взаимодействий, обусловлено изменением мировых экономических условий хозяйствования и нарастанием интеграционных процессов.

Сущность предлагаемого подхода заключается в том, что риски рассматриваются по местам возникновения на каждой из стадий кругооборота оборотных средств промышленного предприятия, а интегральная величина рисков обусловлена параметрами и условиями взаимодействия с поставщиками материальных ресурсов и покупателями готовой продукции. Таким образом, одной из важнейших задач инновационного подхода в управлении рисками интегрированных предприятий является поиск оптимального соотношения параметров взаимодействия с основными контрагентами для обеспечения оптимального уровня риска промышленного предприятия.

Для решения данной задачи целесообразно отказаться от использования традиционного подхода к классификации и определения состава рисков для последующего детального анализа. Это позволило разработать инновационный состав внутренних рисков промышленного предприятия.

Предлагаемый инновационный подход содержит шесть этапов. На первом этапе определяется перечень возможных рисков, разбитых на девять основных групп: риски, обусловленные поставщиком; риски процессов «Закупка материальных ресурсов», «Складирование, хранение, внутренняя транспортировка ресурсов», «Производство», «Складирование. Хранение. Внутренняя транспортировка», «Реализация готовой продукции», «Транспортировка готовой продукции», «Финансирование оборотных средств»; риски покупателя. На втором этапе определяем величины возможных потерь и вероятности их возникновения. Затем осуществляется вычисление и группировка потерь, возможных при функционировании фокусной компании по каждому из видов рисков. На третьем этапе определяется математическое ожидания потерь. На четвертом этапе анализируется математического ожидания потерь. На пятом этапе определяется интегральный показатель уровня риски интегрированных фирм. На заключительном этапе осуществляется поиск оптимальных параметров цепи поставок для снижения интегральной величины уровня риска.

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ ПУЧКАМИ ТРАЕКТОРИЙ

А.В. Гончаров

Институт математики, экономики и информатики, Иркутский государственный университет, Иркутск
e-mail: alex.goncharov1990@gmail.com

В докладе рассматривается задача оптимального управления вида

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x,u), \quad t \in T_0 = [0,T], \tag{1}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left\langle \frac{\partial \rho}{\partial x}, f(t,x,u) \right\rangle = -\rho \operatorname{div}_x f(t,x,u), \quad t \in (0,T),\ x \in \Omega, \tag{2}$$

$$x(0) \in M_0, \tag{3}$$

$$\rho(0,x) = \rho_0(x), \quad x \in \overline{\Omega}, \tag{4}$$

$$u(t) \in U,\ t \in T_0, \tag{5}$$

$$I(u) = \int_{T_0} \int_{M_{t,u}} F(t,x,\rho(t,x))\, dxdt + \int_{M_{T,u}} \varphi(x, \rho(T,x))\, dx \to \inf. \tag{6}$$

Здесь $x : T_0 \to \mathbf{R}^n$, $\rho(t,x) : T_0 \times \overline{\Omega} \to \mathbf{R}^1$, $u : T_0 \to \mathbf{R}^r$, Ω — некоторая область в $\mathbf{R}^n$, множество M_0 компактно в $\mathbf{R}^n$, $M_0 \subset \Omega$, черта сверху означает замыкание множества.

Основные предположения на задачу:
1) Множество U компактно в $\mathbf{R}^r$.
2) Функция $f(t,x,u)$ непрерывна и непрерывно дифференцируема по совокупности переменных, а также удовлетворяет условиям Липшица и линейного роста по x.
3) $F(t,x,\rho)$, $\varphi(x,\rho)$ и $\rho_0(x)$ — неотрицательные гладкие функции.

Допустимыми управлениями считаются гладкие функции $u(\cdot)$ со значениями в U, т.е. $u(\cdot) \in C^1(T_0, \mathbf{R}^r)$, $u(t) \in U$, $t \in T_0$. Рассмотрим соответствующий некоторому допустимому управлению $u(\cdot)$ пучок $\cup_{x_0 \in M_0} x(\cdot, x_0; u)$ решений уравнения (1), исходящий из множества M_0. Множество $M_{t,u}$ определяется как сечение пучка при некотором фиксированном t, т.е.

$$M_{t,\,u} = \{x_t = x(t,x_0;u) : x(\cdot,x_0;u) \text{ — решение (1), (3) при управлении } u(\cdot),\ x_0 \in M_0\}.$$

Задача (1)–(6) называется задачей оптимального управления пучками траекторий заряженных частиц с учетом плотности распределения. Ранее в [2] рассматривались вопросы моделирования и анализа динамики управляемых пучков, были получены необходимые условия оптимальности. Отметим, что в широком круге прикладных задач такого типа управления носят гладкий характер. В данной работе с использованием техники [1] получены необходимые условия оптимальности первого порядка в классе гладких управлений.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.В. Аргучинцев. *Оптимальное управление гиперболическими системами.* М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007, 168 с.
2. Д.А. Овсянников. *Математические методы оптимизации динамики пучков.* Учебное пособие. Л.: Издательство Ленинградского университета, 1986, 92 с.

О ПРОБЛЕМЕ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ С МИЛЛИАРДАМИ ПЕРЕМЕННЫХ [1]

А.Ю. Горнов[a], А.С. Аникин[a], А.Н. Андрианов[b]

[a]*Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Иркутск*
[b]*Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва*
e-mail: gornov@icc.ru

Задачи оптимизации больших и сверхбольших размерностей (“Huge Scale optimization problems”) вполне естественно возникают в целом ряде научных областей – распознавание образов, машинное обучение, анализ больших данных, оптимизация атомно-молекулярных кластеров, анализ геномных цепочек, анализ телекоммуникационных сетей и других. Ю.Е. Нестеровым недавно предложена (см. [1]) следующая классификация задач оптимизации по числу оптимизируемых переменных: “Small” – до 100 переменных, “Medium” – от 10^3 до 10^4, “Large” – от 10^5 до 10^7 и “Huge” – более 10^8 переменных. Неуклонный прогресс современной вычислительной техники, особенно параллельного типа, и расширение ее доступности для широкого пользователя вселяет оптимизм при исследовании проблемы решения задач обсуждаемых размерностей. “Узким местом” в данной научной тематике является, на наш взгляд, неразвитость алгоритмов и вычислительных технологий оптимизации. Можно утверждать, что постановка проблемы, “социальный запрос” и техническая обеспеченность созрели, теперь “слово” за математикой и математиками.

Энергичные исследования по обсуждаемой проблеме ведутся в ряде научных организаций, как в России, так и за рубежом. В Бельгии серьезные продвижение по сверхбольшим задачам достигнуты группой специалистов под руководством Ю.Е. Нестерова, в США успешно работают группа А.И. Немировского и несколько других, в Великобритании – группа П. Рихтарика, в России – группа А.В. Гасникова в МФТИ (ПреМоЛаб); быстро растет число публикаций по данной научной тематике.

В докладе обсуждаются предложенные алгоритмы решения многомерных задач оптимизации, как тестовых, так и прикладных. Исследованы возможности модификации метода, предложенного еще около полувека назад Б.Т. Поляком в работе [2]. С использованием алгоритмов, основанных на этом подходе, удалось решить ряд сепарабельных задач выпуклой оптимизации размерности порядка 10^{11}. С применением реализованных ранее методик (см., напр., [3]) разработаны специализированные вычислительные технологии решения прикладных задач оптимизации потенциала Китинга размерностью более 10^7 переменных и рекордные задачи оптимизации потенциала атомно-молекулярных кластеров Морса. Приводятся результаты численных экспериментов, проведенных как на персональных компьютерах, так и высокопроизводительных вычислительных системах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нестеров Ю.Е. Введение в выпуклую оптимизацию. Москва: МЦНМО, 2010.
2. Поляк Б.Т. Минимизация негладких функционалов // Журнал вычислительной математики и вычислительной физики. 1969. Т. 9. № 3. С. 509–521.
3. Горнов А.Ю. Вычислительные технологии решения задач оптимального управления. Новосибирск: Наука, 2009.

[1]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-00470) и интеграционного проекта СО РАН № 83

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ МАРКЕТИНГОВОЙ КАМПАНИЕЙ МЕРОПРИЯТИЯ[1]

А.В. Дымарчук, А.И. Чернобровов

Московский Авиационный Институт (Национальный Исследовательский Университет, Москва
e-mail: 4ernobrovov@mail.ru

В докладе рассматривается задача оптимизации маркетинговой кампании мероприятия. В данной работе под "мероприятием"понимается любое событие, имеющее фиксированную дату и платное участие. Например: концерт, конференция, рейс на самолёт.

Цель организатора – получение максимальной прибыли от проведения мероприятия. Количество потенциальных покупателей заранее не известно. Более того, спрос на билеты, очевидно зависит от их стоимости, а также от степени информированности потенциальных покупателей. Таким образом, организатор может управлять маркетиноговой кампанией на всем промежутке времени от старта до дня меоромприятия двумя основными способами:

1. Изменяя цену на билет.

2. Инвестирую в рекламную кампанию.

Рекламная кампания рассматривается как совокупность различных рекламных инструментов. Колличество людей привлеченных из рекламного интструмента в работе также рассматривается, как случайная велечина. Однако, считаеся известной зависимость среднего числа привлекаемых клиентов от колличества инвестиций в рекламный инструмент.

Также в модели учитывается то, что момент попку влияет на вероятность покупки. Чем ближе меропритие, тем больше вероятность покупки (при прочих равных) у потенциального клиента.

Поскольку целевая функция (прибыль) зависит от случайных величин, то её нельзя оптимизировать в явном виде. Для решения задачи используется квантильный критерий. Квантиль характеризует максимальную прибыль, полученную организатором, с заданной вероятностью [1].

Рассматриваемая задача была решена при следующих естественных ограничениях:

1. Максимальное количество проданных билетов не должно превышать количества мест на мероприятии. Ограничение является вероятностным, так как число покупателей случайно.

2. Средства, затраченные на рекламную кампанию и общие издержки в сумме не должны превышать бюджет кампании. Ограничение на бюджет является детерминированным.

В работе предложен алгоритм решения задачи в классе программных стратегий, то есть цены и затраты на рекламную кампанию определяются на весь период планирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кибзун А.И., Кан Ю.С. *Задачи стохастического программирования с вероятностными критериями.* - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009.

[1]Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 12-08-00453-а)

АЛГОРИТМЫ ОПТИМИЗАЦИИ ДЛЯ НЕВЫПУКЛЫХ РЕЛЕЙНЫХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ[1]

Т.С. Зароднюк

Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Иркутск
e-mail: tz@icc.ru

Рассматривается задача оптимального управления (ЗОУ) с управляющим воздействием релейного типа

$$\dot{x} = f(x, u, t), x(t_0) = x^0, t \in T = [t_0, t_1] \tag{1}$$

$$u \in U = [u_j \in \underline{u}_j; \overline{u}_j], j = \overline{1, r} \tag{2}$$

$$I(u) = \varphi(x(t_1)) \to min. \tag{3}$$

Вектор-функция $f(x, u, t)$ и скалярная функция $\varphi(x)$ предполагаются непрерывно дифференцируемыми по всем аргументам, кроме t.

Разработаны модификации алгоритмов исследования невыпуклых релейных ЗОУ (1)—(3), опирающиеся на учет специфики структуры управляющих воздействий. Использованы элементы теории машинного обучения (реализовано построение аппроксимации полученных на первом этапе данных о значениях целевого функционала для разных случайных управляющих воздействий с помощью функции Шепарда [1, 2]) и генетического поиска (применены оригинальные механизмы скрещивания и мутации для построения релейных управлений [3]). Проведено сравнение предложенных подходов с методом мультистарта, ориентированного на исследование многоэкстремальных ЗОУ [4], и туннельным методом глобального поиска, опирающимся на построение кривых на множестве достижимости для выхода из уже найденного локального экстремума [5]. Результаты выполненного тестирования позволили продемонстрировать эффективность разработанных алгоритмов для релейных задач оптимального управления.

ЛИТЕРАТУРА

1. D. Shepard *A two-dimensional interpolation function for irregularly-spaced data.* — Proc. of the 23 ACM National Conference, ACM Press, New York. — 1968, p. 517–524.
2. A.Yu. Gornov, I.A. Veyalko *The global extremum searching algorithm for bang-bang optimal control problem based on the Shepard operator.* — J. Studia Informatica Universalis. — 2011, No. 3, p. 91–104.
3. А.Ю. Горнов, И.А. Веялко *Метод генетического поиска для решения релейных задач оптимального управления.* — Труды XVI Байкальской Всероссийской конференции Йнформационные и математические технологии в науке и управлении; Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН, Иркутск. — 2011, Часть 1, с. 22–29.
4. T.S. Zarodnyuk, A.Yu. Gornov *Computing technique based on multistart method for obtaining global extremum in optimal control problems.* — J. Glob Optim. — 2014 (in print).
5. A.Yu. Gornov, T.S. Zarodnyuk *Tunneling algorithm for solving nonconvex optimal control problems.* — Optimization, Simulation, and Control, Springer Optimization and Its Applications. — 2013, Volume 76, p. 289–299.

[1]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ, проект № 12-07-33021-мол_а_вед

NUMERICAL METHOD FOR OPTIMAL CONTROL PROBLEMS GOVERNED BY NONLINEAR HYPERBOLIC SYSTEMS OF PDES

A. Kurganov

Mathematics Department, Tulane University, New Orleans, LA, USA
e-mail: kurganov@math.tulane.edu

We present two numerical methods for solving tracking-type optimal control problems subject to hyperbolic conservation and balance laws in one and two space dimensions. Our approach is based on the formal optimality system and requires numerical solutions of the hyperbolic system of conservation or balance laws forward in time and a corresponding nonconservative linear adjoint system backward in time.

We use a second-order shock-capturing finite volume method for the forward problem, our particular choice is the Godunov-type central-upwind scheme originally developed for general multidimensional hyperbolic systems of conservation laws. For the backward problem we explore two different strategies. In the scalar case, we use a highly accurate Lagrangian discrete characteristics method. In the system case, we develop a second-order Roe-type upwind finite volume scheme.

We illustrate the performance of the proposed numerical methods on a number of optimization problems constrained by both linear and nonlinear scalar conservation laws and a duct design problem as well as the Euler equations of gas dynamics or isothermal gas dynamics equations. Both smooth and discontinuous prescribed terminal states are considered.

REFERENCES

1. A. Chertock, M. Herty and A. Kurganov *An Eulerian-Lagrangian Method for Optimization Problems Governed by Nonlinear Hyperbolic PDEs.* — Computational Optimization and Applications, to appear.
2. M. Herty, A. Kurganov and D. Kurochkin *Numerical Method for Optimal Control Problems Governed by Nonlinear Hyperbolic Systems of PDEs.* — Communications in Mathematical Sciences, to appear.

О ПРОБЛЕМЕ ВЫБОРА ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ВОЛНОВОМУ УРАВНЕНИЮ СИСТЕМ ПЕРВОГО ПОРЯДКА В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ[1]

Н.В. Курганова, Е.А. Лутковская

Иркутский государственный университет, Иркутск
e-mail: navikur@gmail.com, elut@math.isu.ru

При исследовании задач оптимизации, в которых управляемый процесс описывается уравнениями с частными производными выше первого порядка, возможны два альтернативных подхода: изучать задачу в терминах исходных уравнений или предварительно свести эти уравнения к системе уравнений первого порядка. Несмотря на безусловное доминирование второго подхода при рассмотрении задач оптимального управления системами обыкновенных дифференциальных уравнений, в уравнениях с частными производными исторически преобладает первый подход. Его использование в многочисленных работах, посвященных задаче оптимального управления системой Гурса-Дарбу, выявило существенный недостаток. Выяснилось, что сопряженная задача здесь может быть записана лишь в интегральной форме, что существенно усложняет ее использование при построении теории и численных методов решения оптимизационной задачи.

Преимущества предварительного понижения порядка уравнения проявилось при исследовании задачи оптимального управления упругими колебаниями. Этот прием позволил ввести и обосновать удобное понятие обобщенного решения [1], получить необходимые условия оптимальности [2] и численные методы [3] решения рассматриваемой задачи.

В докладе предлагается развитие и обобщение данного подхода, связанного с различными вариантами построения расширенной системы дифференциальных уравнений, эквивалентной исходному волновому уравнению.

ЛИТЕРАТУРА

1. Терлецкий В.А. *Обобщенное решение нелинейного волнового уравнения с нелинейными граничными условиями первого, второго и третьего родов*/В.А. Терлецкий, Е.А. Лутковская.— Дифференциальные уравнения.— 2009, т. 45, N3, С. 403-415.
2. Терлецкий В.А. *Вариационный принцип максимума в задаче оптимального управления нелинейными волновыми процессами* /В.А. Терлецкий, Е. А. Лутковская. — Известия Иркутского гос. Ун-та. Сер. "Математика" .— 2010, Т.3, N3, С.105-117.
3. Лутковская Е.А. *Численные методы на базе вариационного принципа максимума для решения задачи оптимального управления нелинейными волновыми процессами* / Е. А. Лутковская. — Известия Иркутского гос. Ун-та. Сер. "Математика" .— 2012, Т.5, N3, С.63-72.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 14-01-00564)

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИМ УРАВНЕНИЕМ[1]

В.П. Поплевко

Иркутский государственный университет, Иркутск
e-mail: vasilisa@math.isu.ru

Задачи оптимального управления, в которых связь между состоянием x и управлением u определяется параболическими уравнениями, имеют многочисленные приложения при изучении процессов теплопроводности, диффузии, фильтрации и др.

Существует значительное число работ, посвящённых разнообразным аспектам задач оптимального управления процессами, описываемыми параболическими уравнениями и системами. Однако их подавляющая часть посвящена либо построению математических моделей в форме задач оптимального управления, либо в них изучаются задачи оптимального управления более частного характера [1],[2]. Также многие авторы ограничиваются чисто теоретическими результатами, формальным переносом в задачи управления уравнениями с частными производными классических методов градиентного и конечно-разностного типов.

В данной работе важным направлением исследования задач оптимального управления в достаточно общей постановке является вывод конструктивных условий оптимальности (аналогично результатам работы [3]), позволяющих построить серию методов последовательных приближений, и апробация методов на ряде тестовых задач.

Проведенные численные эксперименты показали, что предложенные методы улучшения управляющих функций в задаче оптимального управления параболическим уравнением могут эффективно использоваться для численного решения указанных задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.Г. Бутковский *Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами.* — М.: Наука, 1965, 474 с.
2. А.В. Фурсиков *Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения.* — Новосибирск: Научная книга, 1999, 352 с.
3. О.В. Васильев *Методы оптимизации и их приложения. Часть 2. Оптимальное управление.* — Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1990, 151 с.

[1]Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант РФФИ, проект №14-01-00564)

УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО ИМПУЛЬСНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ПРОМЕЖУТОЧНЫМИ ФАЗООГРАНИЧЕНИЯМИ[1]

О.Н. Самсонюк

Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Иркутск
e-mail: samsonyuk.olga@gmail.com

В докладе рассматриваются задачи оптимального импульсного управления с траекториями ограниченной вариации при наличии промежуточных фазовых ограничений. Импульсная управляемая система имеет следующий вид

$$dx(t) = f\big(t, x(t), u(t)\big)dt + G\big(t, x(t)\big)\pi(\mu), \quad u(t) \in U \text{ п.в. на } T, \quad \pi(\mu) \in \mathcal{W}(T, K). \qquad (1)$$

Здесь $T = [a, b]$ — фиксированный промежуток времени, $U \subset R^r$ — компактное множество, $K \subseteq R^m$ — выпуклый замкнутый конус, $u(\cdot)$ и $\pi(\mu)$ — обычное и импульсное управления соответственно, $x(\cdot) \in BV\,(T, R^n)$, где $BV\big(T, R^n\big)$ — банахово пространство вектор-функций ограниченной вариации на T. Множество импульсных управлений $\mathcal{W}(T, K)$ состоит из элементов $\big(\mu, \gamma(\mu)\big)\}$, где μ — K-значная ограниченная борелевская мера на T, а $\gamma(\mu)$ — набор $\{d_s, \omega_s(\cdot)\}_{s\in S}$, компоненты которого удовлетворяют условиям:

(а) $S \supseteq S_d(\mu) := \{s \in T \mid \mu(\{s\}) \neq 0\}$, $S \subset T$ — не более чем счетное множество;

(б) $\forall\ s \in S \quad d_s \geq 0,\ \omega_s : [0, d_s] \to co\ K_1,\ d_s \geq ||\mu\big(\{s\}\big)||, \quad \displaystyle\int_0^{d_s} \omega_s(\tau)d\tau = \mu\big(\{s\}\big);$

(в) $\displaystyle\sum_{s\in S} d_s < \infty.$

Здесь $K_1 = \{v \in K \mid ||v|| = 1\}$, $||v|| = \sum_{j=1}^m |v_j|$. Понятие решения системы (1) является модификацией понятия, предложенного в [1].

В докладе представлены необходимые и достаточные условия оптимальности, соответствующие канонической теории оптимальности [2, 3]. Они включают некоторые множества сильно или слабо монотонных функций типа Ляпунова, в том числе составных, — решений соответствующих неравенств Гамильтона–Якоби. Представленные результаты иллюстрируются на ряде примеров.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б.М. Миллер, Е.Я. Рубинович *Оптимизация динамических систем с импульсными управлениями.* — М.: Наука, 2005.
2. V. Dykhta and O. Samsonyuk *Some applications of Hamilton-Jacobi inequalities for classical and impulsive optimal control problems.* — European Journal of Control, vol. 17, 2011, pp. 55–69.
3. О.Н. Самсонюк *Составные функции типа Ляпунова в задачах управления импульсными динамическими системами.* — Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. — 2010. Т. 16, N 5. С. 170—178.

[1]Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 14-01-00699)

К ПОЗИЦИОННЫМ НЕОБХОДИМЫМ УСЛОВИЯМ ОПТИМАЛЬНОСТИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ПО СОСТОЯНИЮ ЗАДАЧ ИМПУЛЬСНОГО УПРАВЛЕНИЯ [1]

М.В. Старицын, С.П. Сорокин

Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Иркутск
e-mails: starmaxmath@gmail.com, sorsp@mail.ru

Доклад посвящен развитию современных методов слабо монотонных решений неравенств Гамильтона-Якоби для невыпуклых импульсных задач оптимального управления с траекториями ограниченной вариации, линейных по фазовой переменной. Речь будет идти о нестандартной двойственности и нелокальных вариационных условиях оптимальности, использующих позиционные управления спуска по функционалу [1].

Рассматривается следующая задача (P) оптимального управления дифференциальным уравнением с мерами: $I = \langle c, x(1)\rangle \to \min$,

$$dx = [A(t,u)x + a(t,u)]\ dt + [B(t,u)x + b(t,u)]\ \vartheta(dt), \quad x(0-) = x_0,$$

где $x(t) \in R^n$, роль "обычных" управлений играют борелевские функции u со значениями в заданном компакте $U \subset R^r$, а ϑ — импульсные управления, представляющие собой определенный набор борелевских мер и измеримых функций [2]. Главной компонентой ϑ является скалярная борелевская мера μ. Система подчинена ограничению на полный импульс управления: $\nu([0,T]) \leq M$, где $M > 0$, а ν — еще одна компонента ϑ — скалярная неотрицательная мера, мажорирующая полную вариацию меры μ.

Для невыпуклой задачи (P) установлена нестандартная двойственность: доказано, что задача (P) эквивалентна задаче сравнения (поставленной на траекториях сопряженной системы из принципа максимума) в смысле совпадения допустимых множеств, минимизирующих последовательностей управлений и значений целевых функционалов. С помощью метода разрывной замены времени [3] задача (P) преобразуется к эквивалентной классической задаче (RP) оптимального управления с абсолютно непрерывными траекториями. Заметим, что в редуцированной задаче присутствует терминальное ограничение на компоненту фазовой траектории, отвечающей времени исходной системы. Для задачи (RP) с терминальным ограничением получены вариационные условия оптимальности с позиционными управлениями в формализме Понтрягина [1]. Хотя на данный момент эти результаты не расшифрованы в терминах исходной задачи (P), они допускают естественную алгоритмизацию и разработку на их основе численного алгоритма решения задачи (P).

ЛИТЕРАТУРА

1. В.А. Дыхта *Слабо монотонные решения неравенства Гамильтона-Якоби и условия оптимальности с позиционными управлениями.* — АиТ. — 2014, № 5, с. 17-36.
2. A. Arutyunov, D. Karamzin, F. Pereira *On constrained impulsive control problems.* — J. Math. Sci. — 2010, v. 165, № 6, p. 654-688.
3. Б.М. Миллер, Е.Я. Рубинович *Оптимизация динамических систем с импульсными управлениями.* М.: Наука, 2005, 429 с.

[1]Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проекты № 14-01-00699-а, № 14-01-31254-мол-а, № 13-08-00441-а) и Совета по грантам Президента Российской федерации для государственной поддержки ведущих научных школ (проект № НШ-5007.2014.9)

ОБ УСЛОВИЯХ ГЛОБАЛЬНОЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ[1]

А.С. Стрекаловский

Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Иркутск
e-mail: strekal@icc.ru

Рассматривается стандартная система управления (например, см. [2]):

$$\left.\begin{array}{c} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \quad x(t_0) = x_0, \quad t \in T = [t_0, t_1], \\ u(\cdot) \in \mathcal{U} = \{\, u(\cdot) \in L^r_\infty(T) \mid u(t) \in U \quad \overset{\circ}{\forall} t \in T \,\}, \end{array}\right\} \tag{1}$$

над которой ставится задача оптимального управления

$$J_0(u) \downarrow \min_u, \quad u \in \mathcal{U}, \quad J_i(u) \leq 0, \quad i = 1, \ldots, m \tag{$\mathcal{P}$}$$

с функционалами Больца:

$$J_i(u) := F_{i1}(x(t_1, u)) + \int\limits_T F_i(x(t, u), u(t), t)\, dt, \quad i \in \{\, 0, 1, \ldots, m \,\}. \tag{2}$$

В (2) функции $F_{i1}(x)$ и $F_i(x, u, t)$ являются d.c. функциями по состоянию, т.е.

$$\left.\begin{array}{c} F_{i1}(x) = g_{i1}(x) - h_{i1}(x), \\ F_i(x, u, t) = g_i(x, u, t) - h_i(x, t), \quad t \in T, \end{array}\right\} \tag{3}$$

где функции $x \mapsto g_{i1}(x)$, $x \mapsto h_{i1}(x)$ являются выпуклыми на $I\!R^n$, а функции $g_i(x, u, t)$, $h_i(x, t)$ являются выпуклыми функциями по переменной $x \in I\!R^n$.

Для невыпуклых задач типа $(\mathcal{P})$ предлагается два типа условий глобальной оптимальности (УГО)[3], связанных со знаменитым принципом максимума Понтрягина [1]. На основе УГО разработаны методы локального и глобального поисков и исследована их сходимость [4]. Также произведено тестирование этих методов, продемонстрировавшее эффективность разработанного подхода на достаточно широком поле тестовых задач большой размерности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л.С.Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф Мищенко. *Математическая теория оптимальных процессов.* — М.: Физматгиз, 1961.

2. В.А. Срочко. *Итерационные методы решения задач оптимального управления.* — М.: Физматлит, 2000.

3. A.S. Strekalovsky. *Global Optimality Conditions for Optimal Control Problems with Functions of A.D.Alexandrov.* — Journal of Optimization Theory and Applications. — 2013, V. 159, No. 6, pp. 297–321.

4. А.С. Стрекаловский, М.В. Янулевич. *Глобальный поиск в одной невыпуклой задаче оптимального управления.* — Известия РАН. Теория и системы управления. — 2013, Т. 52, № 6, С. 52–67.

[1]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-92201)

АЛГОРИТМЫ КВАЗИРАВНОМЕРНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ МНОЖЕСТВА ДОСТИЖИМОСТИ В УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМАХ С ДВУМЯ И ТРЕМЯ ФАЗОВЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ [1]

Е. А. Финкельштейн

Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Иркутск
e-mail: finkel@icc.ru

В работе предлагаются алгоритмы поиска достижимых точек равномерно (с некоторой точностью) заполняющих объем множества достижимости и аппроксимирующих множество уже при небольшом количестве точек. Предлагаемые алгоритмы во многом схожи с методом «глубоких ям» из [1] и, аналогично рассмотренному в этой работе подходу, для пополнения точек аппроксимирующего множества требуется многократное решение вспомогательных задач оптимизации.

Рассматриваются нелинейные управляемые системы $\dot{x} = f(x(t), u(t), t)$, с начальными условиями $x(t_0) = x_0$ и ограничениями на управления $\underline{u} \leq u(t) \leq \overline{u}$ на $t \in [t_0, t_1]$. Алгоритмы построения аппроксимации заключаются в последовательном добавлении точек $x^i(t_1)$ к набору $\{x^n\}$ полученному на предыдущих этапах. В первом варианте алгоритма задача поиска каждой добавляемой точки состоит в решении максиминной задачи оптимального управления $x^* = \max_u \min_{i=\overline{1,n}} \rho_i$, где $\rho_i = ||x^i - x(t_1)||_2$. Для того чтобы при решении этой задачи было возможно использовать методы оптимизации, рассчитанные на гладкие функционалы, предложены варианты гладкой аппроксимации дискретного максиминного функционала. После завершения каждого этапа оптимизации будет получено промежуточное решение, поэтому дополнительным критерием остановки этого алгоритма может служить затраченное на вычисления время. Второй алгоритм основывается на минимизации непрерывной функции $x^* = \min_u \sum_{i=1}^{nb} S(\rho_i)$ зависящей от расстояния между точками, которая определяется так, чтобы быть равной нулю, если ρ_i больше желаемого порогового значения, равной достаточно большому числу при $\rho_i = 0$, и монотонно убывать в промежутке. Тот факт, что заранее известна нижняя оценка оптимального значения функционала, позволяет существенно экономить вычислительное время при использовании стохастических алгоритмов глобальной оптимизации, останов алгоритма происходит при невозможности добавить точку удовлетворяющую условию равномерности. При числе точек аппроксимации порядка 10^2 результаты работы алгоритмов близки, однако при удачном выборе функции S второй алгоритм позволит получить решение быстрее, в то время как, при меньшем числе аппроксимирующих точек, первый алгоритм будет давать существенно более надежные результаты. Вычислительные эксперименты с предложенными алгоритмами проведены для двухмерных и трехмерных задач, получены результаты визуализации тестовых множеств достижимости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Каменев Г. К. Аппроксимация вполне ограниченных множеств методом глубоких ям. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 41:11 (2001), 1751–1760.

[1] Работа частично поддержана РФФИ (проект 14_01_31296_мол-а) и междисциплинарным интеграционным проектом СО РАН № 81

ТОЧНЫЕ ШТРАФЫ В ЗАДАЧЕ ПОСТРОЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ[1]

А.В. Фоминых

Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург
e-mail: alexfomster@mail.ru

В докладе рассматривается дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(x, t), \tag{1}$$

где $F(x,t)$ — заданное многозначное отображение из R^n, $x(t)$ — n-мерная вектор-функция фазовых переменных, $t \in [0,T]$. Предполагается, что каждому моменту времени $t \in [0,T]$ и каждой фазовой точке $x \in R^n$ функция $F(x,t)$ ставит в соответствие некоторый выпуклый компакт. Из каждой начальной точки

$$x_0 = x(0) \tag{2}$$

включения (1) выходит целое семейство траекторий, и ставится задача выделения таких решений, которые доставляют минимум интегральному функционалу

$$I = \int_0^T f_0(x,t)dt. \tag{3}$$

В работах [1, 2] приведены некоторые классические результаты, расширяющие известный принцип максимума Понтрягина на дифференциальные включения. При этом принцип максимума получен при достаточно жёстких предположениях, в частности, при условии, что опорная функция $c(F(t,x),\psi)$ многозначного отображения $F(t,x)$ дифференцируема по вектору фазовых координат.

В настоящем докладе предпринята попытка обобщить данные результаты на случай, когда дифференцируемость по x опорной функции $c(F(t,x),\psi)$ не предполагается. Данное обобщение проводится с помощью аппарата опорных функций [3] и точных штрафных функций [4, 5]. Методы негладкой оптимизации [6] позволяют получить необходимые условия минимума функционала (3) при ограничениях (1), (2).

ЛИТЕРАТУРА

1. Благодатских В. И., Филиппов А. Ф. *Дифференциальные включения и оптимальное управление* // Тр. МИАН. 1985. Т. 169. С. 194–252.
2. Благодатских В. И. *Принцип максимума для дифференциальных включений* // Тр. МИАН. 1984. Т. 166. С. 23–43.
3. Рокафеллар Р. *Выпуклый анализ.* М.: Мир, 1973. 470 с.
4. Карелин В. В. *Точные штрафы в задаче наблюдения* // Вестник СПбГУ. Сер. 10. 2008. Вып. 4. С. 3–7.
5. Демьянов В. Ф. *Условия экстремума и вариационное исчисление.* М.: Высшая школа, 2005. 335 с.
6. Васильев Л. В., Демьянов В. Ф. *Недифференцируемая оптимизация.* М.: Наука, 1981. 384 с.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 12-01-00752, 14-01-31521 мол_а)

ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНАЯ ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ: СЕДЛОВОЙ ПОДХОД[1]

Е.В. Хорошилова

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, ВМК
e-mail: khorelena@gmail.com

В гильбертовом пространстве на конечном отрезке времени $[t_0, t_1]$ рассматривается линейно-квадратичная задача оптимального управления с фиксированным левым (x_0) и подвижным правым (x_1) концами траектории $x(\cdot)$:

$$(x_1^*, x^*(\cdot), u^*(\cdot)) \in \mathrm{Argmin}\left\{ \langle Sx_1^*, x_1\rangle + \int_{t_0}^{t_1} (\langle Q_1(t)x^*(t), x(t)\rangle + \langle Q_2(t)u^*(t), u(t)\rangle)dt \ \middle| \right. \quad (1)$$

$$A_1 x_1 \le a_1, \ x_1 \in \mathrm{R}^n, \quad (2)$$

$$\frac{d}{dt}x(t) = D(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(t_0) = x_0, \ x(t_1) = x_1^*, \quad (3)$$

$$x(\cdot) \in \mathrm{AC}^n[t_0, t_1], \ u(\cdot) \in \mathrm{U}\}, \quad (4)$$

$$\mathrm{U} = \{u(\cdot) \in \mathrm{L}_2^r[t_0, t_1] | \ \frac{1}{2}\|u(\cdot)\|^2_{L_2^r} \le \mathrm{C}^2\}. \quad (5)$$

При этом:

— целевой функционал (1) представляет собой сумму терминальной и интегральной компонент квадратичного вида;

— задача оптимизации (1) решается при дополнительных терминальных ограничениях (2);

— управляемая динамика системы линейна (3);

— фазовые траектории $x(\cdot)$ предполагаются непрерывными функциями из класса абсолютно непрерывных функций $\mathrm{AC}^n[t_0, t_1]$ (4);

— управления $u(\cdot)$ ограничены по норме $\mathrm{L}_2^r[t_0, t_1]$, т.е. интегрально (5);

— множество достижимости образует все R^n или его подпространство.

Требуется найти управление $u^*(\cdot) \in \mathrm{U}$ такое, чтобы отвечающая ему траектория $x^*(\cdot) \in \mathrm{AC}^n[t_0, t_1]$ соединила начальную точку x_0 с точкой минимума x_1^* целевого функционала на правом конце. Близкие постановки задачи и подходы к решению рассматривались в [1], [2].

В отличие от традиционного подхода, задача оптимального управления рассматривается не как задача оптимизации, а как седловая задача. Ее решением является седловая точка лагранжиана с компонентами: управление, фазовая и сопряженная к ней траектории, терминальные переменные. Для решения задачи предлагается седловой итеративный метод, доказывается его сходимость по всем компонентам седлового решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.С. Антипин, Е.В. Хорошилова. *Линейное программирование и динамика.* — Тр. ИММ УрО РАН. — 2013, т. 19, №2, с. 7-25.

2. Elena V. Khoroshilova. *Extragradient-type method for optimal control problem with linear constraints and convex objective function.* — Optim. Lett. — 2013, Vol. 7, № 6. p. 1193-1214.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 12–01–00783) и Программы государственной поддержки ведущих научных школ (проект НШ-4640.2014.1.)

О ЧИСЛЕННОМ МЕТОДЕ ГЛОБАЛЬНОГО ПОИСКА В НЕВЫПУКЛЫХ ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ[1]

М.В. Янулевич

Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Иркутск
e-mail: max@irk.ru

Рассматривается линейная управляемая система

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + b(u(t), t) \quad \overset{\circ}{\forall} t \in T = [t_0, t_1], \quad x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

$$u(\cdot) \in \mathcal{U} = \{\, u(\cdot) \in L^r_\infty(T) \mid u(t) \in U \quad \overset{\circ}{\forall} t \in T \,\}, \tag{2}$$

где $A(\cdot)$ — $(n \times n)$ матричная функция с элементами $t \mapsto a_{ij}(t)$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, непрерывными на $T := [t_0, t_1]$, U — компакт. Предполагается также, что вектор-функция $(u, t) \mapsto b(u, t)$ также является непрерывной по переменным $u \in I\!R^r$ и $t \in T$.

Исследуется следующая задача оптимального управления (ОУ):

$$(\mathcal{P}): \qquad J(u) = F_1(x(t_1, u)) + \int\limits_T F(x(t, u), t)\, dt \downarrow \min_u, \quad u(\cdot) \in \mathcal{U}. \tag{3}$$

Функции функции $x \mapsto F_1(x) \colon I\!R^n \to I\!R$ и $(x, t) \mapsto F(x, t)$ из (3) являются d.c. функциями (функциями А.Д. Александрова, см. [1]) и, следовательно, представимы в виде разности двух выпуклых функций по переменной x (для каждого $t \in T$):

$$F_1(x) = g_1(x) - h_1(x), \qquad F(x, t) = g(x, t) - h(x, t) \quad \forall x \in \Omega \subset I\!R^n, \quad t \in T, \tag{4}$$

где $x \mapsto g_1(x)$, $x \mapsto h_1(x)$, $x \mapsto g(x, t)$ и $x \mapsto h(x, t)$ являются выпуклыми по x функциями для любого $t \in T$.

Следует отметить, что рассматриваемая задача ОУ $(\mathcal{P})$ является невыпуклой (см. [1,2]), и в ней могут существовать процессы, удовлетворяющие принципу максимума Понтрягина (ПМП), которые не являются глобально оптимальными. Эта невыпуклость порождается целевым функционалом $J(\cdot)$ задачи $(\mathcal{P})$.

На основе условий глобальной оптимальности [1] предложен метод поиска глобально оптимальных процессов в задаче $(\mathcal{P})$, который объединяет процедуру локального поиска и процедуру улучшения процесса, удовлетворяющего ПМП [2]. При определенных предположениях доказана теорема сходимости разработанного метода глобального поиска. Проведен вычислительный эксперимент, продемонстрировавший работоспособность и эффективность предложенного метода на серии тестовых задач с квадратичным невыпуклым целевым функционалом.

ЛИТЕРАТУРА

1. A.S. Strekalovsky. *Global Optimality Conditions for Optimal Control Problems with Functions of A.D.Alexandrov.* — Journal of Optimization Theory and Applications. — 2013, V. 159, No. 6, pp. 297–321.

2. А.С. Стрекаловский, М.В. Янулевич. *Глобальный поиск в одной невыпуклой задаче оптимального управления.* — Известия РАН. Теория и системы управления. — 2013, Т. 52, № 6, С. 52–67.

[1]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-92201)

ОПТИМИЗАЦИЯ В ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ, ЗАРЕГИСТРИРОВАННЫХ УСТРОЙСТВОМ С НЕТОЧНО ЗАДАННОЙ АППАРАТНОЙ ФУНКЦИЕЙ, РЕГУЛЯРИЗОВАННЫМ МЕТОДОМ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ А. Н. ТИХОНОВА[1]

В. В. Волков, В. И. Ерохин, А. А. Будаев

Борисоглебский государственный педагогический институт, Борисоглебск
e-mail: volkov@fizmat.net
Санкт-Петербургский государственный технологический институт (технический университет), Санкт-Петербург

В работе рассматривается применение сравнительно малоизученного метода решения приближенных систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) — регуляризованного метода наименьших квадратов (РМНК) А. Н. Тихонова [1] — к решению практической задачи восстановления неточно зарегистрированных изображений.

Задача РМНК [1, 2, 3]. Пусть существует совместная конечномерная СЛАУ $A_0x = b_0$, где $A_0 \in R^{m\times n}$, $b_0 \in R^m$, $x_0 \in R^n$ — нормальное решение этой системы. Вместо A_0 и b_0 известны приближённые A и b, такие что $\|A_0 - A\| \le \mu$, $\|b_0 - b\| \le \delta < \|b\|$. Найти $A_1 \in R^{m\times n}$, $b_1 \in R^m$, $x_1 \in R^n$, такие что $\|A_1 - A\| \le \mu$, $\|b_1 - b\| \le \delta$, $A_1x_1 = b_1$, $\|x_1\| \to \min$.

Стандартным методом решения подобных задач является решение регуляризованной системы Эйлера $\left(A^TA + \alpha I\right)x_\alpha = A^Tb$ при значениях параметра регуляризации $\alpha > 0$.

Удалось показать [2], что в определённых случаях РМНК приводит к необходимости использования отрицательного параметра регуляризации. Этот случай интересен как с теоретической, так и с практической точки зрения, т.к. его вычислительная реализация требует специальных инструментов для преодоления плохой численной обусловленности.

Задача восстановления исходного изображения по изображению, зарегистрированному прибором с неточной аппаратной функцией (см., например, [4]), может быть сведена к решению приближённых СЛАУ.

Значения параметра регуляризации, обеспечивающие наименьшую погрешность восстановления изображения, определялись в серии вычислительных экспериментов. При этом для восстановления изображений применялись специально разработанные алгоритмы, обладающие минимальной обусловленностью и работающие, в т. ч. при $\alpha < 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А. Н. О приближенных системах линейных алгебраических уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1980. Т. 20. № 6. С. 1373-1383.
2. Волков В. В., Ерохин В. И. О тихоновских решениях приближенных систем линейных алгебраических уравнений при конечных возмущениях их матриц // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2010. Т. 50. № 4. С. 618-635.
3. Ерохин В. И., Волков В. В. Методы и модели восстановления линейных зависимостей по неточной информации // Известия СПбГТИ(ТУ). 2011. № 10 С. 52-57.
4. Воскобойников Ю. Е., Литасов В. А. Устойчивый алгоритм восстановления изображения при неточно заданной аппаратной функции // Автометрия. 2006. №42(6). С. 3-15.

[1] Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект №14-01-31318)

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ ПОСТРОЕНИЯ КАПИТАЛЬНЫХ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ПО ИНФОРМАЦИИ ОБ ИНВЕСТИЦИЯХ [1]

В.К. Горбунов, В.П. Крылов

Ульяновский государственный университет
e-mail: vkgorbunov@mail.ru

В [1] предложен метод построения стандартных производственных функций (ПФ), один из факторов которых – эффективные производственные фонды (ЭПФ), по статистической информации о производственных инвестициях. Для оценки параметров ПФ используется уравнение динамики фондов, определяемой инвестициями, а также коэффициентами амортизации фондов и освоения инвестиций. Вместе с параметрами ПФ и динамики фондов требуется оценивать начальное значение ЭПФ и коэффициент амортизации фондов. Функции строятся в последовательно усложняющихся классах, начиная с простейшего класса Кобба-Дугласа. Новая, более сложная задача МНК оценивания расширенного набора параметров в общем случае является плохо обусловленной (некорректно поставленной) задачей нелинейного программирования, требующей использования эффективных методов оптимизации, а также регуляризации на основе дополнительной содержательной информации. В указанной работе был предложен специальный вариант метода продолжения по параметру [2], преодолевающий сложности нелинейной минимизации.

Работа [3] развивает подход [1] в следующих отношениях. В уравнение динамики капитала вводится дополнительно коэффициент реализуемости производственных инвестиций, представляющий долю использования выделенных инвестиций после коррупционного присвоения их некоторой части. В качестве дополнительного средства преодоления вычислительной сложности задач МНК используется переход к индексным ПФ с последующим восстановлением параметров функций в абсолютных формах (относительно абсолютных значений переменных) [4]. Также предложен метод регуляризации задачи оценивания параметров новой модели на основе использования экспертной информации о показателях динамики фондов и стабилизации процесса перехода к более сложным классам ПФ. Будут представлены результаты построения ПФ с оценкой ЭПФ для некоторых регионов России.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. К. Горбунов, А. Г. Львов *Построение производственных функций по данным об инвестициях* – Экономика и математические методы. 2012. Вып. 2, с. 95-107.
2. Дж. Ортега, Дж. Рейнболдт *Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными.* – М.: Мир, 1975.
3. В. К. Горбунов, В.П. Крылов *Построение производственных функций по данным об инвестициях с оценкой эффективных фондов* // Представлено в печать.
4. В. К. Горбунов *Производственные функции: Теория и построение. Учебное пособие.* – Ульяновск: Изд-во УлГУ, 2013.

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ (проект № 12-01-97029).

MATHEMATICAL MODELLING OF HEAT TRANSFER IN PACKED BEDS

A.I. Dreglea

Melentiev Energy System Institute Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk
e-mail: adreglea@gmail.com

In the report we model three problems. The first one is the "homogeneous" flow model [1], the simplest approach to the problem, the two phase flow is assumed to be a single phase flow having pseudo properties arrived at by suitably weighting the properties of the individual phases. The main difficulty in particular problem is to solve Dirichlet boundary problem for Poisson equation

$$\Delta u(x, y) = f(x, y), \ \ (x, y) \in D,$$

∂D is boundaries of the domain D with the boundary conditions on $\partial D : u(x, y)|_{\partial D} = c(x, y)$. The multiply connected domain D and interior separation lines are the main challenges [2, p.167].

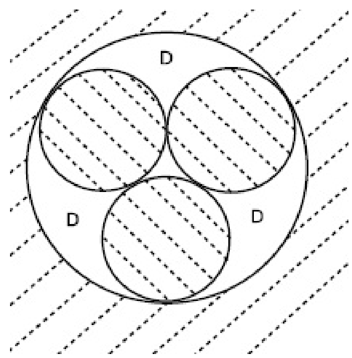

Рис. 1: Packed beds: example of the domain D

The second problem concerns the "separated" flow model. In this approach the two phases of the flow are considered to be artificially segregated. Two sets of basic equations can now be written, one for each phase. The information must be forthcoming about the flow area occupied by each phase and about various kinds of interactions at the interface. This information is integrated into the basic equations on the basis of simplified models of the flow. The third one addresses the "flow pattern" models. In this more sophisticated approach the two phases are considered to be arranged in one of several prescribed geometries. These geometries are based on the various configuration of flow patterns found when both the phases are flowing together. The basic equations are solved within the framework of each of these idealized representations. In order to apply these models it is necessary to know when each should be used and to be able to predict the transition from one pattern to another.

REFERENCES

1. Pavlenko A.N., Tairov E.A., Zhukov V.E., Levin A.A., Tsoi A.N *Investigation of transient processes at liquid boiling under nonstationary heat generation conditions.* J. of Eng. Thermophysics, 2011, V-20, p. 380 - 406
2. G.E. Forsythe, W.R. Wasow *Finite-difference methods for partial differential equations.* John Wiley and Sons, INC New York - London, 1963, p. 1-487.

ВЗВЕШЕННАЯ СТРУКТУРНАЯ МАТРИЧНАЯ КОРРЕКЦИЯ НЕСОБСТВЕННОЙ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ 1-ГО РОДА[1]

В.И. Ерохин, М.Н. Хвостов

Санкт-Петербургский государственный технологический институт (технический университет), Санкт-Петербург,
Борисоглебский государственный педагогический институт, Борисоглебск
e-mail: erohin_v_i@mail.ru, hvostoff@inbox.ru

В докладе, в продолжение исследования, начатого в работе [1], рассматривается проблема P матричной коррекции несобственной задачи линейного программирования (ЛП) 1-го рода по минимуму взвешенной евклидовой нормы в случае, когда элементы расширенной матрицы $[A\ -b]$ коэффициентов системы её ограничений разбиты на множества корректируемых $[K^+\ k^+]$ и некорректируемых $[K^-\ k^-]$ элементов.

Теорема. *Если решение проблемы P существует, то искомые векторы и матрицы могут быть построены по прямым формулам, зависящим от решения (разрешимой в указанных условиях) задачи безусловной минимизации.*

$$\Phi(\tilde{x}) = \sum_{i=1}^{m} \frac{(b - A\,(\mathrm{diag}(\tilde{x})\tilde{x}))_i^2 \cdot \left| s\left(\begin{bmatrix} \mathrm{diag}(\tilde{x})\tilde{x} \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathcal{H}_{i*}^\top \\ \chi_i \end{bmatrix} \right) \cdot \mathrm{diag}\left(\begin{bmatrix} \mathcal{W}_{i*}^\top \\ \omega_i \end{bmatrix} \right) \right|^2}{\left(s^\top\left(\begin{bmatrix} \mathrm{diag}(\tilde{x})\tilde{x} \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathcal{H}_{i*}^\top \\ \chi_i \end{bmatrix} \right) \cdot s\left(\begin{bmatrix} \mathrm{diag}(\tilde{x})\tilde{x} \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathcal{H}_{i*}^\top \\ \chi_i \end{bmatrix} \right) \right)^2} \to \min,$$

где коэффициенты $\begin{bmatrix} \mathcal{W}_{i*}^\top \\ \omega_i \end{bmatrix}$ *определяют вес каждого элемента i-ой строки матрицы коррекции $[H\ \ -h]$ в целевой функции, $\mathcal{H}_{i*}$ – i-ая строка матрицы $\mathcal{H}$,* $s(p,q) = (s(p,q)_i) \left| \begin{array}{l} s(p,q)_i = p_i, \quad \text{если } q_i \neq 0 \\ s(p,q)_i = 0, \quad \text{если } q_i = 0 \end{array} \right.$, $\mathcal{H} = (\mathcal{H}_{ij}) \left| \begin{array}{l} \mathcal{H}_{i,j} = 1, \text{ если } \{i,j\} \in \mathbf{K}^+ \\ \mathcal{H}_{i,j} = 0, \text{ если } \{i,j\} \in \mathbf{K}^- \end{array} \right.$, $\chi = (\chi_i) \left| \begin{array}{l} \chi_i = 1, \text{ если } \{i\} \in \mathbf{k}^+ \\ \chi_i = 0, \text{ если } \{i\} \in \mathbf{k}^- \end{array} \right.$.

Получены аналитические формулы для вычисления градиента указанной функции [2]. Реализована вычислительная процедура минимизации с помощью алгоритма Бройдена-Флетчера-Гольдфарба-Шанно. Приведены результаты решения модельной задачи средней размерности с разреженной матрицей коэффициентов из каталога "lp/infeas"хранилища Netlib, иллюстрирующие сходимость по аргументу и целевой функции, а также распределение относительных поправок элементов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ерохин В.И., Красников А.С., Хвостов М.Н. О достаточных условиях разрешимости задач линейного программирования при матричной коррекции их ограничений // Тр. ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19. № 2. С. 145-156.

2. Ерохин В.И., Красников А.С., Хвостов М.Н. Квазиньютоновские алгоритмы матричной коррекции несобственных задач линейного программирования с произвольным множеством корректируемых коэффициентов // Известия СПбГТИ (ТУ). 2014. № 23. С. 87-92.

[1]Работа выполнена в рамках гранта РФФИ 14-01-31318

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ СОПРЯЖЕННЫХ ПАР СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ПО ЗАДАННОМУ РЕШЕНИЮ [1]

А.С. Красников

Российский государственный социальный университет, Москва
e-mail: askrasnikov@gmail.com

В докладе рассматривается теорема о восстановлении параметров сопряженной пары систем линейных алгебраических уравнений по заданному решению с использованием интервального критерия.

Теорема. *Семейства матриц $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$ и векторов $b \in \mathbf{R}^m$, $c \in \mathbf{R}^n$, гарантирующих, что заданные векторы $\bar{x} \in \mathbf{R}^n$ и $\bar{u} \in \mathbf{R}^m$ принадлежат множеству решений сопряженной пары систем линейных алгебраических уравнений*

$$\begin{cases} Ax = b, \\ u^\top A = c^\top, \end{cases}$$

и при этом выполняются условия $\|A\| \le \alpha,\ \|b\| \le \beta,\ \|c\| \le \gamma$, где $\alpha > 0,\ \beta > 0,\ \gamma > 0$ могут быть построены по формулам

$$b = \lambda \frac{\bar{u}}{\bar{u}^\top \bar{u}} + \lambda \left(I_m - \frac{\bar{u}\bar{u}^\top}{\bar{u}^\top \bar{u}} \right) \Delta b,\ c = \lambda \frac{\bar{x}}{\bar{x}^\top \bar{x}} + \lambda \left(I_n - \frac{\bar{x}\bar{x}^\top}{\bar{x}^\top \bar{x}} \right) \Delta c,\ A = \frac{1}{\lambda} b c^\top,$$

где знаком $\|\cdot\|$ обозначена, в зависимости от контента, евклидова матричная или векторная норма, скалярный параметр λ вычисляется по правилу

$$\lambda \le \bar{\lambda} = \min\left(\frac{\alpha}{\bar{\alpha}}, \frac{\beta}{\bar{\beta}}, \frac{\gamma}{\bar{\gamma}} \right),$$

$$\bar{\beta} = \sqrt{\frac{1}{\bar{u}^\top \bar{u}} + \Delta b^\top \left(I_m - \frac{\bar{u}\bar{u}^\top}{\bar{u}^\top \bar{u}} \right) \Delta b}, \quad \bar{\gamma} = \sqrt{\frac{1}{\bar{x}^\top \bar{x}} + \Delta c^\top \left(I_n - \frac{\bar{x}\bar{x}^\top}{\bar{x}^\top \bar{x}} \right) \Delta c}, \quad \bar{\alpha} = \bar{\beta} \cdot \bar{\gamma},$$

$\Delta b \in \mathbf{R}^m$, $\Delta c \in \mathbf{R}^n$ – произвольные векторы, I_m, I_n – единичные матрицы размерности m и n соответственно.

При этом $\|A\| = \lambda \cdot \bar{\alpha},\ \|b\| = \lambda \cdot \bar{\beta},\ \|c\| = \lambda \cdot \bar{\gamma}$.

В конце доклада проводится показательный численный эксперимент с модельным примером.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 14-01-31318)

NUMERICAL SOLUTION OF WEAKLY REGULAR VOLTERRA INTEGRAL EQUATIONS OF THE 1ST KIND

I. Muftahov

Irkutsk State Technical University, Russia
e-mail: ildar_sm@mail.ru

We propose new numerical method for solution of the following linear scalar Volterra integral equation of the 1st kind

$$\int_0^t K(t,s)x(s)ds = f(t), \;\; 0 \le s \le t \le T, \;\; f(0) = 0,$$

where kernel is defined as follows

$$K(t,s) := \begin{cases} K_1(t,s), \; t,s \in m_1, \\ \;\dots \;\; \dots\dots\dots \\ K_n(t,s), \; t,s \in m_n, \end{cases} \quad \begin{array}{l} m_i := \{t,s \mid \alpha_{i-1}(t) < s < \alpha_i(t)\}, \\ \alpha_0(t) = 0, \;\; \alpha_n(t) = t, \; i = \overline{1,n}, \end{array}$$

$\alpha_i(t), \; f(t) \in \mathcal{C}^1_{[0,T]}$, $K_i(t,s)$ have continuous derivatives (w.r.t. t) for $t,s \in \overline{m_i}$, $K_n(t,t) \neq 0$, $\alpha_i(0) = 0, \quad 0 < \alpha_1(t) < \alpha_2(t) < \cdots < \alpha_{n-1}(t) < t$, $\alpha_1(t), \dots, \alpha_{n-1}(t)$ increase at least in the small neighborhood $0 \le t \le \tau$, $0 < \alpha_1'(0) \le \cdots \le \alpha_{n-1}'(0) < 1$. The mid-rectangular quadrature rule is employed for the numerical method construction. The accuracy of proposed numerical method is $\mathcal{O}(1/N)$. We introduce the following mesh $\Omega_x^N := \{t_i | t_i = i/N, i = 0, \dots, N\}$, the mesh can be non-uniform: $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N = T, \;\; h = \max\limits_{i=\overline{1,N}}(t_i - t_{i-1}) = \mathcal{O}(N^{-1})$ and seek the approximate solution $x_N(t) = \sum\limits_{i=1}^{N} x_i \delta_i(t), \;\; t \in (0,T], \;\; \delta_i(t) = \begin{cases} 1, & \text{for } t \in \Delta_i = (t_{i-1}, t_i] \\ 0, & \text{for } t \notin \Delta_i \end{cases}$, where the coefficients $x_i, \; i = \overline{1,N}$ are under determination. Let us consider the equation $\int\limits_0^{t/3} (1+t-s)x(s)\,ds - \int\limits_{t/3}^{t} x(s)\,ds = \frac{t^4}{108} - \frac{25t^3}{81}, \;\; t \in [0,\,2]$, where $\bar{x}(t) = t^2$ is exact solution. Table below demonstrates the errors $\varepsilon_N = ||x^N(t_i) - \bar{x}(t_i)||_{\Omega^N}$ and order of convergence $p^N = \log_2 \frac{D^N}{D^{2N}}$ based on maximum pointwise two-mesh differences $D^N = ||x^N(t_i) - \bar{x}^{2N}(t_i)||_{\Omega^N}$ without *a priori* knowledge of exact solition. This is joint work

	32	64	128	256	512	1024	2048	4096
ε_N	0.13034	0.07804	0.03989	0.01975	0.01002	0.00508	0.00256	0.00128
D^N	0.07462	0.03815	0.02013	0.00975	0.00514	0.00259	0.00129	0.00065
p^N	0.96774	0.92207	1.04619	0.92217	0.98864	1.00716	0.98639	1.00198

with Denis Sidorov and Alexander Tynda.

REFERENCES

1. D. Sidorov, A. Tynda and I. Muftahov *Numerical Solution of Weakly Regular Volterra Integral Equations of the First Kind.* — arXiv:1403.3764v2.
2. D. N. Sidorov *Methods of Analysis of Integral Dynamical Systems: Theory and Applications.* — ISU Publ, 2013, p. 293.

АВТОМАТИЗАЦИЯ АНТРОПОМЕТРИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ И ИЗВЛЕЧЕНИЕ ПРИЗНАКОВ ИЗ 2D-ИЗОБРАЖЕНИЙ

Нгуен Тхе Лонг, Нгуен Тху Хыонг

Национальный исследовательский
Иркутский государственный технический университет
e-mail: thelongit88@gmail.com, thuhuongyb@gmail.com

Наша цель состоит в том, чтобы в реальном времени распознавать параметры человеческого тела (такие как рост, форма, цвет волос/глаз/кожи, цвет одежды и пол) из видео/фотографий, сделанных в контролируемой (освещение и фон) среде. В этой статье, мы измеряем рост, длину рук, ширину плеч. Элементы контурного анализа используются совместно с теорией калибровки и алгоритмами вычитания фона. На практике, изображения имеют шумы, поэтому при обнаружении контура мы сталкивается с некоторыми проблемами, которые преодолеваются с помощью теории регуляризации. Мы также используем алгоритм вычитания фона, чтобы обнаружить изменения до и после того, как в поле зрения появляется объект. Этот алгоритм поддерживает точное обнаружение контура.

Наша цель состоит в том, чтобы построить надежное измерительное программное обеспечение, как для использования с обычным фотоаппаратом, так и для мобильных устройств. Область его применения включает в себя множество направлений, в том числе безопасность.

ЛИТЕРАТУРА

1.BenAbdelkader, C., Yacoob, Y. (2008). Statistical Estimation of Human Anthropometry from a Single Uncalibrated Image. Computational Forensics.
2.Hung, P. C.-Y., Witana, C. P., Goonetilleke, R. S. (2004). Anthropometric Measurements from Photographic Images. Computing Systems, 29, pp. 764-769.
3.Lin, Y. L., Wang, M. J. (2011). Automated body feature extraction from 2D images. Expert Systems with Applications, 38, pp. 2585-2591.
4.Bing-fei Gu, Hai-yan Kong, Ping-ying Gu, Jun-qiang Su, Guo-lian Liu (2011). Study of 2D Non-Contact Anthropometric System and Application. Future Computer Sciences and Application (ICFCSA), 2011 International Conference on, pp.150-153.

О ПОРЯДКЕ СИНГУЛЯРНОСТИ ОБОБЩЕННОГО РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА ТИПА СВЕРТКИ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ[1]

С.С. Орлов

Иркутский государственный университет, Иркутск
e-mail: orlov_sergey@inbox.ru

Пусть E_1, E_2 — вещественные банаховы пространства, $\mathbf{u} = u(t)$, $\mathbf{f} = f(t)$ — функции неотрицательного вещественного аргумента t со значениями в E_1 и E_2 соответственно. Рассмотрим интегральное уравнение

$$B\mathbf{u} - g * A\mathbf{u} = \mathbf{f}. \tag{1}$$

Здесь B и A — замкнутые линейные операторы из E_1 в E_2, причем $D(B) \subseteq D(A)$ и $\overline{D(B)} = \overline{D(A)} = E_1$, ядро $g(t)$ — числовая функция. Предполагается, что оператор B фредгольмов, т. е. $\overline{R(B)} = R(B)$ и $\dim N(B) = \dim N(B^*) = n < +\infty$, а функция $g(t)$ имеет в точке $t = 0$ нуль порядка r.

К этому уравнению допускает редукцию, например, следующая краевая задача:

$$(\Delta - \alpha)\varphi(t, \bar{x}) + \int_0^t (t-\tau)\beta\varphi_{x_N^2}(\tau, \bar{x})d\tau = f(t, \bar{x}),\ t > 0,\ \bar{x} = (x_1, \dots, x_N) \in \Omega;\ \varphi(t, \bar{x})|_{\bar{x}\in\partial\Omega} = 0,$$

где Ω — область в $\mathbb{R}^N$ с границей $\partial\Omega$ класса C^∞, α и β — отличные от нуля постоянные. В случае $N = 3$ эта задача моделирует низкочастотные электронные (ионные) магнито-звуковые колебания во внешнем магнитном поле [1].

С помощью конструкции фундаментальной оператор-функции вырожденного интегро-дифференциального оператора в банаховых пространствах [2] построено обобщенное решение интегрального уравнения (1) в классе распределений с ограниченным слева носителем и доказана его единственность. Обнаружена связь между порядком сингулярности обобщенного решения [3] и порядком нуля r функции $g(t)$ в точке $t = 0$. Также получены условия на входные данные задачи, при которых порядок сингулярности обобщенного решения равен нулю, т. е., когда оно совпадает с непрерывным (классическим) решением рассматриваемого интегрального уравнения (1). Полученные результаты проиллюстрированы примером краевой задачи физики плазмы.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.Г. Свешников, А.Б. Альшин, М.О. Корпусов, Ю.Д. Плетнер *Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа.* М.: Физматлит, 2007, 736 с.
2. М.В. Фалалеев *Фундаментальные оператор-функции сингулярных дифференциальных операторов в банаховых пространствах.* — Сиб. мат. журн. — 2000, т.41, №5, с. 1167-1182.
3. Г.Е. Шилов *Математический анализ. Второй специальный курс.* М.: Наука, 1965, 328 с.

[1]Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований в рамках научного проекта № 14-01-31175 мол_а.

SOLUTION OF LINEAR AND NONLINEAR VOLTERRA INTEGRAL EQUATIONS OF THE FIRST KIND WITH PIECEWISE SMOOTH KERNELS

D. Sidorov

Energy Systems Institute SB RAS
Irkutsk State University
e-mail: dsidorov@isem.sei.irk.ru

Volterra integral equations of the first kind $\int\limits_0^t K(t,s)x(s)ds = f(t)$, $f(0) = 0$, $0 \le s \le t \le T$, with piecewise smooth kernels

$$K(t,s) := \begin{cases} K_1(t,s),\ t,s \in m_1, \\ \ \dots\ \ \dots\dots\dots \\ K_n(t,s),\ t,s \in m_n, \end{cases} \qquad \begin{array}{l} m_i := \{t,s \mid \alpha_{i-1}(t) < s < \alpha_i(t)\}, \\ \alpha_0(t) = 0,\ \alpha_n(t) = t,\ i = \overline{1,n} \end{array}$$

are considered. Here $\alpha_i(t)$, $f(t) \in \mathcal{C}^1_{[0,T]}$, $K_i(t,s)$ have continuous derivatives (w.r.t. t) for $t,s \in \overline{m_i}$, $K_n(t,t) \neq 0$, $\alpha_i(0) = 0$, $\quad 0 < \alpha_1(t) < \alpha_2(t) < \dots < \alpha_{n-1}(t) < t$, $\alpha_1(t), \dots, \alpha_{n-1}(t)$ increase at least in the small neighborhood $0 \le t \le \tau$, $0 < \alpha_1'(0) \le \dots \le \alpha_{n-1}'(0) < 1$. The following results will be reported for this equation: condition for the existence of a unique solution; conditions for the existence of parametric solutions. Based on these results the approximate methods (successive approximations and asymptotic methods) are constructed. Taking into account obtained conditions for the existence of a unique solution, the numerical methods are proposed in [4,5] and their first order convergence is observed. The theoretical results [1-3] are generalized on the cases of matrix kernels in [6] and operator coefficients $K_i(t,s)$ in [7]. The proposed theory can be employed for solutions of the problems in power systems development modeling, including optimal equipment replacement [5,8]. New results concering the generalizations on nonlinear case and piecewise smooth source function will be also reported.

REFERENCES

1. D. Sidorov. Volterra Equations of the First kind with Discontinuous Kernels in the Theory of Evolving Systems Control. – Stud. Inform. Univ. 9(3), 2011, pp. 135–146.
2. D. N. Sidorov. Methods of Analysis of Integral Dynamical Systems: Theory and Applications. — Irkutsk: ISU Publ, 2013, 293 p. (in Russian language).
3. D. Sidorov. Integral Dynamical Models: Singularities, Signals and Control. World Scientific Series on Nonlinear Science (Series A), Vol. 89. Edt: Leon O. Chua. — Singapore: World Scientific Publ. Pte Ltd. 2014, 245 p. (in press).
4. D. Sidorov, A. Tynda and I. Muftahov. Numerical Solution of Weakly Regular Volterra Integral Equations of the First Kind. — arXiv:1403.3764v2, 8 p.
5. E. V. Markova, D. N. Sidorov. On one Integral Volterra Model of Developing Dynamical Systems. – Automation and Remote Control. 2014, 75 (3), pp. 413–421. 6. D. N. Sidorov. Solvability of Systems of Integral Volterra Equations of the First Kind with Piecewise Continuous Kernels. – Russian Math., 2013, no. 1, pp. 62–72 .
7. N. A. Sidorov, D. N. Sidorov. On the Solvability of a Class of Volterra Operator Equations of the First Kind with Piecewise Continuous Kernels. – Math. Notes. 2014 (in press).
8. A.S. Apartsin, I.V. Sidler Using the Nonclassical Volterra Equations of the First Kind to Model the Developing Systems. – Automation and Remote Control. 2013, 74 (6), pp. 899–910.

О НЕОГРАНИЧЕННЫХ РЕШЕНИЯХ ОДНОЙ НАЧАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

Н.А. Сидоров

Иркутский государственный университет, Иркутск
e-mail: sidorovisu@gmail.com

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$B(t)\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + f(t) \tag{1}$$

с начальным условием

$$\lim_{t\to 0} B(t)x(t) = y_0, \tag{2}$$

$B(t)$, $A(t)$, $f(t)$- аналитические в окрестности нуля. Предполагается, что $B(0)-$ фредгольмов оператор, $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$- базис в $\mathrm{Ker}B(0)$, $\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$- базис в $\mathrm{Coker}B(0)$.

$$\mathrm{Ker}B(0) \subseteq \bigcap_{i=0}^{k-1} \mathrm{Ker}B^{(i)}(0), \quad \det[\langle B^{(k)}_{(0)}\phi_i, \psi_j\rangle]_{i,j=\overline{1,n}} \neq 0,$$

$$\det[\lambda\langle B^{(k)}_{(0)}\phi_i, \psi_j\rangle - \langle A^{(k-1)}_{(0)}\phi_i, \psi_j\rangle]_{i,j=\overline{1,n}} \neq 0$$

при $\lambda = -k+1, -k+2, \dots$.
Если $k \geq 2$, то дополнительно предполагается, что

$$\mathrm{Ker}B(0) \subseteq \bigcap_{i=0}^{k-2} \mathrm{Ker}A^{(i)}(0), \quad \det[\langle A^{(k-1)}_{(0)}\phi_i, \psi_j\rangle]_{i,j=\overline{1,n}} \neq 0$$

Тогда справедлива

Теорема. *Начальная задача* (1), (2) *в проколотой окрестности* $0 < |t| < r$ *имеет в классе аналитических функций единственное решение. Решение представимо в виде ряда Лорана с полюсом порядка* $k-1$.

Если $k = 1$, то точка $t = 0$ будет устранимой особой точкой решения и мы приходим к известному результату (см., например, [1]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина *Задачи Шоуолтера-Сидорова как феномен уравнений соболевского типа.* Известия ИГУ. сер. математика, 2010, т.3, №1, с. 104-125.

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ПОМОЩЬЮ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА I РОДА[1]

С.В. Солодуша

Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН, Иркутск
e-mail: solodusha@isem.sei.irk.ru

В докладе рассмотрено уравнение Вольтерра I рода

$$\int_0^t K_N(t-s)\,\phi(s)\,ds = g_\delta(t),\ 0 \le s \le t \le T, \tag{1}$$

где

$$K_N(t-s) = 2\pi^2 \sum_{p=1}^{N} (-1)^{p+1}\, p^2 e^{-\pi^2 p^2 (t-s)}, \tag{2}$$

к которому сводится решение одной обратной граничной задачи теплопроводности [1]. Правая часть (1) есть приближение функции $g(t)$ для $\delta > 0$, так что $\forall\, t \ge 0$ имеет место $\|g_\delta(t) - g(t)\| \le \delta$.

Для иллюстрации специфики интегрального уравнения Вольтерра I рода (1), (2) приведем числовые характеристики ядер Вольтерра $K_N \in C_\Delta$, $\Delta = \{t, s/0 \le s \le t \le T\}$ при фиксированных значениях N. В таблице содержатся значения K_N при $t = 0$, а также корни t^* уравнений $K_N(t) = 0$, $N = \overline{10, 21}$, полученные с одинарной точностью.

N	t^*	$K_N(0)$	N	t^*	$K_N(0)$
10	0.01378	-1085.656	16	0.00913	-2684.532
11	0.01221	1302.788	17	0.00631	3020.099
12	0.01173	-1539.658	18	0.00809	-3375.405
13	0.01022	1796.268	19	0.00516	3750.449
14	0.01019	-2072.62	20	0.00735	-4145.234
15	0.00789	2368.705	21	0.00429	4559.757

Построены алгоритмы численного решения уравнения Вольтерра I рода (1), (2), основанные на саморегуляризующем свойстве процедуры дискретизации. В качестве "базовых" использованы метод средних прямоугольников и product integration method. Найдены параметры, определяющие шаг дискретизации. С целью проверки эффективности численного метода проведены серии тестовых расчетов. Вычислительный эксперимент показал, что разностные методы сходятся по шагу сетки с порядком $\mathcal{O}(h^2)$ в случае отсутствия возмущений исходных данных.

ЛИТЕРАТУРА

1. Yaparova N.M. *Numerical Methods for Solving a Boundary Value Inverse Heat Conduction Problem*// Inverse Problems in Science and Engineering, 2013, http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/17415977.2013.830614.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект №12-01-00722-а)

РАВНОВЕСНОЕ И ДВУХУРОВНЕВОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ ПОВЕДЕНИЯ ГЕНЕРИРУЮЩИХ КОМПАНИЙ НА РЫНКЕ ЭЛЕКТРОЭНЕРГИИ

Н.В. Дресвянская

Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН, Иркутск
e-mail: nadyadresvyanskya@gmail.com

В работе рассматривается рыночная электроэнергетическая модель взаимодействия поставщиков электроэнергии (ГенКо) и Системного оператора (СО), учитывающая пределы на генерацию и пропускные способности линий, а также потери [1].

В рыночных условиях ГенКо формируют собственные стратегии поведения при передаче информации СО. Поставщики могут искажать некоторые параметры представляемых затрат для увеличения своей прибыли. Достижение минимума суммарных затрат в ЭЭС не является их основной целью.

СО решает задачу планирования, минимизируя суммарные затраты на производство электроэнергии. При этом не учитывается олигопольное состояние рынка и желание ГенКо получить максимум прибыли.

Представлена математическая формулировка задачи планирования с учетом названных выше особенностей. Задача рассматривается в двухуровневой постановке. Верхний уровень моделирует действия ГенКо, стремящихся максимизировать прибыль.

Нижний уровень задачи моделирует действия СО, который с учетом предоставленной информации о затратах осуществляет планирование загрузки электростанций, определяет узловые равновесные цены, при этом минимизируя суммарные затраты.

Рассматриваемая двухуровневая задача может интерпретироваться как максимизация прибыли поставщика с учетом последующих действий СО по планированию загрузки электростанций в ЭЭС и моделированию узловых рыночных цен.

Предложена замена задачи нижнего уровня условиями оптимальности Куна-Таккера. В работе представлен численный пример, демонстрирующий применимость предложенного подхода к решению рассматриваемой задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нечаев И.А., Паламарчук С.И. *Планирование загрузки электростанций в условиях оптового рынка электроэнергии* / И.А. Нечаев, С.И. Паламарчук // Изв. РАН. Энергетика. — 2011. — № 6. — С. 71-84.

СТОХАСТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА КОНКУРЕНТНОГО РАЗМЕЩЕНИЯ ПРЕДПРИЯТИЙ С КВАНТИЛЬНЫМ КРИТЕРИЕМ[1]

С.В. Иванов, М.В. Морозова

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва
e-mail: sergeyivanov89@mail.ru

Предлагается постановка стохастической задачи размещения предприятий, сформулированная как дискретная двухуровневая задача стохастического программирования с квантильным критерием [1]. В данной задаче рассматриваются два игрока (лидер и последователь), последовательно размещающие предприятия с целью получить наибольший доход от потребителей. Стратегиями лидера и последователя являются размещения предприятий на некотором конечном множестве допустимых точек размещения. Последователь размещает свои предприятия, когда известна стратегия лидера. Лидер учитывает оптимальную стратегию последователя при выборе размещения своих предприятий. В случае если оптимальная стратегия последователя определяется не единственным образом, лидер учитывает наихудшую для себя оптимальную стратегию последователя, то есть рассматривается пессимистическая постановка двухуровневой задачи. В отличие от задачи, сформулированной в [2], предполагается, что спрос на продукцию предприятий является случайным. При этом считается, что лидеру известно лишь распределение случайного спроса, а последователь принимает решение, когда реализация спроса уже известна. В качестве критериальной функции задачи рассматривается квантиль распределения дохода лидера от размещения предприятий, то есть доход, гарантированный с заданной вероятностью.

Для случая дискретного распределения с конечным числом реализаций вектора случайных параметров предлагается метод сведения исходной задачи к детерминированной задаче двухуровневого программирования за счёт введения дополнительных бинарных переменных.

Предлагается метод вычисления значения критериальной функции задачи при фиксированной стратегии лидера и способы построения верхней и нижней оценок оптимального значения критериальной функции. Приводится алгоритм поиска субоптимального решения задачи, основанный на процедуре локального поиска со случайным выбором стартовых точек. Обсуждается возможность поиска точного решения задачи.

Проведён обширный численный эксперимент, демонстрирующий качество получаемых оценок критериальной функции, и близость решения, найденного с помощью предлагаемого алгоритма, к точному решению задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. С.В. Иванов. *Двухуровневые задачи стохастического линейного программирования с квантильным критерием.* — Автоматика и телемеханика. — 2014, № 1, с. 130-144.
2. В.Л. Береснев. *Верхние оценки для целевых функций дискретных задач конкурентного размещения предприятий.* — Дискретный анализ и исследование операций. — 2008, т. 15, с. 3-24.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 14-07-00006 А).

АНАЛИЗ ЭКСТРАПОЛЯЦИОННЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ

Д.И.Куянов, А.В.Зыкина

Омский государственных технический университет, Омск
e-mail: dmitry.kuyanov@gmail.com

В докладе рассматривается проблема эффективной реализации математических методов решения вариационных неравенств. Математическое моделирование играет важную роль при решении научно-практических, технических, экономических задач. Для решения таких задач из реального сектора экономики часто приходится ставить и решать задачи оптимизации. В свою очередь задачи оптимизации сводятся к задаче решения вариационного неравенства. В то же время современные вычисления базируются на применении параллельных алгоритмов. Ранее [1, 2] былы распараллелены разновидности экстраградиентных методов. Было решено рассмотреть методы решения вариационных неравенств из [3] и провести теоретическую оценку эффективности их распараллеливания. Были рассмотрены различные варианты градиентных методов, метода множителей и экстрааппроксимального метода.

В реализациях каждого метода были выявлены наиболее затратные с точки зрения вычислений операции (например, умножение матрицы на вектор или сложение матриц). Также выделялись блоки операций, реализация которых не зависела от результатов вычислений друг друга.

Используя методику оценки ускорения параллельного алгоритма [4] для каждого метода была проведена соответствующая теоретическая оценка. Оценка основана на определении доли параллельных вычислений в реализации метода. В ходе работы были выявлены наиболее выгодные с точки зрения ускорения методы. Одним из таких методов является экстраградиентный метод для решения равновесных задач со связанными ограничениями. Также были выявлены методы, применение параллелизма в которых даст меньший положительный эффект. Таким, например, является вариант игрового экстраградиентного метода для задач со связанными ограничениями.

В общем случае применение параллельных технологий в реализации методов решения вариационных неравенств позволяет эффективнее решать стратегически важные задачи, например, задачу построения бесперебойной информационной системы в арктических районах России.

ЛИТЕРАТУРА

1. Куянов Д. И. *Распараллеливание экстраградиентных методов* / Д. Н. Запорожец, В. С. Зыкин, А В. Зыкина, Д. И. Куянов // Омский научный вестник. 2011. № 3(103). С. 22-26.

2. Запорожец Д. Н. *Распараллеливание итерационных методов решения вариационных неравенств* / Д. Н. Запорожец // Труды международной научной конференции ПАВТ 2013. Челябинск, 2013. Издательство: Издательский центр ЮУрГУ (Челябинск)

3. Антипин А. С. *Градиентный и экстраградиентный подходы в билинейном равновесном программировании* / А. С. Антипин // Вычислительный Центр РАН. Москва. 2002. Pp.1-130

4. Карпов В. Е. *Введение в распараллеливание алгоритмов и программ* / В. Е. Карпов // Компьютерные исследования и моделирование, 2010, Т.2, №3, С. 231-272

DC-ПОДХОД К ПОИСКУ РАВНОВЕСИЯ В МОДЕЛИ КУРНО С КУБИЧЕСКИМИ ИЗДЕРЖКАМИ

И.М. Минарченко

Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН, Иркутск
e-mail: sla669@gmail.com

Рассматривается модель олигополии Курно с S-образными издержками участников [1], заданными полиномами третьей степени:

$$C_i(x_i) = \alpha_i x_i^3 + \beta_i x_i^2 + \gamma_i x_i + \delta_i, \quad \alpha_i > 0, \beta_i < 0, \gamma_i > 0, \delta_i \geq 0, \beta_i^2 \leq 3\alpha_i\gamma_i,\ i \in N,$$

и линейной функцией спроса

$$p(x) = d - a\sum_{j\in N} x_j, \quad a > 0,\ d > 0.$$

Здесь N обозначает множество участников, $x_i > 0$ — объём выпуска i-го участника. Поскольку модель Курно в данной постановке является потенциальной [2], любое равновесие Нэша в чистых стратегиях является стационарной точкой потенциала

$$P(x) = \sum_{i\in N}\left[-\alpha_i x_i^3 - (a+\beta_i)x_i^2 + \left(d - \gamma_i - \frac{a}{2}\sum_{j\neq i} x_j\right)x_i\right],$$

являющегося, очевидно, невогнутой функцией. При этом глобальный максимум P гарантированно является равновесием.

Для нахождения глобального максимума предлагается использовать метод ветвей и границ, осуществляя построение оценивающих сверху вогнутых функций путём линеаризации выпуклой составляющей в DC-разложении функции P.

В докладе также представлены результаты численного эксперимента.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гальперин В.М., Игнатьев С.М., Моргунов В.И. *Микроэкономика: В 2-х т.* / Общая редакция В. М. Гальперина. — СПб.: Экономическая школа, 1994. — Т. 1. — 349 с.
2. Monderer D., Shapley L.S. *Potential Games* — Games and Economic Behavior — 1996, № 14, p. 124–143.

ПРИЛОЖЕНИЯ МЕТОДОВ ОПТИМИЗАЦИИ В ЭНЕРГЕТИКЕ

ОПТИМИЗАЦИЯ ВОЗРАСТНОЙ СТРУКТУРЫ ОБОРУДОВАНИЯ В ИНТЕГРАЛЬНЫХ МОДЕЛЯХ РАЗВИТИЯ ЭЭС РОССИИ[1]

А. С. Апарцин, И. В. Сидлер, В. В. Труфанов

Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН, Иркутск, Россия;
e-mail: apartsyn@isem.sei.irk.ru, krlv@isem.sei.irk.ru, truf@isem.sei.irk.ru

В работе [1] рассмотрена задача оптимизации сроков службы оборудования электроэнергетических систем (ЭЭС) России, в которой фазовая переменная $x(t)$ – суммарный ввод электрической мощности в момент t – удовлетворяет неклассическому уравнению Вольтерра I рода

$$\int_{a(t)}^{t} K(t,s)x(s)ds = y(t), \quad t \in [t_0, T], \quad x(t) = x^0(t), \quad t \in [a(t_0), t_0), \tag{1}$$

где $K(t,s)$ – коэффициент эффективности использования в момент t единицы мощности, введенной ранее в момент s; $y(t)$ – экспертно задаваемая динамика располагаемой мощности; $t - a(t)$ – срок службы самого старого в момент t энергоблока; $x^0(t)$ – известная динамика вводов мощностей на $[a(t_0), t_0)$.

В [2] в основу моделирования развития ЭЭС положено обобщающее (1) уравнение

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{a_i(t)}^{a_{i-1}(t)} K_i(t,s)x(s)ds = y(t), \quad t \in [t_0, T], \quad a_0(t) \equiv t, \quad a_n(t_0) \le t_0, \tag{2}$$

в котором i-е слагаемое соответствует i-ой возрастной группе элементов системы, а свойства функций $a_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, зависят от принятых гипотез о механизме старения оборудования.

В [1] в качестве критерия оптимизации выбора $a(t)$ использован функционал суммарных затрат за $T - t_0$ (лет) на ввод нового и ремонт и эксплуатацию имеющегося оборудования.

В развитие [1], [2], в данной работе рассмотрена постановка задачи оптимального управления с аналогичным функционалом и интегральным ограничением на фазовую переменную в форме (2), а оптимизируемыми функциональными параметрами могут быть как a_i, так и K_i. В настоящее время разрабатывается эвристический алгоритм оптимизации выбора функции $a_n(t)$, определяющей динамику вывода из эксплуатации элементов старшей возрастной группы.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.С. Апарцин, И.В. Караулова, Е.В. Маркова, В.В. Труфанов *Применение интегральных уравнений Вольтерра для моделирования стратегий технического перевооружения электроэнергетики.* — Электричество. — 2005, № 10, с. 69-75.
2. А.С. Апарцин, И.В. Сидлер *Применение неклассических уравнений Вольтерра I рода для моделирования развивающихся систем.* — Автоматика и телемеханика. — 2013, № 6, с. 3-16.

[1]Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект № 12-01-00722-а) и Советом по грантам Президента РФ (НШ-4711.2011.8).

О ПОИСКЕ РАВНОВЕСИЯ В РЫНОЧНОЙ МОДЕЛИ ОРИРЕС

С.А. Гах

Институт систем энергетики им.Мелентьева СО РАН, Иркутск
e-mail: svetagah@inbox.ru

Настоящий доклад посвящен проблеме поиска равновесия в рыночной модели ОРИРЕС, рассмотренной в [1]. В общем случае поведение компании $l \in L$ можно записать в виде задачи линейного программирования:

$$\sum_{i\in I}\sum_{s\in S}\sum_{t\in T}\tau_s^w(p-c_{li})x_{list}+\sum_{i\in I}\sum_{s\in S}\sum_{t\in T}\tau_s^h(p-c_{li})y_{list}-f\sum_{i\in I}k_{li}(z_{li}-z_{li}^0)-$$
$$-\sum_{i\in I}b_{li}^0 z_{li}\to max, \tag{1}$$

$$\alpha_{lis}z_{li}\le x_{list}\le\beta_{lis}z_{li},\quad i\in I,\quad s\in S,\quad t\in T, \tag{2}$$

$$\alpha_{lis}z_{li}\le y_{list}\le\beta_{lis}z_{li},\quad i\in I,\quad s\in S,\quad t\in T, \tag{3}$$

$$z_{li}^0\le z_{li}\le\bar{z_{li}},\quad i\in I, \tag{4}$$

$$\tau_s^w\sum_{t\in T}x_{list}+\tau_s^h\sum_{t\in T}y_{list}\le g_s z_{li},\quad i=\{GES\},\quad s\in S, \tag{5}$$

$$\sum_{t\in T}x_{list}\le\eta d z_{li},\quad i=\{GAES\},\quad s\in S, \tag{6}$$

$$\sum_{t\in T}y_{list}\le\eta d z_{li},\quad i=\{GAES\},\quad s\in S, \tag{7}$$

где x_{list} и y_{list} - рабочая мощность станции типа i, принадлежащей компании l, в сезон s в час t в рабочие и выходные дни соответственно; z_{li}, z_{li}^0 и $\bar{z}_{li}$ - установленная, минимально и максимально возможная мощность станции типа i, принадлежащей компании l, соответственно; p - цена за единицу электроэнергии; c_{li} и b_{li}^0 - удельные издержки на генерацию электроэнергии и удельные эксплуатационные издержки станции типа i, принадлежащей компании l, соответственно; α_{lis} и β_{lis} - коэффициент минимально и максимально допустимой мощности станции типа i компании l; τ_s^w и τ_s^h - число рабочих и выходных дней в сезоне s соответственно; g_s и d - максимальное число часов использования установленной мощности ГЭС в сезоне s и ГАЭС в сутки соответственно; η - к.п.д. ГАЭС.

Однако, поведение некоторых компаний имеет особенности. Существуют компании, которые не планируют развивать мощность в ближайшие годы, а также, в силу своего географического положения, не имеют в составе ГЭС и ГАЭС. При моделировании поведения таких компаний будут присутствовать только ограничения на рабочую мощность (2)-(3), используя которые можно записать решение аналитически. Применение данного подхода снижает вычислительную сложность задачи поиска равновесия в рыночной модели ОРИРЕС, что является важным в связи с большой размерностью рассматриваемой задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Подковальников С. В., Хамисов О. В. Несовершенные электроэнергетические рынки: моделирование и исследование развития генерирующих мощностей// Известия Российской академии наук. Энергетика. - 2011. - N 2. - С. 57-76

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАЗВИТИЯ ЕДИНОЙ НАЦИОНАЛЬНОЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СЕТИ

П.С. Драчев

Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН, Иркутск
e-mail: drachev@isem.sei.irk.ru

При переходе от плановой экономики к системе рынков, основная системообразующая электрическая сеть приобретает свойства основного инфраструктурного элемента электроэнергетического рынка. Электрическая сеть обеспечивает реализацию основных параметров развитого рынка в электроэнергетике: недискриминационный доступ к электроэнергии для потребителей, свободные поставки производителей на рынок электроэнергии, конкуренцию среди участников [1]. Тем самым, роль электрической сети в условиях рыночной электроэнергетики значительно повышается, растет ответственность и цена принимаемых решений по ее развитию. В то же время, в рыночных условиях увеличивается сложность задачи развития электрической сети из-за необходимости учета при принятии решений интересов всех участников электроэнергетического рынка и роста неопределенности в параметрах спроса и предложения электроэнергии. Для решения рыночной задачи развития основной электрической сети необходима разработка системы соответствующих математических моделей. В статье сформулирована постановка статической модели развития основной электрической сети в условиях рыночной конкуренции. Модель характеризуется следующими особенностями: учитываются факторы дискретности и многорежимности, рассматривается рынок с совершенной конкуренцией. В качестве практического примера модель применена к реальной схеме ЕЭС России. Результаты решения сопоставляются с официальными прогнозными данными.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. С. Драчев. *Рыночная модель развития основной электрической сети* // Вестник Иркутского государственного технического университета. – 2013, №1, с. 125-134.

POWER SYSTEMS PARAMETERS FORECASTING USING THE HILBERT-HUANG TRANSFORM AND MACHINE LEARNING[1]

A.V.Zhukov

Institute of Mathematics, Economics and Computer Sciences
Irkutsk State University, Irkutsk, Russia
e-mail: zhukovalex13@gmail.com

A novel hybrid data-driven mathematical forecasting model is developed in order to increase the efficiency of short-term forecasting of non-stationary time-series. Suggested approach combines the effective tool of non-stationary time series analysis based the Hilbert-Huang integral transform (HHT) and machine learning methods. The original time series is decomposed by empirical modal functions that are then subject to the Hilbert transform in order to compute instantaneous amplitudes and frequencies at every time moment. Then the resulting modal functions and instantaneous amplitudes are used to automatically find optimal combinations of input variables for further application of machine learning models. Models that are examined include neural networks, support vector machines, the regression trees approach: random forest and boosting trees.

The random forests and gradient boosting trees learning techniques were examined. The decision tree techniques were used to rank the importance of variables employed in the forecasting models. The Mean Decrease Gini index is employed as an impurity function. The resulting hybrid forecasting models employ the radial basis function neural network and support vector regression.

Proposed strategy was tested on wind speed forecasting problem using real data acquired from the Atlantic offshore buoy data.

This is a joint work with Paul Leahy (Sustainable Energy Research Group, University College Cork, Cork, Ireland), Nikita Tomin, Victor Kurbatsky, Vadim Spiryaev (Dept. Electric Power Systems, Melentiev Energy Systems Institute, Irkutsk, Russia) and Denis Sidorov (Dept. Electric Power Systems, Melentiev Energy Systems Institute, Irkutsk State University Irkutsk, Russia)

REFERENCES

V.G. Kurbatsky, D.N. Sidorov, V.A. Spiryaev, N.V. Tomin, Forecasting Nonstationary Time Series Based on Hilbert–Huang Transform and Machine Learning, *Automation and Remote Control*, 2014, Vol. 75, No. 5, pp. 922–934.

V. Kurbatsky, N. Tomin, P. Leahy, D. Sidorov, V. Spiryaev, A.Zhukov, Power System Parameters Forecasting Using Hilbert-Huang Transform and Machine Learning, preprint in Learning (cs.LG); Machine Learning (stat.ML), arXiv:1404.2353v1, 2014.

[1]This work is partly funded by Russian Scientific Foundation (project No. 14-19-00054)

ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ СИСТЕМА УПРАВЛЕНИЯ ИНТЕНСИВНОСТЬЮ ИЗЛУЧЕНИЯ СКВАЖИННОГО ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ГЕНЕРАТОРА

А.А. Капелюховский

Омский государственный технический университет, Омск
e-mail: vesto4ka@bk.ru

В настоящее время для интенсификации притока нефти в призабойной зоне пласта эффективно используются волновые генераторы различных принципов действия, работающие в широком диапазоне частот [1]. Одним из перспективных волновых генераторов является стержневой гидродинамический излучатель акустических волн.

В процессе эксплуатации излучателя в скважинных условиях может происходить расстройка колебаний стержней с пульсациями давления в струе, что снижает интенсивность излучения.

Предполагая, что собственная частота колебаний стержней практически не изменяется, появляется принципиальная возможность построения автоматической экстремальной системы управления, регулирующей расход насоса на устье скважины. Эта система сможет обеспечит резонансный режим колебаний стержней излучателя по информации о максимуме амплитуды перепада давления.

Рассматривая скважину, как гидравлическую линию с распределёнными параметрами, и выбирая экстремальный регулятор дискретным шагового типа [2], было проведено моделирование системы.

Результаты численного эксперимента показали, что по окончании переходного процесса возникают автоколебания около положения экстремума, что подтверждает возможность построения экстремальной системы управления интенсивностью излучения стержневым гидродинамическим генератором, расположенным в скважине на уровне нефтяного пласта.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ганиев Р.Ф. *Волновые машины и технологии (введение в волновую технологию).* — М.: Научно-издательский центр "Регулярная и хаотическая динамика 2008. - 192 с.
2. Власов К.П. *Теория автоматического управления.* — Харьков, 2007. - 524 с.

ЗАДАЧИ ДИСКРЕТНО-НЕПРЕРЫВНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ РЕЖИМОВ ТЕПЛОВЫХ СЕТЕЙ И ВОЗМОЖНЫЕ ПОДХОДЫ К ИХ РЕШЕНИЮ

А. В. Луценко, Н. Н. Новицкий
luc_alex@mail.ru, pipenet@isem.sei.irk.ru

Институт Систем Энергетики им. Мелентьева СО РАН

В докладе рассматривается задача оптимизации гидравлических режимов теплоснабжающих систем (ТСС) по экономическим критериям с учетом структуры включенного насосного оборудования.

Решению данной задачи препятствует ряд факторов сложности: большая размерность ТСС, нелинейность привлекаемых моделей потокораспределения, дискретность области поиска по структуре оборудования, одновременное присутствие непрерывных способов управления (дросселирование, частотное регулирование) и др. По этим причинам в настоящее время отсутствуют работоспособные методики и программные комплексы, пригодные для практического применения.

В докладе рассматриваются вопросы адаптации для ТСС имеющихся в ИСЭМ СО РАН заделов в области методов расчета допустимых и оптимальных режимов трубопроводных систем [1]. Рассматривается новая постановка задачи, состоящая в определении не состава, а числа работающих насосов на НС. Это отвечает требованиям однотипности устанавливаемых насосов на ТСС при их параллельной работе и одновременно дает ощутимый выигрыш по вычислительной трудоемкости.

Для выбора оптимального состава включенных насосов предложено и исследовано четыре метода: метод полного перебора, дискретный метод ветвей и границ, метод ветвлений и отсечений, непрерывный метод ветвей и границ. Все эти методы предполагают направленный перебор вариантов, причем оптимизации каждого из них по непрерывным переменным выполняется методом внутренних точек [2,3]. В итоге решается задача дискретно-непрерывной оптимизации режима.

Все эти методы реализованы в виде исследовательских программ и опробованы на модельной ТСС. На основе проведенных вычислительных экспериментов показана вычислительная эффективность непрерывного метода ветвей и границ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алексеев А. В., Новицкий Н. Н. Алгоритмы решения дискретно-непрерывных задач расчета допустимых и оптимальных режимов сложных трубопроводных сетей. // Труды XII байкальской международной школы семинара «методы оптимизации и их приложения». Том 5. Мрделирование технических и природных систем. – Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2005, –с.203–207.

2. Новицкий Н. Н., Дикин И. И. Расчет допустимых режимов работы трубопроводных сетей методом внутренних точек. – Иркутск: Препринт ИСЭМ СО РАН, 2002 – 48с.

3. Луценко А. В. Оптимизация гидравлических режимов распределительных тепловых сетей по технологическим критериям. // Системные исследования в энергетике / Труды молодых ученых ИСЭМ СО РАН, Вып. 43. – Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2013 – С.-37–45.

NEW OPTIMIZATION ALGORITHM FOR CONTROLLING CASCADING FAILURES IN POWER SYSTEMS[1]

D. Panasetsky

Melentiev Energy System Institute Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences e-mail: contact.dns@gmail.com

Power systems are in the core of the infrastructure of modern society. The reliability of a large number of life-support systems depends on the entire power systems reliability and it components functioning. However, the complexity of such networks makes it difficult to manage them, and parts of the network might fail. E.g. the blackout that occurred on August 14th, 2003 in the US and Canada due to both a lack of coordinated countermeasures and too long a delay between the initial emergency and the countermeasures taken, transmission lines started failing, causing a cascade of failures. The main means of counteracting the development of such severe outages in Electrical Power Systems (EPS) are so-called Emergency Control Systems (ECS). In general, ECS can be divided into centralized and local systems. A centralized ECS is a complex information system, whose main task is to provide control actions for a number of different types of disturbances offline. Typically, centralized ECS collects information on the current state of the EPS, and based on a detailed analysis of the current situation calculates coordinated control actions for a large set of possible disturbances. However, their reliability depends on many communication channels. Moreover, the rate of decision making strongly depends on the transmission speed of the slowest information channel. Due to delays in computation and the dynamical nature of the power system, the returned control actions might not be valid anymore. Finally, different power companies might put restrictions on the centralization and accumulation of information due to confidentiality requirements. Local ECS are devices that implement control actions on the basis of local information of the current state. Although their decision times are quite fast, the uncoordinated nature of their actions can create a catastrophic deterioration of the emergency due to cascading failures. In particular, recent studies have shown that the main reason for most of the recent blackouts was a cascade tripping of transmission lines due to overload [1]. Thus, there is a need to supplement existing control methods with new one that can react better and faster to changes than centralized ECS, while still being able to provide a better coordinated solution than existing local ECS can provide. The paper proposes a new optimization algorithm for load shedding to eliminate overloads in electric power systems. Lets outline the main features of proposed algorithm. 1) An optimal balance between complexity and simplicity: it is generic enough to provide high level of control actions precision and it is simple enough to meet strict time restrictions. 2) It meets high level of reliability: it does not fail in the case of the uncritical loss of information. High speed of self-healing monitoring is provided by the maximum simplification of the algorithm. This is a joint work with O. Khamisov, D. Sidorov, N. Tomin and A. Osak.

REFERENCES

1. IEEE Task Force Report Blackout experiences and lessons, best practices for system dynamic performance, and role of new technologies. Technical report 07TP190, July 2007, p.1-165

[1]This work is partly supported by RSF, project No. 14-19-00054.

УПРАВЛЕНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЯМИ В ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧАХ ГИДРОЭНЕРГЕТИКИ

О.А. Попова

Сибирский федеральный университет, Красноярск
e-mail: olgaarc@yandex.ru

Задачи гидроэнергетики характеризуются высоким уровнем неопределенности, которая проявляется на всех стадиях информационного процесса принятия управленческого решения. Поэтому поиск методов и подходов к построению эффективных решений в условиях неопределенности является важной и практически значимой задачей. Решением разнообразных задач со стохастическими неопределенностями в данных занимается стохастическая гидрология, которая для решения оптимизационных задач использует аппарат стохастического программирования. Особое место занимают оптимизационные задачи с неопределенными входными данными. В случае, когда входные параметры содержат неопределенность, используется математический аппарат неопределенного программирования. Неопределенное программирование представляет собой теоретические основы решения оптимизационных задач в условиях различных видов неопределенности.

В настоящее время при решении различных задач в условиях неопределенности используется понятие управление неопределенностями, которое все чаще и чаще появляется в зарубежных и российских публикациях. Содержательный смысл этого понятия еще не устоялся и часто используется вместе с такими понятиями как управление рисками, управление в условиях неопределенности и так далее. Наше интерпретация понятия управление неопределенностью связана прежде всего с разработкой численных процедур и методов, способствующих снижению уровня неопределенности в зависимости от типа, характера, специфических особенностей, объема и ее источников на всех стадиях информационного процесса, сопровождающего принятие управленческого решения. В статье для решения оптимизационных задач гидроэнергетики со случайными входными данными предлагается использовать аппарат случайного программирования [1,2], представляющего собой раздел математического программирования и использующий методы численного вероятностного анализа для построения функции плотности вероятности множества возможных оптимальных решений для линейных и нелинейных оптимизационных задач. В рамках данного подхода реализуется процедура распространения неопределенности с целью снижения уровня неопределенности. Рассматривается пример решения задачи оптимизации выработки электроэнергии ГЭС, которая зависит от прогноза бокового притока воды в водохранилище, как стохастической функции.

ЛИТЕРАТУРА

1. O. A. Popova *Optimization problems with random data.* — Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. — 2013, 6(4), 506–515

2. B. Dobronets, O. Popova *Linear optimization problems with random data.* VII Московская международная конференция по исследованию операций (ORM 2013): Москва, 15–19 октября 2013 г. Труды Том 1 / Отв. ред. П.С. Краснощеков, А.А. Васин, А.Ф. Измаилов. — М., МАКС Пресс, 2013. С. 15–18

К ВОПРОСУ ОБ ЭНЕРГОЭФФЕКТИВНОСТИ МЕТОДОВ ПОЛУЧЕНИЯ АЗОТА НА ОБЪЕКТАХ НЕФТЕДОБЫЧИ

А.А. Шипунова

Омский государственный технический университет, Омск
e-mail: shipunovaa@mail.ru

В представленном докладе рассмотрена область применения азота, а также три основных способа получения азота с помощью воздухоразделительных установок: мембранный, адсорбционный и криогенный. Также автором показана актуальность увеличения производства азота и снижения энергозатрат по его получению.

Сопоставив три метода получения азота, автор выполнил расчетно-теоретическое исследование с целью определения энергозатрат для каждого метода при условии одинаковой производительности воздухоразделительной установки, но с различной чистоты получаемого азота. Анализ полученных результатов показал, что наиболее эффективным способом является адсорбционный и в некоторых случаях мембранный.

Полученные результаты могут быть полезны при выборе типа воздухоразделительной установки для различных технологических процессов в промышленности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Архаров А.М., Архаров И.А., Беляков В.П. и др. *Криогенные системы.* Т.2. — М.: Машиностроение, 1999. - 720 с.
2. Епифанова В.И. *Разделение воздуха методом глубокого охлаждения. Технология и оборудование.* Т.2. — М: Машиностроение, 1973. - 567 с.

ИНФОРМАЦИЯ О НОВОЙ КНИГЕ

Коннов И.В. Нелинейная оптимизация и вариационные неравенства. – Казань: Издательство Казанск. ун-та, 2013. – 508 с., илл. ISBN 978-5-00019-059-3

В книге с единых позиций систематически излагаются теория и методы решения задач оптимизации с нелинейными функциями цели и ограничений и вариационных неравенств. Большое внимание уделяется выявлению и описанию общих идей для исследования и решения таких задач. Помимо традиционных разделов, таких как теория и методы минимизации выпуклых гладких функций, подробно рассматриваются методы недифференцируемой оптимизации, поиск стационарных точек в задачах невыпуклой оптимизации, смешанные вариационные неравенства и вариационные неравенства с многозначными отображениями. Описаны смежные задачи, такие как задачи дополнительности, нелинейные уравнения и нелинейные задачи равновесия, а также новые классы приложений и взаимосвязи применяемых для поиска решений итерационных методов. Представлены многие современные результаты, не публиковавшиеся ранее в учебной и монографической литературе на русском языке. В книгу включены упражнения, вполне доступные для самостоятельной работы, иллюстрации и примеры. Построение книги позволяет ей служить учебником также и по отдельным курсам оптимизации и вариационных неравенств. Предназначается для широкого круга читателей: студентов и магистров, обучающихся по физико-математическим, экономико-математическим и компьютерным направлениям, а также аспирантов по соответствующим специальностям; специалистов в области прикладной математики и численных методов; всех исследователей, заинтересованных в применении эффективных методов решения сложных нелинейных задач. Ил. 32. Библиогр. 343 назв.

По вопросу приобретения книги обращаться к автору по адресу: Igor.Konnov@kpfu.ru

Колосницын А.В.
Минарченко И.М.
д.ф.-м.н. Хамисов О.В.

Тезисы докладов XVI Байкальской международной школы-семинара "Методы оптимизации и их приложения"

Утверждено к печати Институтом систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН

Подписано к печати 23.06.2014

Формат 70*108*1/16
Уч.–изд.л. 11.4
Тираж 90 экз.
Заказ №82

Ризограф ИСЭМ СО РАН
664033, Иркутск, ул.Лермонтова, 130

ISBN 978-5-93908-139-9